
AMC 10

하프 모의고사

제 2 회

해설

정답표 • 출처 • 단계별 풀이

정답표와 출처

번호	정답	출처	영역
1	C	2010 AMC 10B 10번	대수
2	A	2012 AMC 10B 11번	경우의 수와 확률
3	C	2009 AMC 10A 12번	기하
4	D	2006 AMC 10B 14번	대수
5	A	2014 AMC 10B 15번	기하
6	C	2007 AMC 10B 16번	대수
7	A	2016 AMC 10A 17번	경우의 수와 확률
8	D	2019 AMC 10A 18번	정수론
9	A	2014 AMC 10A 19번	기하
10	C	2000 AMC 10 20번	대수

1 대수

출처: 2010 AMC 10B 10번

셀비는 비가 오지 않을 때는 시속 30마일로, 비가 올 때는 시속 20마일로 스쿠터를 운전한다. 오늘 셀비는 오전에는 맑은 날씨에, 저녁에는 비가 오는 가운데 운전하여, 모두 40분 동안 16마일을 갔다. 셀비가 비가 오는 가운데 운전한 시간은 몇 분인가?

- (A) 18 (B) 21 (C) 24 (D) 27 (E) 30

핵심 아이디어. 분 단위로 계산합니다. 맑은 날씨에 운전한 시간을 s 분이라 하면 비 오는 날씨에 운전한 시간은 $40 - s$ 분이고, 두 구간에서 간 거리의 합은 16마일이어야 합니다.

시속 30마일로로는 매분 $\frac{30}{60} = \frac{1}{2}$ 마일을, 시속 20마일로로는 매분 $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ 마일을 갑니다. 따라서

$$\frac{1}{2}s + \frac{1}{3}(40 - s) = 16.$$

양변에 6을 곱하면 $3s + 2(40 - s) = 96$ 이므로 $s + 80 = 96$ 이고 $s = 16$ 입니다.

셀비는 맑은 날씨에 16분 동안 운전했으므로, 비 오는 날씨에는 $40 - 16 = 24$ 분 동안 운전했습니다.

주의. s 를 구하면 맑은 날씨에 운전한 시간 16분이 나옵니다. 이 값은 선택지에 없지만, 실제로 묻는 것에 답해야 한다는 점을 일깨워 줍니다.

다른 풀이. 40분 내내 비가 왔다면 $40 \cdot \frac{1}{3} = \frac{40}{3}$ 마일을 가므로 $16 - \frac{40}{3} = \frac{8}{3}$ 마일이 모자랍니다. 맑은 날씨로 바꾸는 시간이 1분 늘 때마다 $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ 마일씩 더 가므로, 맑은 날씨에 운전한 시간은 $\frac{8}{3} \div \frac{1}{6} = 16$ 분이어야 하고, 남은 24분은 비 오는 날씨에 운전한 시간입니다.

정답: (C) 24

2 경우의 수와 확률

출처: 2012 AMC 10B 11번

한 디저트 셰프가 일요일부터 시작하는 한 주 동안 매일의 디저트를 준비한다. 각 날의 디저트는 케이크, 파이, 아이스크림, 푸딩 중 하나이다. 같은 디저트를 이틀 연속으로 낼 수는 없다. 생일이 있어서 금요일에는 반드시 케이크를 내야 한다. 한 주 동안의 디저트 메뉴로 가능한 것은 모두 몇 가지인가?

- (A) 729 (B) 972 (C) 1024 (D) 2187 (E) 2304

핵심 아이디어. 정해진 날부터 세기 시작합니다. 금요일은 케이크로 정해져 있으므로 금요일에서 바깥 쪽으로 세어 나갑니다. 이웃한 각 날은 이미 정해진 옆 날과만 달라야 하므로 고를 수 있는 디저트가 정확히 3가지입니다.

1단계. 금요일: 케이크, 1가지입니다.

2단계. 토요일은 금요일과 달라야 하므로 파이, 아이스크림, 푸딩 중 하나, 즉 3가지입니다.

3단계. 이제 거꾸로 갑니다. 목요일은 금요일의 케이크와 달라야 하므로 3가지입니다. 수요일은 목요일에 무엇이 나오든 그것과 달라야 하므로 3가지입니다. 같은 방식으로 화요일, 월요일, 일요일도 각각 3가지입니다. 즉 5일이 각각 3가지씩입니다.

4단계. 곱하면 $1 \cdot 3 \cdot 3^5 = 3^6 = 729$ 입니다.

이렇게 깔끔하게 셀 수 있는 것은 거꾸로 세었기 때문입니다. 일요일부터 순서대로 세면 목요일의 선택 가짓수가 수요일이 케이크였는지에 따라 달라지므로, 가짓수를 단순히 곱할 수 없습니다.

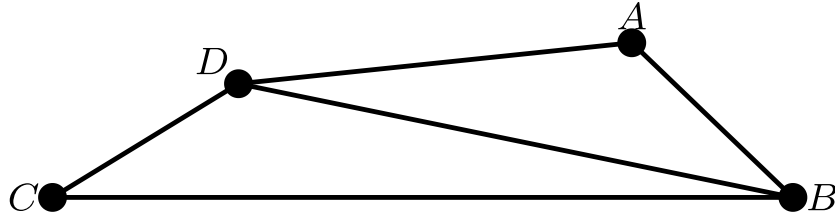
주의. 토요일도 금요일과 이웃한다는 사실을 잊고 토요일에 4가지 디저트를 모두 허용하면 $3^5 \cdot 4 = 972$ 가 되어 선택지 (B)를 고르게 됩니다. 순서대로 세는 방법(일요일 4가지, 월요일부터 목요일까지 각각 3가지, 금요일 1가지, 토요일 3가지)으로도 972가 나오지만, 이는 틀린 계산입니다. 목요일이 마침 케이크라면 금요일은 케이크일 수 없기 때문입니다.

정답: (A) 729

3 기하

출처: 2009 AMC 10A 12번

사각형 $ABCD$ 에서 $AB = 5$, $BC = 17$, $CD = 5$, $DA = 9$ 이고, BD 는 정수이다. BD 의 값은?



- (A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15

핵심 아이디어. 대각선 $\overline{BD}$ 는 두 삼각형 $\triangle BCD$ 와 $\triangle ABD$ 의 공통인 변입니다. 나머지 변의 길이는 모두 알려져 있으므로, 각 삼각형에서 삼각형의 결정 조건을 쓰면 BD 가 두 경계 사이로 좁혀집니다. 문제에서 이 값이 정수라고 했는데, 이는 경계 사이에 값이 하나만 남는다는 강한 힌트입니다.

1단계. $\triangle BCD$ 의 세 변은 $BC = 17$, $CD = 5$, BD 입니다. 삼각형에서 어느 두 변의 길이의 합도 나머지 한 변의 길이보다 크므로, 특히 $CD + BD > BC$, 즉 $5 + BD > 17$ 입니다. 따라서 $BD > 12$ 입니다.

2단계. $\triangle ABD$ 의 세 변은 $AB = 5$, $DA = 9$, BD 입니다. $5 + 9 > BD$ 여야 하므로 $BD < 14$ 입니다.

3단계. $12 < BD < 14$ 를 만족하는 정수는 $BD = 13$ 뿐입니다. (실제로 $\triangle BCD$ 에서 $13 < 5 + 17$ 이고 $\triangle ABD$ 에서 $13 > 9 - 5$ 이므로 두 삼각형이 모두 존재합니다.)

주의. 등호가 없는 부등식 대신 $5 + BD \geq 17$ 로 쓰면 $BD = 12$ 가 허용되어 선택지 (B)를 고르게 됩니다. 그러나 그 경우 $5 + 12 = 17$ 이 정확히 성립하므로 C, D, B 가 한 직선 위에 놓이게 되어 삼각형 BCD 가 존재하지 않습니다.

정답: (C) 13

4 대수

출처: 2006 AMC 10B 14번

a 와 b 를 방정식 $x^2 - mx + 2 = 0$ 의 두 근이라 하자. $a + \frac{1}{b}$ 과 $b + \frac{1}{a}$ 이 방정식 $x^2 - px + q = 0$ 의 두 근일 때, q 의 값은?

- (A) $\frac{5}{2}$ (B) $\frac{7}{2}$ (C) 4 (D) $\frac{9}{2}$ (E) 8

핵심 아이디어. a, b, m 자체는 전혀 필요하지 않습니다. $x^2 - px + q = 0$ 에서 상수항 q 는 두 근의 곱이고, $x^2 - mx + 2 = 0$ 에서 두 근의 곱이 $ab = 2$ 임을 압니다(근과 계수의 관계). 따라서 새 두 근의 곱을 전개하여 ab 로 나타내면 됩니다.

1단계. $x^2 - mx + 2 = 0$ 에서 두 근의 곱은 $ab = 2$ 입니다.

2단계. $x^2 - px + q = 0$ 의 두 근의 곱은 q 이므로 다음이 성립합니다.

$$q = \left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{1}{a}\right).$$

3단계. 항별로 전개합니다.

$$q = ab + a \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \cdot b + \frac{1}{ab} = ab + 1 + 1 + \frac{1}{ab}.$$

4단계. $ab = 2$ 를 대입합니다.

$$q = 2 + 2 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}.$$

m 이 완전히 사라졌다는 점에 주목합니다. 그래서 문제에서 그 값을 알려 줄 필요가 없었던 것입니다.

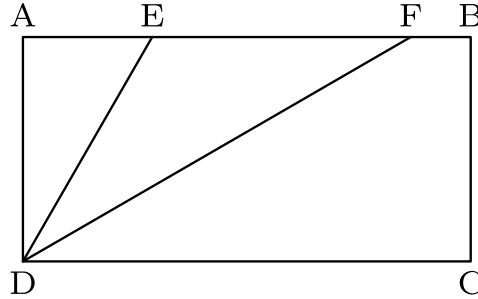
주의. “첫째 항끼리”와 “마지막 항끼리”만 곱하면 $ab + \frac{1}{ab} = \frac{5}{2}$ 가 되어 선택지 (A)를 고르게 됩니다. 두 교차항 $a \cdot \frac{1}{a}$ 과 $\frac{1}{b} \cdot b$ 는 각각 1이므로 반드시 포함해야 합니다.

정답: (D) $\frac{9}{2}$

5 기하

출처: 2014 AMC 10B 15번

직사각형 $ABCD$ 에서 $DC = 2 \cdot CB$ 이고, 점 E 와 F 는 $\overline{AB}$ 위에 있으며 그림과 같이 $\overline{ED}$ 와 $\overline{FD}$ 가 $\angle ADC$ 를 삼등분한다. 직사각형 $ABCD$ 의 넓이에 대한 $\triangle DEF$ 의 넓이의 비는?



- (A) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ (B) $\frac{\sqrt{6}}{8}$ (C) $\frac{3\sqrt{3}}{16}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

핵심 아이디어. 직각을 삼등분하면 30° 인 각이 생기고, 30° - 60° - 90° 삼각형은 변의 길이의 비가 알려져 있습니다. 삼각형 DEF 는 밑변 $\overline{EF}$ 가 $\overline{AB}$ 위에 있고 높이가 AD 와 같으므로, 길이 AE 와 AF 만 구하면 됩니다.

1단계. $AD = CB = 1$ 이라 합시다. 그러면 $DC = AB = 2$ 이고 직사각형의 넓이는 2입니다.

2단계. $\angle ADC = 90^\circ$ 가 30° 인 세 각으로 나뉘므로 $\angle ADE = 30^\circ$, $\angle ADF = 60^\circ$ 입니다.

3단계. 삼각형 DAE 는 A 에서 직각이고 $\angle ADE = 30^\circ$ 입니다. 30° 인 각의 대변 AE 의 길이는 직각을 낀 다른 변 AD 의 길이의 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 배이므로 $AE = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 입니다.

삼각형 DAF 는 A 에서 직각이고 $\angle ADF = 60^\circ$ 이므로 AF 는 AD 의 $\sqrt{3}$ 배, 즉 $AF = \sqrt{3}$ 입니다. (이 값은 $AB = 2$ 보다 작으므로 F 는 실제로 $\overline{AB}$ 위에 있습니다.)

4단계. $EF = AF - AE = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 입니다. D 에서 직선 AB 까지의 거리, 즉 $\triangle DEF$ 의 높이는 $AD = 1$ 이므로 다음과 같습니다.

$$[DEF] = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

5단계. 구하는 비는 $\frac{\sqrt{3}/3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ 입니다.

정답: (A) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

6 대수

출처: 2007 AMC 10B 16번

한 교사가 어느 반 학생들에게 시험을 보게 했는데, 이 반 학생의 10%는 2학년이고 90%는 3학년이다. 이 시험의 평균 점수는 84점이었다. 2학년 학생들은 모두 같은 점수를 받았고, 3학년 학생들의 평균 점수는 83점이었다. 2학년 학생 한 명이 받은 점수는 몇 점인가?

- (A) 85 (B) 88 (C) 93 (D) 94 (E) 98

핵심 아이디어. 백분율만 주어졌으므로 반의 인원을 편리하게 정합시다. 학생이 10명이면 2학년은 정확히 1명, 3학년은 9명이고, 평균에 학생 수를 곱하면 총점이 됩니다.

1단계. 학생이 10명인 반을 생각합시다. 2학년이 1명, 3학년이 9명입니다. 반 전체의 평균이 84점이므로 열 명의 점수를 모두 더하면 $10 \cdot 84 = 840$ 점입니다.

2단계. 3학년의 평균은 83점이므로 아홉 명의 점수의 합은 $9 \cdot 83 = 747$ 점입니다.

3단계. 2학년 학생의 점수는 나머지인 $840 - 747 = 93$ 점입니다.

반의 인원이 달라도 답은 같습니다. 2학년은 모두 같은 점수를 받으므로, 학생이 $10n$ 명이면 $10n \cdot 84 - 9n \cdot 83 = 93n$ 점을 2학년 n 명이 똑같이 나누어 갖기 때문입니다.

주의. 두 집단의 평균을 그대로 평균 내어 $\frac{83+J}{2} = 84$ 로 놓으면 $J = 85$ 가 되어 선택지 (A)를 고르게 됩니다. 이는 2학년과 3학년의 인원이 같을 때에만 맞습니다. 여기서는 3학년이 2학년보다 9 대 1로 많으므로 반 평균을 훨씬 더 강하게 끌어당깁니다.

다른 풀이. 반 평균 84점을 기준으로 균형을 생각해 봅시다. 9명의 3학년은 (평균적으로) 각각 1점씩 낮으므로 모두 합하여 9점 낮습니다. 2학년 한 명이 이 9점을 메워야 하므로 2학년의 점수는 $84 + 9 = 93$ 점입니다.

정답: (C) 93

7 경우의 수와 확률

출처: 2016 AMC 10A 17번

N 을 5의 양의 배수라 하자. 빨간 공 한 개와 초록 공 N 개를 임의의 순서로 일렬로 늘어놓는다. 빨간 공을 기준으로 같은 쪽에 초록 공의 $\frac{3}{5}$ 이상이 있을 확률을 $P(N)$ 이라 하자. $P(5) = 1$ 이고, N 이 커질수록 $P(N)$ 은 $\frac{4}{5}$ 에 가까워짐을 확인할 수 있다. $P(N) < \frac{321}{400}$ 을 만족하는 N 의 최솟값의 각 자리 숫자의 합은?

- (A) 12 (B) 14 (C) 16 (D) 18 (E) 20

핵심 아이디어. 중요한 것은 오직 **빨간 공이 놓이는 위치**뿐입니다. 빨간 공의 왼쪽에 초록 공이 k 개 있으면 오른쪽에는 $N - k$ 개가 있습니다. 임의의 배열에서 $k = 0, 1, \dots, N$ 의 모든 값이 일어날 가능성이 같으므로, $P(N)$ 은 $N + 1$ 개의 값 중 조건을 만족하는 k 의 개수를 세는 것에 불과합니다. 주어진 $P(5) = 1$ 과 극한값 $\frac{4}{5}$ 로 공식을 계산할 수 있습니다.

1단계. $N + 1$ 개의 k 값이 일어날 가능성이 같은 이유는 무엇일까요? 빨간 공은 일렬로 놓인 $N + 1$ 개의 자리 중 어느 자리에나 같은 가능성으로 놓이고, 빨간 공이 $k + 1$ 번째 자리에 있으면 그 왼쪽에는 정확히 k 개의 초록 공이 있습니다.

2단계. 조건이 성립하지 않는 것은 **양쪽** 모두 초록 공이 $\frac{3}{5}N$ 개보다 적을 때뿐입니다. 즉 $k < \frac{3}{5}N$ 이고 $N - k < \frac{3}{5}N$, 다시 말해

$$\frac{2}{5}N < k < \frac{3}{5}N.$$

N 은 5의 배수이므로 양 끝은 정수이고, 조건이 성립하지 않는 값은 $k = \frac{2}{5}N + 1, \dots, \frac{3}{5}N - 1$ 입니다. 이는 $\frac{1}{5}N - 1$ 개입니다.

3단계. 따라서 다음과 같습니다.

$$P(N) = 1 - \frac{\frac{N}{5} - 1}{N + 1} = \frac{\frac{4}{5}N + 2}{N + 1} = \frac{4N + 10}{5N + 5}.$$

계산해 봅시다. $P(5) = \frac{30}{30} = 1$ 이고, N 이 아주 크면 이 값은 $\frac{4N}{5N} = \frac{4}{5}$ 에 가깝습니다. 둘 다 문제에 주어진 내용과 일치합니다.

4단계. $\frac{4N + 10}{5N + 5} < \frac{321}{400}$ 을 풀니다. 두 분모가 모두 양수이므로 양변에 두 분모를 곱하면

$$400(4N + 10) < 321(5N + 5) \iff 1600N + 4000 < 1605N + 1605 \iff 2395 < 5N.$$

따라서 $N > 479$ 입니다. 479보다 큰 5의 배수 중 가장 작은 것은 $N = 480$ 이고, 각 자리 숫자의 합은 $4 + 8 + 0 = 12$ 입니다.

(실제로 $P(475) = \frac{191}{238} \approx 0.80252$ 는 $\frac{321}{400} = 0.8025$ 보다 조금 크고, $P(480) = \frac{386}{481} \approx 0.80249$ 는 그보다 작습니다.)

주의. $5N = 2395$ 에서 멈추고 $N = 479$ 라고 답하면 각 자리 숫자의 합이 $4 + 7 + 9 = 20$ 이 되어 선택지 (E)를 고르게 됩니다. 그러나 이 부등식은 등호를 포함하지 않으며, 479는 5의 배수도 아닙니다.

정답: (A) 12

8 정수론

출처: 2019 AMC 10A 18번

어떤 양의 정수 k 에 대하여, (십진법으로 나타낸) 분수 $\frac{7}{51}$ 을 k 진법의 순환소수로 나타낸 것은 다음과 같다.

$$0.\overline{23}_k = 0.232323\ldots_k.$$

k 의 값은?

- (A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 17

핵심 아이디어. 순환소수는 한 주기만큼 자리를 옮긴 뒤 빼서 분수로 바꿉니다. 이 방법은 어떤 진법에 서도 통합니다. 여기서는 주기가 두 자리이므로 k^2 을 곱합니다.

1단계. $x = 0.\overline{23}_k$ 라 합시다. k^2 을 곱하면 각 자리 숫자가 왼쪽으로 두 자리씩 옮겨 갑니다.

$$k^2x = 23.\overline{23}_k = 23_k + x.$$

k 진법에서 $23_k = 2k + 3$ 입니다. 양변에서 x 를 빼면 $(k^2 - 1)x = 2k + 3$ 이므로 다음을 얻습니다.

$$x = \frac{2k + 3}{k^2 - 1}.$$

2단계. 이 값이 $\frac{7}{51}$ 과 같다고 놓고 양변에 두 분모를 곱하면

$$51(2k + 3) = 7(k^2 - 1) \iff 7k^2 - 102k - 160 = 0.$$

3단계. 인수분해하면 $7k^2 - 102k - 160 = (k - 16)(7k + 10)$ 입니다. (확인: $-112k + 10k = -102k$ 이고 $-16 \cdot 10 = -160$ 입니다.) k 는 양의 정수이므로 $k = 16$ 입니다.

검산하면 $\frac{2 \cdot 16 + 3}{16^2 - 1} = \frac{35}{255} = \frac{7}{51}$ 입니다.

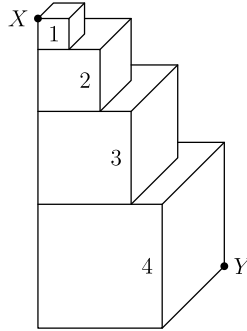
다른 풀이. 선택지를 이용합니다. $51(2k + 3) = 7(k^2 - 1)$ 에서 소수 17(51의 약수)은 $7(k^2 - 1)$ 을 나누므로 $k^2 - 1 = (k - 1)(k + 1)$ 을 나눕니다. 13부터 17까지 중에서 $k - 1$ 또는 $k + 1$ 이 17로 나누어떨어지는 것은 $k = 16$ 뿐이고, 위의 검산이 이를 확인해 줍니다.

정답: (D) 16

9 기하

출처: 2014 AMC 10A 19번

모서리의 길이가 각각 1, 2, 3, 4인 정육면체 네 개가 그림과 같이 쌓여 있다. $\overline{XY}$ 중 모서리의 길이가 3인 정육면체 안에 들어 있는 부분의 길이는?



- (A) $\frac{3\sqrt{33}}{5}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) $\frac{2\sqrt{33}}{3}$ (D) 4 (E) $3\sqrt{2}$

핵심 아이디어. 쌓인 정육면체들을 좌표로 나타냅니다. 선분을 따라가면 모든 좌표가 일정한 비율로 변하므로, $\overline{XY}$ 중 모서리가 3인 정육면체 안에 있는 부분의 비율은 그 정육면체가 차지하는 **높이**의 비율과 같습니다. 단, 그 높이 구간에서 선분이 실제로 정육면체 안에 머물러야 하며, 이것은 따로 확인해야 합니다.

1단계. 정육면체들에 공통인 앞쪽 왼편의 수직 모서리를 z 축 위에 놓고, 바닥을 $z = 0$ 으로 둡니다. 모서리의 길이가 s 인 정육면체는 $0 \leq x \leq s$, $0 \leq y \leq s$ 인 영역을 차지하고, 각 정육면체가 쌓인 높이는 다음과 같습니다.

모서리 4: $0 \leq z \leq 4$, 모서리 3: $4 \leq z \leq 7$, 모서리 2: $7 \leq z \leq 9$, 모서리 1: $9 \leq z \leq 10$.

그러면 $X = (0, 0, 10)$ 은 가장 작은 정육면체의 위쪽 앞 왼편 꼭짓점이고, $Y = (4, 4, 0)$ 은 가장 큰 정육면체의 아래쪽 뒤 오른편 꼭짓점입니다.

2단계. $XY = \sqrt{4^2 + 4^2 + 10^2} = \sqrt{132} = 2\sqrt{33}$ 입니다.

3단계. X 에서 Y 로 가는 동안 높이는 10에서 0까지 일정한 비율로 줄어듭니다. 높이가 7인 곳은 전체의 $\frac{3}{10}$ 만큼 간 지점으로 점 $(1.2, 1.2, 7)$ 이고, 높이가 4인 곳은 $\frac{6}{10}$ 만큼 간 지점으로 점 $(2.4, 2.4, 4)$ 입니다. 두 점 모두 3×3 정사각형 $0 \leq x, y \leq 3$ 안에 있으므로, 선분은 정육면체의 윗면으로 들어가서 아랫면으로 나오며 그 사이에서는 정육면체 안에 머물러 있습니다.

4단계. 따라서 모서리가 3인 정육면체 안에 있는 부분은 $\overline{XY}$ 의 $\frac{6}{10} - \frac{3}{10} = \frac{3}{10}$ 입니다.

$$\frac{3}{10} \cdot 2\sqrt{33} = \frac{3\sqrt{33}}{5}.$$

주의. 3단계는 형식적인 절차가 아닙니다. 선분이 정육면체의 옆면으로 빠져나간다면, 안에 있는 부분은 XY 의 $\frac{3}{10}$ 보다 짧아집니다. 또한 안에 있는 부분은 정육면체의 대각선이 아닙니다. 대각선이라면 길이가 $3\sqrt{3}$ 인데, 이는 선택지에 없습니다.

정답: (A) $\frac{3\sqrt{33}}{5}$

10 대수

출처: 2000 AMC 10 20번

A, M, C 가 $A + M + C = 10$ 을 만족하는 음이 아닌 정수일 때, 다음 식의 최댓값은

$$A \cdot M \cdot C + A \cdot M + M \cdot C + C \cdot A?$$

- (A) 49 (B) 59 (C) 69 (D) 79 (E) 89

핵심 아이디어. 이 식에는 세 변수의 곱과 두 변수끼리의 곱이 모두 들어 있습니다. 이는 정확히 $(A + 1)(M + 1)(C + 1)$ 을 전개할 때 나타나는 항들입니다. 빠진 부분을 더하면, 문제는 합이 일정한 세 수의 곱을 최대화하는 문제로 바뀝니다.

1단계. 전개하면 다음과 같습니다.

$$(A + 1)(M + 1)(C + 1) = AMC + (AM + MC + CA) + (A + M + C) + 1.$$

$A + M + C = 10$ 이므로

$$AMC + AM + MC + CA = (A + 1)(M + 1)(C + 1) - 11.$$

2단계. $x = A + 1, y = M + 1, z = C + 1$ 이라 합시다. 이들은 $x + y + z = 13$ 을 만족하는 양의 정수이고, xyz 를 가능한 한 크게 만들어야 합니다.

3단계: 최댓값은 많아야 80. 두 수의 차가 2 이상이라고, 예를 들어 $x \geq y + 2$ 라고 가정합시다. 두 수를 $x - 1$ 과 $y + 1$ 로 바꾸어도 합은 그대로 13이고, 다음이 성립합니다.

$$(x - 1)(y + 1) = xy + (x - y - 1) > xy,$$

왜냐하면 $x - y - 1 \geq 1$ 이기 때문입니다. 세 수의 순서쌍은 유한개뿐이므로 곱이 가장 큰 경우가 존재하고, 위의 논증에 의해 그때는 차가 2 이상인 두 수가 있을 수 없습니다. 즉 세 수는 서로의 차이가 모두 1 이하입니다. 서로의 차이가 1 이하이고 합이 13인 세 정수는 4, 4, 5뿐이므로, 가능한 가장 큰 곱은 $4 \cdot 4 \cdot 5 = 80$ 입니다.

4단계: 80은 실제로 가능. $x, y, z = 4, 4, 5$ 는 $A, M, C = 3, 3, 4$ 를 뜻합니다. 직접 확인하면 $3 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 36 + 9 + 12 + 12 = 69$ 입니다.

따라서 최댓값은 $80 - 11 = 69$ 입니다.

주의. 전개할 때 일차항 $A + M + C$ 를 빠뜨리고 식을 $(A + 1)(M + 1)(C + 1) - 1$ 로 쓰면 $80 - 1 = 79$ 가 되어 선택지 (D)를 고르게 됩니다.

정답: (C) 69