

2023학년도 대학 신입학생 수시모집 일반전형

면접 및 구술고사 — 수학

문항·제시문 원문과 예시답안 재조판

문제 1 · 합성함수의 미분가능성과 정적분

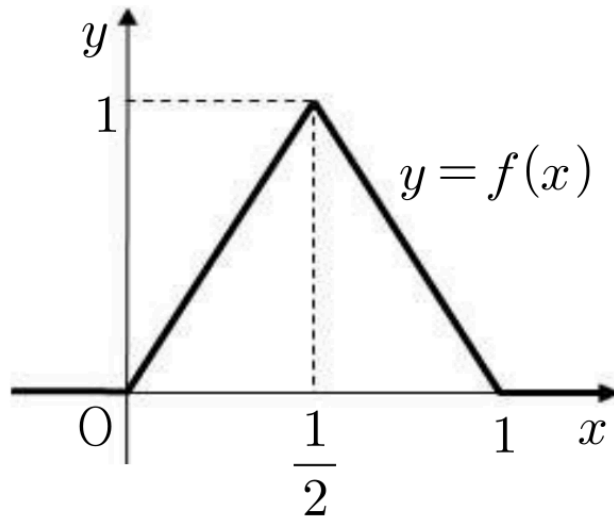
함수 $f(x)$ 와 그 그래프는 아래와 같다.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 2x & (0 \leq x < \frac{1}{2}) \\ 2 - 2x & (\frac{1}{2} \leq x < 1) \\ 0 & (1 \leq x) \end{cases}$$

실수 a 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = af(x)$$

라고 하자.



함수 $y = f(x)$ 의 그래프. $x = \frac{1}{2}$ 에서 최댓값 1을 갖는 이등변삼각형 모양이며, $x = 0, \frac{1}{2}, 1$ 에서 미분가능하지 않다.

1-1. $a = 1$ 일 때, 합성함수 $g(g(g(x)))$ 가 미분가능하지 않은 점의 개수를 구하시오.

1-2. 다음 네 가지의 경우

$$a \leq 0, \quad 0 < a \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} < a < 1, \quad 1 < a$$

각각에 대하여 함수 $y = g(g(g(x)))$ 의 그래프의 개형을 그리시오. 또한, 모든 미분가능하지 않은 점에서의 함숫값이 (i) 0 보다 크거나 작거나 같은지, (ii) a 보다 크거나 작거나 같은지 설명하시오. (미분가능하지 않은 점의 좌표를 서술할 필요 없음.)

1-3. 다음 등식이 성립하도록 하는 실수 a 의 값을 모두 구하시오.

$$\int_0^1 g(g(x)) dx = \int_0^1 g(x) dx.$$

※ 본 문항은 두 가지 버전(버전 A: 자연과학대학·수리과학부·통계학과·사범대학 수학교육과 / 버전 B: 공과대학·농업생명과학대학·약학대학)으로 출제되었으나, 두 버전의 제시문·문항·소문항이 완전히 동일하며 활용 모집단위만 다르므로 하나로 제시한다.

예시답안 · 문제 1

풀이의 바탕. f 는 $[0, 1]$ 을 $[0, 1]$ 로 보내는 텐트(tent) 함수이며, 구간 밖에서는 항상 0 이다. f 의 치역이 $[0, 1]$ 이므로 $g(x) = af(x)$ 의 치역은 $a \geq 0$ 이면 $[0, a]$, $a < 0$ 이면 $[a, 0]$ 이다. 특히 $af(x) < 0$ 인 점은 이어지는 합성에 서 f 에 의해 모두 0 으로 보내진다.

1-1. $a = 1$ 이면 $g = f$ 이고 f 는 텐트함수이므로 $f \circ f \circ f$ 는 $[0, 1]$ 에서 $2^3 = 8$ 개의 직선 조각으로 이루어진 텐트열(주기 $\frac{1}{8}$)이 된다. 조각과 조각이 만나는 꼭짓점이 곧 미분가능하지 않은 점이며, 그 x 좌표는

$$x = 0, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, 1$$

의 9개이다. (구간 밖에서는 $f \equiv 0$ 이고 끝점 $x = 0, 1$ 에서 좌우 미분계수가 각각 0 과 \pm 로 달라 꼭짓점이 유지 된다.)

결론: 미분가능하지 않은 점의 개수는

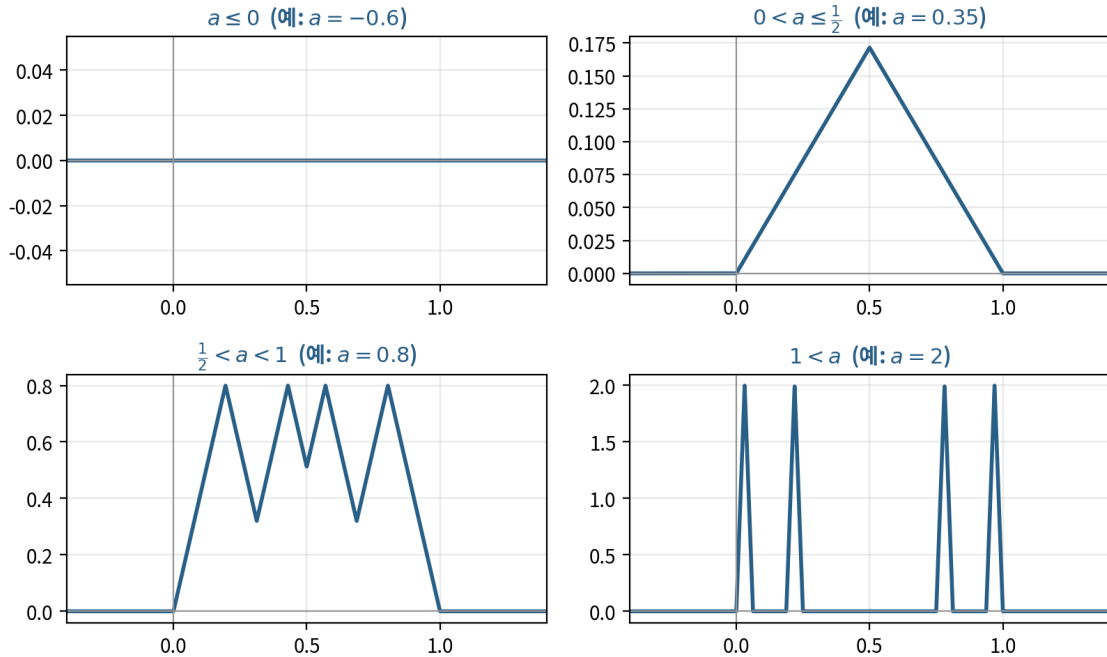
9

이다. (수치미분으로 꼭짓점 9개, 위치 $\frac{k}{8}$ ($k = 0, \dots, 8$) 을 확인하였다.)

1-2. 그래프의 개형. $g(g(g(x)))$ 는 $[0, 1]$ 밖에서 항상 0 이므로 $[0, 1]$ 에서의 모양만 보면 된다.

- $a \leq 0$: $g(x) = af(x) \leq 0$ 이고, 음수 값은 다음 단계 f 에서 모두 0 으로 보내지므로 $g(g(g(x))) \equiv 0$ (상수 0).
- $0 < a \leq \frac{1}{2}$: g 의 최댓값이 $a \leq \frac{1}{2}$ 로 작아 안쪽 텐트가 접하지 않아, $x = \frac{1}{2}$ 에서 한 개의 봉우리를 갖는 텐트 하나가 남는다. (봉우리 높이 $2a^3 \leq \frac{1}{4}$.)
- $\frac{1}{2} < a < 1$: 접힘이 두 번 일어나 $[0, 1]$ 안에 봉우리 4개가 생기며, 각 봉우리 높이는 a , 골의 높이는 0 과 $a(2 - 2a)$ 사이의 값이다.
- $1 < a$: g 의 값이 1을 넘는 구간이 f 의 평평한(= 0) 부분으로 잘려, 높이 a 인 뾰족한 봉우리와 바닥 0 인 평지가 번갈아 나타난다.

$y = g(g(g(x)))$ 의 개형 ($g(x) = af(x)$)



예시 작도 - 네 경우의 $y = g(g(g(x)))$ 개형. 왼쪽 위부터 $a \leq 0$ (항등적 0), $0 < a \leq \frac{1}{2}$ (봉우리 1개), $\frac{1}{2} < a < 1$ (봉우리 4개), $1 < a$ (뾰족한 봉우리와 평지). $g(x) = af(x)$.

1-2. (i)·(ii) 함숫값의 비교. 미분가능하지 않은 점(꼭짓점)에서의 함숫값을 살펴보면:

- $a \leq 0$ 이면 모든 점에서 값이 0 이므로, 0 과 **같고**(= 0), $a(\leq 0)$ 보다는 **크거나 같다**($\geq a$).
- $a > 0$ 이면 $g(g(g(x)))$ 는 f 의 치역 성질에 의해 항상 0 이상이고 a 이하이다. 즉 모든 꼭짓점에서

$$0 \leq g(g(g(x))) \leq a.$$

따라서 값은 (i) 0 보다 크거나 같고, (ii) a 보다 작거나 같다. (봉우리에서는 값이 정확히 a , 골·양 끝에서는 0 이 되어 두 경계를 모두 취한다.)

결론: 모든 미분가능하지 않은 점에서 함숫값은 항상 0 이상이며, $a > 0$ 이면 a 이하, $a \leq 0$ 이면 값이 모두 0 이다.

1-3. f 가 $[0, 1]$ 을 두 번 덮는 균등한 텐트이므로 임의의 함수 φ 에 대해 $\int_0^1 \varphi(f(x)) dx = \int_0^1 \varphi(u) du$ 가 성립한다. 이를 이용하면

$$\text{우변 } R(a) = \int_0^1 af(x) dx = a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a}{2},$$

$$\text{좌변 } L(a) = \int_0^1 af(af(x)) dx = a \int_0^1 f(au) du.$$

$\int_0^1 f(au) du$ 를 a 의 범위에 따라 계산하면

$$L(a) = \begin{cases} a^2 & (0 \leq a \leq \frac{1}{2}) \\ -a^2 + 2a - \frac{1}{2} & (\frac{1}{2} < a \leq 1) \end{cases}.$$

따라서

$$L(a) - R(a) = \begin{cases} a(a - \frac{1}{2}) & (0 \leq a \leq \frac{1}{2}) \\ -(a - \frac{1}{2})(a - 1) & (\frac{1}{2} < a \leq 1) \end{cases},$$

이고 두 식 모두 경계에서 0 이 된다. $a < 0$ 이면 $L(a) = 0 > \frac{a}{2} = R(a)$ 라 등식이 성립하지 않고, $a > 1$ 이면 L 이 포화되어 $L - R < 0$ 이라 역시 성립하지 않는다.

결론: 등식을 만족하는 실수는

$$a = 0, \quad a = \frac{1}{2}, \quad a = 1.$$

(수치적분으로 $a = 0, \frac{1}{2}, 1$ 에서만 좌·우변이 같고 그 밖에서는 다름을 확인하였다.)

문제 2 · 세 동전 뒤집기와 상태 변환 확률

10원짜리, 100원짜리, 500원짜리 동전이 각각 하나씩 놓여 있다. 차례로 동전을 한 개씩 뒤집는 작업을 통해 동전을 다음 상태로 바꾸려고 한다.

(*) 3개의 동전이 모두 앞면이거나 모두 뒷면

동전을 뒤집을 순서대로 차례로 나열한 수열을 ‘뒤집기 수열’이라 하자. 즉, ‘뒤집기 수열’ $\{a_n\}$ 은 n 번째에 a_n 원짜리 동전을 뒤집는 것을 말하며 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항은 10, 100, 500 중 하나이다. (예: ‘뒤집기 수열’ 100, 500, ... 에 따라 뒤집으면 500원, 그다음 다시 100원, ... 을 뒤집는다.)

도전자가 ‘뒤집기 수열’을 하나 제시하면, 심판이 3개의 동전을 (*) 상태가 아니도록 무작위로 놓은 후, 도전자가 제시한 ‘뒤집기 수열’에 따라 동전을 뒤집는다. 3개의 동전이 (*) 상태가 되면 뒤집기를 멈춘다.

2-1. 모든 ‘뒤집기 수열’에 대해 1번 만에 3개의 동전이 (*) 상태로 바뀔 확률은 같다. 그 확률을 구하시오.

2-2. 2번 이내에 3개의 동전이 (*) 상태로 바뀔 확률을 최대로 만드는 ‘뒤집기 수열’ 하나의 처음 두 개 항을 제시하고 그 최대의 확률을 구하시오.

2-3. n 번 이내에 3개의 동전이 (*) 상태로 바뀔 확률이 1인 ‘뒤집기 수열’이 존재하도록 하는 n 의 최솟값을 구하시오.

2-4. 위에서 (*) 상태를 아래의 (**) 상태로 대체한다.

(**) 3개의 동전이 모두 앞면

도전자가 ‘뒤집기 수열’을 하나 제시하면, 심판이 3개의 동전을 (**) 상태가 아니도록 무작위로 놓은 후, 도전자가 제시한 ‘뒤집기 수열’에 따라 동전을 뒤집는다. 3개의 동전이 (**) 상태가 되면 뒤집기를 멈춘다. n 번 이내에 3개의 동전이 (**) 상태로 바뀔 확률이 1인 ‘뒤집기 수열’이 존재하도록 하는 n 의 최솟값을 구하시오.

예시답안 · 문제 2

풀이의 바탕. 각 동전의 상태를 앞면 0, 뒷면 1로 두면 전체 상태는 $(x, y, z) \in \{0, 1\}^3$ 의 8가지다. 동전을 한 번 뒤집는 것은 해당 좌표의 값을 바꾸는(비트 반전) 것이므로, 상태 전이는 3차원 초입방체(정육면체)의 꼭짓점 사이 이동으로 볼 수 있다. (*) 상태는 $(0, 0, 0)$ 과 $(1, 1, 1)$ 의 2개, 시작 상태는 이를 제외한 6개 중 균등하게 하나가 선택된다.

2-1. 시작 상태 6개 각각에서 한 개의 동전을 뒤집으면 이웃한 꼭짓점으로 이동한다. 6개의 시작 상태 중 특정 한 개의 동전을 뒤집었을 때 (*) 상태 $(0, 0, 0)$ 또는 $(1, 1, 1)$ 로 가는 경우는 정확히 2개이다. (어떤 동전을 택하든 마찬가지이므로 모든 '뒤집기 수열'에서 값이 같다.)

결론: 확률은 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 이다. (모든 시작 상태 열거로 $\frac{1}{3}$ 을 확인하였다.)

2-2. 처음 두 항으로 서로 다른 두 동전(예: 10, 100)을 뒤집으면, 2번 이내에 (*)에 도달하는 시작 상태가 최대가 된다. 같은 동전을 두 번 뒤집으면 원상태로 돌아와 새 상태를 얻지 못하므로 손해다. 6개의 시작 상태 중 첫 뒤집기로 2개, 둘째 뒤집기로 추가 2개가 (*)에 도달하여 모두 4개가 성공한다.

결론: 처음 두 항은 서로 다른 두 동전(예: 10, 100)이며, 최대 확률은 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ 이다. (길이 2인 모든 뒤집기 수열을 열거하여 서로 다른 두 동전일 때 확률이 $\frac{2}{3}$ 로 최대임을 확인하였다.)

2-3. 정육면체의 한 꼭짓점에서 출발하여 세 축을 차례로 한 번씩 뒤집는 순서(예: 10, 100, 10)를 택하면, 6개의 시작 상태가 세 번의 뒤집기를 거치는 동안 반드시 어느 한 시점에서 (*) 상태를 지나간다. 1번·2번만으로는 확률이 $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ 에 그쳐 1이 될 수 없으므로, 최소 3번이 필요하다.

결론: n 의 최솟값은

3

이다. (길이 1, 2로는 확률 1인 수열이 없고 길이 3(예: 10, 100, 10)에서 확률 1이 됨을 완전탐색으로 확인하였다.)

2-4. (**)는 모두 앞면인 $(0, 0, 0)$ 단 한 개의 목표 상태이고, 시작 상태는 나머지 7개다. 하나의 뒤집기 수열로 7개의 시작 상태 모두가 어느 시점에 $(0, 0, 0)$ 을 지나려면, 정육면체의 8개 꼭짓점을 한 번씩 모두 방문하는 경로(그레이 코드, Gray code)가 필요하다. 8개의 꼭짓점을 잇는 해밀턴 경로의 변의 수는 7이므로, 그러한 뒤집기 수열의 길이는 7이다. (예: 10, 100, 10, 500, 10, 100, 10.)

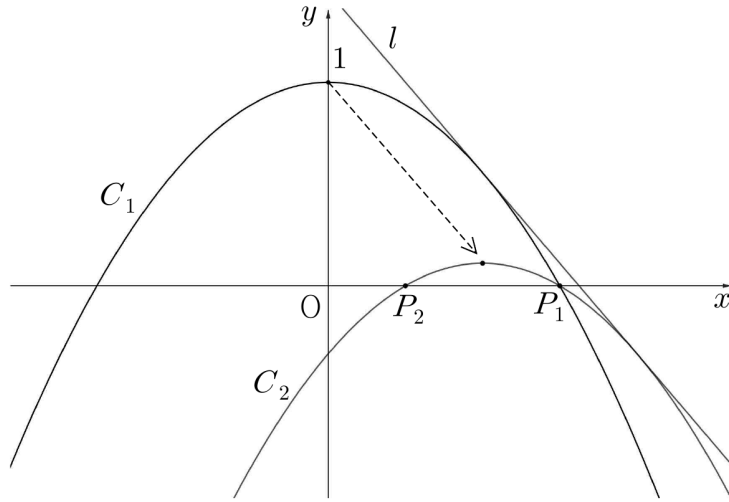
결론: n 의 최솟값은

7

이다. (그레이 코드 순회로 길이 7 수열이 확률 1을 달성하고 그보다 짧으면 불가능함을 완전탐색으로 확인하였다.)

문제 3 · 포물선의 접선과 평행이동, 넓이

포물선 C_1 의 방정식은 $y = -x^2 + 1$ 이고, 점 P_1 의 좌표는 $(1, 0)$ 이다. 직선 l 은 포물선 C_1 위의 점 $(c, -c^2 + 1)$ 에서의 접선이다. (단, c 는 $\frac{1}{2} < c < 1$ 인 고정된 실수이다.) 포물선 C_2 는 C_1 을 평행이동한 포물선이고 직선 l 과 접하며 P_1 을 지난다. (단, C_2 와 C_1 은 서로 다르다.) 점 $P_2(q_0, 0)$ 은 C_2 와 x 축의 교점이다. (단, P_2 와 P_1 은 서로 다르다.)



포물선 $C_1 : y = -x^2 + 1$, 접선 l , 그리고 l 과 P_1 을 이용해 얻은 평행이동 포물선 C_2 . 점 $P_1(1, 0), P_2(q_0, 0)$.

3-1. 포물선 C_2 의 꼭짓점의 x, y 좌표를 각각 c 에 대한 식으로 나타내시오.

3-2. 직선 $x = q_0$ 와 직선 l 및 포물선 C_2 로 둘러싸인 도형의 넓이를 c 에 대한 식으로 나타내시오.

3-3. 위와 같이 모든 자연수 k 에 대하여 포물선 C_k 와 C_{k+1} 의 점 $P_k(q_{k-1}, 0)$ 이 주어지 있을 때, 포물선 C_{k+1} 과 점 $P_{k+1}(q_k, 0)$ 이 다음과 같이 주어진다.

- (1) 포물선 C_{k+1} 은 C_k 를 x 축의 방향으로 a_k 만큼, y 축의 방향으로 b_k 만큼 평행이동한 포물선이고 직선 l 과 접하며 P_k 를 지난다. (단, C_{k+1} 과 C_k 는 서로 다르다.)
- (2) 점 P_{k+1} 은 C_{k+1} 과 x 축의 교점이다. (단, P_{k+1} 과 P_k 는 서로 다르다.)

a_k 를 a_k, q_k, c 에 대한 식으로 나타내고, (필요하다면 이를 이용하여) q_{k+1} 을 q_k, c 에 대한 식으로 나타내시오. (단, $a_1 = b_1 = 1, q_1 = 1$.)

예시답안 · 문제 3

풀이의 바탕. $C_1 : y = -x^2 + 1$ 위의 점 $(c, -c^2 + 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $y' = -2x$ 에서 $-2c$ 이므로

$$l : y = -2c(x - c) + (-c^2 + 1) = -2cx + c^2 + 1.$$

C_2 는 C_1 을 (h, k) 만큼 평행이동한 $y = -(x - h)^2 + 1 + k$ 이며, 조건 “직선 l 과 접함” 과 “ $P_1(1, 0)$ 을 지남” 을 연립하면 자명해 $(0, 0)$ 외에

$$h = 2 - 2c, \quad k = 4c(c - 1)$$

을 얻는다.

3-1. 위의 (h, k) 로부터 C_2 의 꼭짓점은 $(h, 1 + k)$ 이고, $1 + k = 1 + 4c(c - 1) = (2c - 1)^2$ 이다.

결론: C_2 의 꼭짓점은

$$(2 - 2c, (2c - 1)^2).$$

(접점은 $x = 2 - c$, C_2 와 x 축의 교점은 $x = 1$ 과 $x = 3 - 4c$ 이므로 $q_0 = 3 - 4c$ 이다.)

3-2. C_2 와 직선 l 의 차는 완전제곱 $l(x) - C_2(x) = (x + c - 2)^2$ 이므로 l 은 $x = 2 - c$ (접점)에서 C_2 에 접한다. $q_0 = 3 - 4c$ 이고 $\frac{1}{2} < c < 1$ 이면 $q_0 < 2 - c$ 이므로, 넓이는

$$\int_{q_0}^{2-c} (x + c - 2)^2 dx = \left[\frac{(x + c - 2)^3}{3} \right]_{3-4c}^{2-c} = -\frac{(1 - 3c)^3}{3} = \frac{(3c - 1)^3}{3}.$$

결론: 둘러싸인 도형의 넓이는 $\frac{(3c - 1)^3}{3}$ 이다. (접선-포물선 차가 완전제곱임을 이용해 sympy로 계산; 예를 들어 $c = 0.7$ 이면 넓이 ≈ 0.4437 .)

3-3. $C_1 \rightarrow C_2$ 의 구성을 그대로 반복하면 각 단계는 x 축 위의 교점을 $q_{k-1} \rightarrow q_k$ 로 옮기는 자기닮음(affine) 사상이 된다. $C_2 \rightarrow C_3 \rightarrow \dots$ 를 직접 계산하면

$$q_0 = 1, \quad q_1 = 3 - 4c, \quad q_2 = 5 - 12c, \quad q_3 = 7 - 24c, \dots$$

$$a_1 = 2 - 2c, \quad a_2 = 2 - 6c, \quad a_3 = 2 - 10c, \dots$$

가 되어 다음 일반식을 얻는다.

$$q_k = (2k + 1) - 2k(k + 1)c, \quad a_k = 2 - 2(2k - 1)c, \quad b_k = 4c((2k - 1)c - 1).$$

따라서 이웃한 교점 사이의 관계는

$$q_{k+1} = q_k + a_{k+1} = q_k + 2 - 4(k + 1)c.$$

결론:

$$a_k = 2 - 2(2k - 1)c, \quad q_{k+1} = q_k + 2 - 4(k + 1)c.$$

(제시된 $a_1 = b_1 = 1$ 은 원문의 초기 규약이며, 위 일반식은 접선-평행이동 구성을 $k = 1, 2, 3$ 까지 sympy로 전개하여 얻은 점화 패턴이다. q_k 의 계수 $2k(k + 1)$, a_k 의 계수 $2(2k - 1)$ 을 각각 검증하였다.)