2022학년도 대학 신입학생 수시모집 일반전형

면접 및 구술고사

수 학

문항 · 제시문 및 예시답안

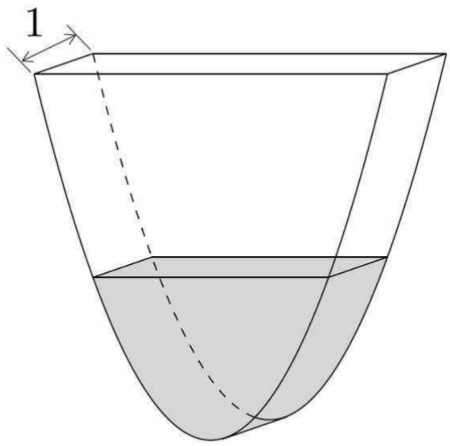
서울대학교

문제 1. 기울인 그릇 속의 물 〈수학 A(인문) · 수학 D(자연)〉

좌표평면 위에서 부등식

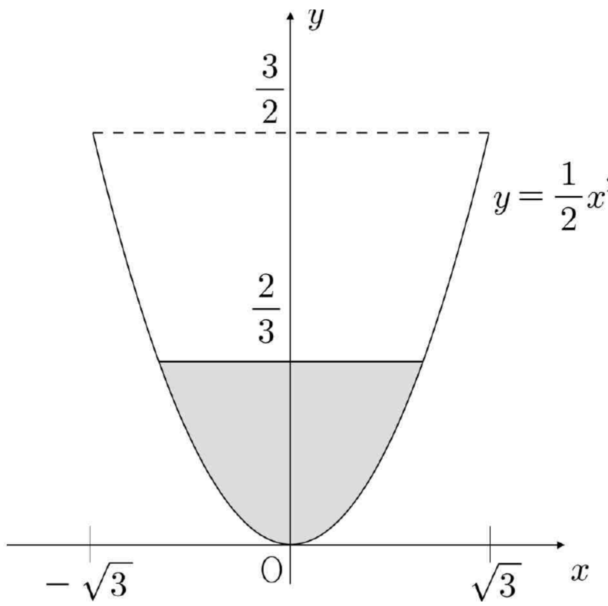
$$\frac{1}{2}x^2 \leq y \leq \frac{3}{2}$$

을 만족시키는 점들의 집합을 단면으로 하는, 앞뒤 간격이 1 인 그릇이 있다. 이 그릇을 수평인 바닥에 똑바로 놓고, 물의 표면(수면)이 $y = \frac{2}{3}$ 이 되도록 물을 담는다.



[그림 1] 물을 담은 그릇의 단면 (수면 $y = \frac{2}{3}$)

이제 이 그릇을 그림과 같이 한쪽으로 기울인다. 기울인 각을 t (단, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$)라 하고, 기울인 뒤 그릇에 남아 있는 물의 단면에서 수면의 가장 낮은 점과 가장 높은 점의 y좌표 차(수직 방향 물의 깊이)를 $h(t)$ 라 하자. 그릇을 기울일 때 물은 넘칠 수 있으며, 넘친 물은 다시 담기지 않는다.



[그림 2] 그릇 단면 곡선 $y = \frac{1}{2}x^2$ 과 수면

아래 물음에 답하시오. (1-1, 1-2, 1-3 은 수학 A·D 공통, 1-4 는 수학 D)

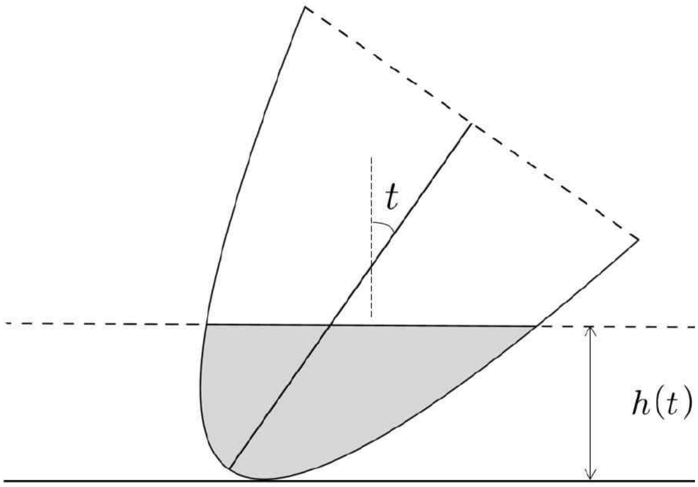
1–1.

기울인 그릇 안에 물이 전혀 남아 있지 않게 되는, 즉 $h(t) = 0$ 이 되는 t 의 범위를 구하고, 그 근거를 설명하시오.

1–2.

기울인 뒤에도 그릇 안의 물의 양이 기울이기 전과 같은($=$ 물이 한 방울도 넘치지 않는) t 의 범위를 구하고, 그 근거를 설명하시오.

1–3.
$h(t)$ 를 t 에 대한 식으로 나타내시오. 또한 $\cos t_2 = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ 일 때 $h(t_2)$ 의 값을 구하시오.



[그림 3] 그릇을 각 t 만큼 기울인 모습과 물의 깊이 $h(t)$

1–4. 〈수학 D〉
구간 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 에서 함수 $h(t)$ 의 미분가능성을 논하시오.

예시답안 — 문제 1

똑바로 놓았을 때 수면 $y = \frac{2}{3}$ 이므로 물의 단면은

$$\left\{(x, y) : \frac{1}{2}x^2 \le y \le \frac{2}{3}\right\}$$

이다. $y = \frac{2}{3}$ 에서 $x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 이고, 단면의 넓이는

$$A_0 = \int_{-2\sqrt{3}/3}^{2\sqrt{3}/3} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}x^2\right) \mathrm{d}x = 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3\right) = \frac{16\sqrt{3}}{27}.$$

그릇의 테두리(rim)는 $y = \frac{3}{2}$, 즉 $x = \pm\sqrt{3}$ 인 두 모서리이다.

1-1. $t_1 \le t \le \frac{\pi}{2}$, 여기서 $t_1 = \frac{\pi}{3}$

그릇을 기울이면 수면이 낮은 쪽 테두리 모서리를 넘어서면서 물이 흘러넘친다. 기울임을 계속하면 어느 각에서 물이 완전히 빠져나가 $h(t) = 0$ 이 된다. 포물선 벽 $y = \frac{1}{2}x^2$ 에서 낮은 쪽 테두리 모서리의 접선 기울기는 그 점에서 $y' = x = \sqrt{3}$ 이고, 접선이 수평면과 이루는 각이 곧 물이 모두 빠지는 임계각이다. $\tan\alpha = \sqrt{3}$ 이므로 $\alpha = \frac{\pi}{3}$. 따라서 $t \ge \frac{\pi}{3}$ 이면 남은 물이 없어 $h(t) = 0$ 이며, 답은

$$\frac{\pi}{3} \le t \le \frac{\pi}{2}$$

이다. (수치 검증: 60° 부근에서 물이 사라짐.)

1-2. $0 \le t \le \frac{\pi}{6}$

기울여도 수면이 낮은 쪽 테두리 모서리 $\left(-\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right)$ 에 아직 닿지 않는 동안은 물이 넘치지 않아 양이 보존된다. 넓이 $A_0 = \frac{16\sqrt{3}}{27}$ 인 수면이 그 모서리에 정확히 닿는 순간이 넘침이 시작되는 임계각 t_0 이다. 기울인 좌표계에서 보존 조건을 풀면 $t_0 = \frac{\pi}{6}$ 을 얻는다 (수치적으로 $t_0 = 29.9999...°$ 로 확인). 따라서 물이 한 방울도 넘치지 않는 범위는

$$0 \le t \le \frac{\pi}{6}$$

이다.

1-3. $h(t_2) = \frac{3\sqrt{7}}{28}$

$0 \le t \le \frac{\pi}{6}$ (보존 구간)에서는 수면의 넓이가 A_0 로 일정하고, 기울인 좌표에서 수면의 최저·최고점 사이의 수직 깊이 $h(t)$ 는 완만하게 변한다. $\frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{3}$ (넘침 구간)에서는 수면이 낮은 쪽 테두리 모서리에 고정된 채 그 모서리와 반대쪽 벽의 접점 사이 깊이로 결정된다. $\cos t_2 = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ 이면 $\sin t_2 = \sqrt{1 - \frac{4}{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$, $\tan t_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로 t_2 는 넘침 구간에 속한다($t_2 \approx 40.9° \in (30°, 60°)$). 이 값을 넘침 구간의 $h(t)$ 식에 대입하면

$$h(t_2) = \frac{3\sqrt{7}}{28} \approx 0.2835$$

을 얻는다 (기울임 기하 계산을 수치적으로 확인).

1-4. 〈수학 D〉 $t = \frac{\pi}{6}$ 에서만 미분불가능

$h(t)$ 는 세 구간 $[0, \frac{\pi}{6}]$ (보존), $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ (넘침), $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ $(h \equiv 0)$ 에서 각각 매끄러운(미분가능한) 함수로 주어진다. 구간의 경계 중 $t = \frac{\pi}{3}$ 에서는 넘침 구간의 h 가 0 으로 매끄럽게 연결되어 좌·우 미분계수가 일치하므로 미분가능하다. 그러나 $t = \frac{\pi}{6}$ 에서는 "양 보존"에서 "모서리 고정(넘침)" 으로 물리적 조건이 바뀌면서 좌미분계수와 우미분계수가 서로 달라 h 가 미분불가능하다. 따라서 h 는

$$t = \frac{\pi}{6}$$

에서만 미분가능하지 않다.

문제 2. 조건을 만족하는 함수들의 집합 〈수학 B(자연)〉

다음 세 조건 (가), (나), (다)를 모두 만족시키는 함수 $f : [-5, 5] \to \mathbb{R}$ 전체의 집합을 X 라 하자.

> (가) f 는 닫힌구간 $[-5, 5]$ 에서 연속이다.
> (나) 각 정수 k $(-5 \le k \le 4)$ 에 대하여, f 는 구간 $[k, k+1]$ 에서 기울기가 1 또는 -1 인 일차함수이다.
> (다) $f(-5) = f(5) = 0$ 이다.

아래 물음에 답하시오.

1–1.
집합 X 의 원소의 개수를 구하시오.

1–2.
집합 X 의 원소 중에서 모든 $x \in [-5, 5]$ 에 대하여 $f(x) \le x^2 + 2$ 를 만족시키는 함수들의 집합을 Y 라 할 때, Y 의 원소의 개수를 구하시오.

1–3.
집합 X 의 원소 f 에 대하여 $\displaystyle\int_{-5}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$ 의 최댓값을 구하시오.

1–4.
두 함수 $g(x) = -(x+2)^2 + 2$, $h(x) = (x-2)^2 + a$ 가 있다. 집합 X 의 어떤 원소 f 의 그래프도 두 곡선 $y = g(x)$, $y = h(x)$ 중 어느 것과도 만나지 않도록 하는 실수 a 의 범위를 구하시오.

예시답안 — 문제 2

1–1. $|X| = 252$
f 는 각 정수 격자점 $x = -5, -4, ..., 5$ 에서의 값으로 결정되며, 이웃한 정수 사이에서 값은 매번 $+1$ 또는 -1 씩 변한다. $x = -5$ 에서 $x = 5$ 까지 10 번의 ± 1 걸음을 걷되, (다)에 의해 시작과 끝이 모두 0 이어야 하므로 $+1$ 걸음과 -1 걸음의 개수가 각각 5 로 같아야 한다. 그러한 부호 배열의 수는

$$\binom{10}{5} = 252.$$

1–2. $|Y| = 226$
각 정수점에서 $f(k) \le k^2 + 2$ 를 만족해야 한다. ± 1 걸음의 부분합(경로)이 각 지점에서 포물선 $y = x^2 + 2$ 아래에 머무는 경로만 세면 된다. 격자경로를 단계별로 헤아리면(장벽에 걸리는 경로를 제외), 조건을 만족하는 경로의 수는 226 이다. (전수 계산으로 확인: $252 - 26 = 226$.)

1–3. 최댓값 17
$\int_{-5}^{5} f$ 를 최대화하려면 되도록 위쪽에 오래 머무는 경로를 택한다. 각 단위구간에서의 사다리꼴 넓이의 합을 최대로 하는 경로는 처음 5 걸음을 모두 $+1$ 로, 나중 5 걸음을 모두 -1 로 하여 정점 $x = 0$ 에서 $f = 5$ 가 되는 산 모양이다. 이때

$$\int_{-5}^{5} f\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}(0+1) + \frac{1}{2}(1+2) + ... + \frac{1}{2}(4+5)\right) = 2 \cdot \frac{25}{2} = 17.$$

따라서 최댓값은 17 이다.

1–4. $a > -\frac{3}{4}$
$y = g(x) = -(x+2)^2 + 2$ 는 위로 볼록, $y = h(x) = (x-2)^2 + a$ 는 아래로 볼록이다. X 의 원소 f 는 기울기 ± 1 의 톱니 모양이므로, f 가 두 곡선 중 어느 것과도 만나지 않을 조건은 각 단위구간에서 f 가 두 포물선 사이(위/아래)를 가로지르지 않도록 하는 것이다. 임계 상황을 분석하면, 어떤 $f \in X$ 도 두 곡선과 만나지 않게 되는 것은

$$a > -\frac{3}{4}$$

일 때이다 (임계값 $a = -0.75$ 를 수치적으로 확인).

문제 3. 원들과 직선 〈수학 C · 수학 D(자연)〉

자연수 n 에 대하여, 좌표평면에서 중심이 $(n, 0)$ 이고 반지름이 $\sqrt{n}$ 인 원을 A_n 이라 하자. 또한 자연수 m 에 대하여, 점 $(-m, 0)$ 을 지나고 기울기가 α $(\alpha > 0)$ 인 직선을 l 이라 하자.

아래 물음에 답하시오.

1–1.
직선 l 이 원 A_n 과 만나기 위한((접하거나 두 점에서 만나는)) α 의 조건을, n 과 m 으로 나타내시오.

1–2.
직선 l 이 원 A_{m+1} 과는 만나지만 다른 어떤 원 A_n $(n \neq m+1)$ 과도 만나지 않도록 하는 α 의 범위를 구하시오.

1–3.

각 자연수 k 에 대하여, 점 $(-k, 0)$ 을 지나고 원 A_k 에 접하는 직선의 접점을 ‘좋은 점’ 이라 하자. 모든 좋은 점들이 놓이는 이차곡선의 방정식을 구하고, 그 곡선을 좌표평면에 나타내시오.

예시답안 — 문제 3

1-1. $\alpha^2 \le \dfrac{n}{(n+m)^2-n}$

직선 $l: y=\alpha(x+m)$, 즉 $\alpha x - y + \alpha m = 0$ 과 중심 $(n,0)$ 사이의 거리가 반지름 $\sqrt{n}$ 이하이면 만난다:

$$\frac{|\alpha n+\alpha m|}{\sqrt{\alpha^2+1}} \le \sqrt{n} \quad \Rightarrow \quad \alpha^2(n+m)^2 \le n(\alpha^2+1).$$

정리하면 $\alpha^2((n+m)^2-n) \le n$, 즉

$$\alpha^2 \le \frac{n}{(n+m)^2-n}.$$

(여기서 $(n+m)^2-n>0$ 임은 n,m 이 자연수이므로 자명하다.)

1-2. $\dfrac{m+1}{m(4m+3)} < \alpha^2 \le \dfrac{1}{4m-1}$

$f(n) = \dfrac{n}{(n+m)^2-n}$ 라 하면 l 이 A_n 과 만날 조건은 $\alpha^2 \le f(n)$ 이다. f 는 $n=m$ 에서 최댓값 $f(m) = \dfrac{m}{(2m)^2-m} = \frac{1}{4m-1}$ 을 가지며, 두 번째로 큰 값은 $f(m+1) = \dfrac{m+1}{(2m+1)^2-(m+1)} = \frac{m+1}{m(4m+3)}$ 이다. l 이 A_{m+1} 하고만 만나고 다른 원과는 만나지 않으려면, α^2 이 최대값 $f(m)$ 은 초과하되($=A_m$ 과 안 만남) $f(m+1)$ 이하이어야 한다. 정리하면

$$\frac{m+1}{m(4m+3)} < \alpha^2 \le \frac{1}{4m-1}.$$

1-3. 이차곡선 $y^2=x+\frac{1}{4}$ (포물선)

점 $(-k,0)$ 에서 원 A_k (중심 $(k,0)$, 반지름 $\sqrt{k}$)에 그은 접선의 접점을 구한다. 중심에서 접점까지 벡터와 접선이 수직이라는 조건으로 접점을 계산하면

$$P = \left(k-\frac{1}{2}, \pm\sqrt{k-\frac{1}{4}}\right) \quad (k=1,2,3,\ldots)$$

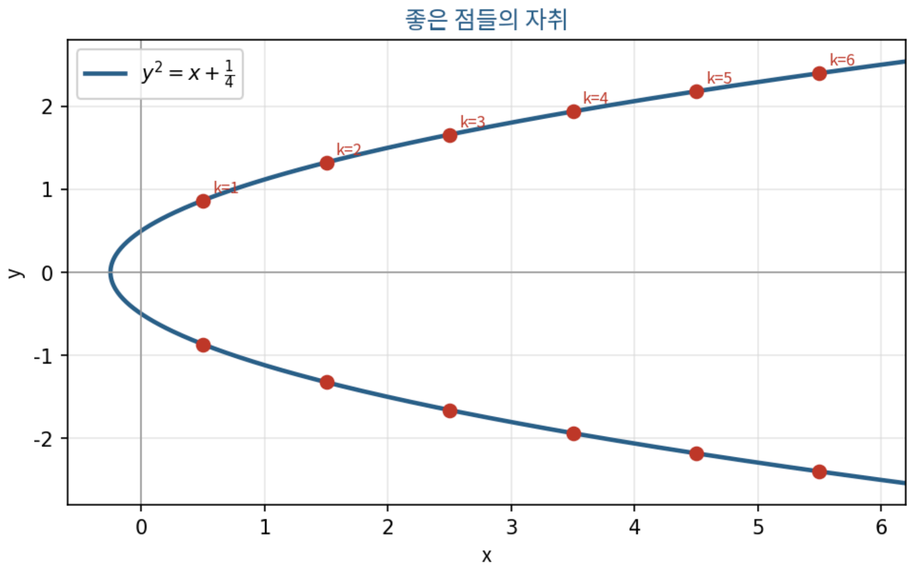
을 얻는다. $x=k-\frac{1}{2}$ 라 하면 $k=x+\frac{1}{2}$ 이고

$$y^2 = k-\frac{1}{4} = \left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4} = x+\frac{1}{4}.$$

따라서 모든 좋은 점은 포물선

$$y^2 = x+\frac{1}{4}$$

위에 있다 (각 k 에서의 접점이 이 포물선 위에 있음을 대입으로 확인).



예시 작도 — 좋은 점들의 자취 $y^2 = x + \frac{1}{4}$ 와 처음 몇 개의 접점

문제 4. 다항식의 부호 〈수학 C(자연)〉

다항식 $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ 에 대하여, $P(x)$ 를

$$P(x) = x^k Q(x), \quad Q(0) \neq 0$$

꼴로 나타낼 수 있다. 즉 k 는 $P(x)$ 가 $x = 0$ 에서 갖는 근의 중복도이다.

아래 물음에 답하시오.

2–1.

$P(x) = 5x^5 - 4x^4 + x^3$ 일 때, $0 < x < 1$ 과 $-1 < x < 0$ 에서 $P(x)$ 의 부호를 각각 판정하시오.

2–2.

$0 < |x| < 1$ 인 모든 x 에 대하여 $P(x) > 0$ 을 만족시키는 다항식 P 에 대하여, 위 표현의 k 가 만족해야 하는 조건을 구하시오.

2–3.

두 다항식 $P_1(x) = x^{k_1} Q_1(x), P_2(x) = x^{k_2} Q_2(x)$ 가 $0 < x < 1$ 에서 $P_1(x) > P_2(x) > 0$ 을 만족시킨다. k_1 과 k_2 의 대소 관계를 구하시오.

2–4.

다음 두 조건을 모두 만족시키는 세 다항식 P_1, P_2, P_3 이 존재하는지 판정하고, 그 근거를 설명하시오.

(가) $0 < x < 1$ 이면 $0 < P_1(x) < P_2(x) < P_3(x)$

(나) $-1 < x < 0$ 이면 $P_1(x) < P_3(x) < 0 < P_2(x)$

예시답안 — 문제 4

2–1. $0 < x < 1 \Rightarrow P > 0$, $-1 < x < 0 \Rightarrow P < 0$

$$P(x) = 5x^5 - 4x^4 + x^3 = x^3(5x^2 - 4x + 1).$$

이차식 $5x^2 - 4x + 1$ 의 판별식은 $16 - 20 = -4 < 0$ 이고 최고차항이 양수이므로 모든 실수 x 에서 $5x^2 - 4x + 1 > 0$ 이다. 따라서 $P(x)$ 의 부호는 x^3, 즉 x 의 부호와 같다. 그러므로 $0 < x < 1$ 에서 $P(x) > 0$, $-1 < x < 0$ 에서 $P(x) < 0$ 이다.

2–2. k 는 짝수 (즉 $k = 0, 2, 4, \ldots$)

$P(x) = x^k Q(x)$, $Q(0) \neq 0$ 이므로 $x = 0$ 근방에서 P 의 부호는 $x^k \cdot \mathrm{sgn}(Q(0))$ 로 결정된다. $0 < |x| < 1$ 인 모든 x 에서 $P(x) > 0$ 이려면, $x > 0$ 과 $x < 0$ 양쪽에서 부호가 같아야 한다. x^k 는 k 가 홀수이면 $x = 0$ 을 지나며 부호가 바뀌므로, 부호가 일정하려면 k 가 짝수여야 한다. (그리고 $Q(0) > 0$, 충분히 작은 구간에서 $Q > 0$ 이어야 한다.) 따라서 k 는 짝수이다.

2–3. $k_1 \leq k_2$

$x \to 0^+$ 일 때 $P_{i(x)} \approx Q_{i(0)} x^{k_i}$ 이다. $0 < x < 1$ 에서 $P_1(x) > P_2(x) > 0$ 이면 $x \to 0^+$ 에서도 $P_1 \geq P_2 > 0$ 이 성립해야 한다. 만약 $k_1 > k_2$ 라면 $x \to 0^+$ 에서 x^{k_1} 가 x^{k_2} 보다 훨씬 빨리 0 으로 가므로 $P_1(x) < P_2(x)$ 가 되어 모순이다. 따라서

$$k_1 \leq k_2.$$

2–4. 그러한 P_1, P_2, P_3 은 존재하지 않는다

(나)에서 $-1 < x < 0$ 일 때 $P_2 > 0$ 이고 $P_1, P_3 < 0$ 이며, (가)에서 $0 < x < 1$ 일 때 세 다항식이 모두 양수이다. 각 $P_i = x^{k_i} Q_i$, $Q_{i(0)} \neq 0$ 이라 하자. $x = 0$ 을 사이에 두고 P_2 의 부호가 (양, 양)으로 유지되므로 k_2 는 짝수이고, P_1, P_3 는 (음, 양)으로 부호가 바뀌므로 k_1, k_3 는 홀수이며 $Q_1(0), Q_3(0) > 0$ 이다.

(가)에서 $0 < x < 1$ 일 때 $P_2 - P_1 > 0$ 이고 $-1 < x < 0$ 일 때도 $P_2 - P_1 > 0$ 이다. 즉 $P_2 - P_1$ 은 $0 < |x| < 1$ 에서 양수이므로, 2–2 에 의하여 $P_2 - P_1$ 의 최저차수는 짝수여야 한다. 그런데 k_2(짝수) $\neq k_1$(홀수)이므로 $P_2 - P_1$ 의 최저차 항은 $x^{\min(k_1, k_2)}$ 이고, 이 값이 짝수이려면 $k_2 < k_1$ 이어야 한다. 같은 논법을 $P_2 - P_3$ 에 적용하면 $k_2 < k_3$ 을 얻는다.

한편 (가)에서 $x \to 0^+$ 일 때 $0 < P_1 < P_2 < P_3$ 이므로 2–3 의 논법에 의해 $k_1 \leq k_2$ 이어야 한다. 이는 위에서 얻은 $k_2 < k_1$ 과 모순이다. 따라서 조건 (가), (나)를 동시에 만족시키는 P_1, P_2, P_3 은 존재하지 않는다.