
AMC 10

하프 모의고사

제 3 회

해설

정답표 • 출처 • 단계별 풀이

정답표와 출처

번호	정답	출처	영역
1	D	2012 AMC 10B 10번	정수론
2	D	2008 AMC 10A 11번	대수
3	C	2010 AMC 10A 12번	기하
4	C	2015 AMC 10A 13번	경우의 수와 확률
5	D	2015 AMC 10B 14번	대수
6	A	2011 AMC 10B 16번	기하
7	C	2011 AMC 10A 17번	대수
8	B	2007 AMC 10B 18번	기하
9	D	2001 AMC 10 19번	경우의 수와 확률
10	D	2007 AMC 10A 20번	대수

1 정수론

출처: 2012 AMC 10B 10번

다음 등식을 만족시키는 양의 정수의 순서쌍 (M, N) 은 몇 개인가

$$\frac{M}{6} = \frac{6}{N}?$$

- (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

핵심 아이디어. 양변을 엇갈려 곱하면 등식이 곱의 꼴 $MN = 36$ 으로 바뀝니다. 그러면 각 순서쌍은 36을 두 인수로 나누는 방법 하나에 해당합니다.

$\frac{M}{6} = \frac{6}{N}$ 의 양변을 엇갈려 곱하면 $MN = 36$ 입니다. M 을 36의 양의 약수 중 하나로 정하면 $N = \frac{36}{M}$ 은 저절로 정해지고, 양의 정수가 됩니다. 따라서 36의 약수의 개수만 세면 됩니다.

1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

M 을 고르는 방법이 9가지이므로, $(1, 36)$ 부터 $(36, 1)$ 까지 순서쌍은 9개입니다.

검산해 보면, $36 = 2^2 \cdot 3^2$ 이므로 약수의 개수는 $(2 + 1)(2 + 1) = 9$ 입니다.

주의. 인수의 쌍 $(1, 36), (2, 18), (3, 12), (4, 9)$ 를 나열한 뒤 순서를 생각해 두 배 하면 8, 즉 선택지 (C)가 나옵니다. 순서쌍 $(6, 6)$ 은 뒤집어도 자기 자신이므로 한 번 더 세어야 합니다.

정답: (D) 9

2 대수

출처: 2008 AMC 10A 11번

스티브와 리로이가 해안에서 1마일 떨어진 곳에서 낚시를 하던 중 보트에 구멍이 나서, 물이 매분 10갤런의 일정한 속도로 들어온다. 보트는 물이 30갤런보다 많이 들어오면 가라앉는다. 스티브는 시속 4마일의 일정한 속력으로 해안을 향해 노를 젓기 시작하고, 그동안 리로이는 보트의 물을 퍼낸다. 두 사람이 가라앉지 않고 해안에 도착하기 위해 리로이가 물을 퍼내야 하는 가장 느린 속도는 매분 몇 갤런인가?

- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 10

핵심 아이디어. 먼저 해안까지 가는 데 걸리는 시간을 구하면, 그 시간 동안 보트에 남는 물은 많아야 30갤런이어야 합니다. 물이 새는 속도는 매분 갤런 단위인데 속력은 시속(시간당) 마일 단위이므로, 무엇보다 먼저 이동 시간을 분으로 바꿉니다.

1단계. 시속 4마일로 1마일을 가는 데는 $\frac{1}{4}$ 시간, 즉 $\frac{1}{4} \cdot 60 = 15$ 분이 걸립니다.

2단계. 이 15분 동안 구멍으로 $15 \cdot 10 = 150$ 갤런의 물이 들어옵니다.

3단계. 보트에 담긴 물이 30갤런을 넘지 않는 한 보트는 버티므로, 리로이는 15분 동안 적어도 $150 - 30 = 120$ 갤런을 퍼내야 합니다. 따라서 필요한 속도는 다음과 같습니다.

$$\frac{120}{15} = 8 \text{ 갤런/분.}$$

검산: 8의 속도로 퍼내면 물은 매분 $10 - 8 = 2$ 갤런씩 늘어나므로, 해안에 닿을 때 $2 \cdot 15 = 30$ 갤런입니다. 이는 정확히 한계값이고, 30갤런보다 **많지**는 않습니다. 이보다 조금이라도 느리면 순증가량 $10 - r$ 에 15를 곱한 값이 30을 넘습니다.

주의. 보트가 30갤런까지 버틸 수 있다는 것을 잊고 들어오는 물을 **전부** 퍼낸다고 하면 10, 즉 선택지 (E)가 나옵니다. 이 속도로도 해안에 갈 수는 있지만 가장 느린 속도는 아닙니다.

정답: (D) 8

3 기하

출처: 2010 AMC 10A 12번

로건은 자기가 사는 마을의 축소 모형을 만들고 있다. 이 도시의 급수탑은 높이가 40미터이고, 꼭대기 부분은 물 100,000리터를 담는 구이다. 로건이 만든 모형 급수탑은 0.1리터를 담는다. 로건은 모형 급수탑의 높이를 몇 미터로 만들어야 하는가?

- (A) 0.04 (B) $\frac{0.4}{\pi}$ (C) 0.4 (D) $\frac{4}{\pi}$ (E) 4

핵심 아이디어. 축소 모형에서는 모든 길이가 같은 비율 k 로 줄어들므로, 모든 부피는 k^3 의 비율로 줄어듭니다. 부피가 주어지고 높이를 묻고 있으니, 세제곱근을 구하면 됩니다.

1단계. 두 부피를 비교합니다.

$$\frac{100,000}{0.1} = 1,000,000.$$

실제 구는 모형 구보다 백만 배 많은 물을 담습니다.

2단계. 부피는 길이의 세제곱에 비례합니다. 실제 급수탑의 높이가 모형의 k 배라면 $k^3 = 1,000,000 = 100^3$ 이므로 $k = 100$ 입니다.

3단계. 따라서 모형의 높이는 다음과 같습니다.

$$\frac{40}{100} = 0.4 \text{미터.}$$

구의 부피 공식 $\frac{4}{3}\pi r^3$ 은 전혀 필요하지 않았다는 점에 주목합시다. π 는 두 급수탑에 똑같이 들어 있어 비에서 약분되므로, π 가 들어 있는 선택지는 함정입니다.

주의. 부피의 비를 넓이의 비처럼 생각해 제곱근을 구하면 $k = 1000$ 이 되어 높이가 $\frac{40}{1000} = 0.04$, 즉 선택지 (A)가 나옵니다. 넓이는 k^2 의 비율로, 부피는 k^3 의 비율로 변합니다.

정답: (C) 0.4

4 경우의 수와 확률

출처: 2015 AMC 10A 13번

클로디아는 동전 12개를 가지고 있고, 각 동전은 5센트짜리이거나 10센트짜리이다. 이 동전 중 한 개 이상을 골라 만들 수 있는 서로 다른 금액은 정확히 17가지이다. 클로디아가 가진 10센트짜리 동전은 몇 개인가?

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

핵심 아이디어. 모든 금액은 5센트의 배수이므로, 5의 배수 중 어떤 금액을 만들 수 있는지 따져 보시다. 5센트짜리 동전이 적어도 하나 있으면 모든 틈을 메울 수 있으므로, 금액의 가짓수는 그냥 전체 금액을 5로 나눈 값입니다.

1단계. 클로디아가 5센트짜리 동전 x 개와 10센트짜리 동전 $12 - x$ 개를 가졌다고 합시다. $x = 0$ 이면 만들 수 있는 금액은 10, 20, ..., 120으로 12가지뿐이고 17가지가 아닙니다. 따라서 $x \geq 1$ 입니다.

2단계. $x \geq 1$ 이면 5센트부터 전체 금액까지 5의 배수는 모두 만들 수 있습니다. 전체 금액 이하인 $5k$ 센트를 만들려면 10센트짜리를 되도록 많이 쓰고 나머지를 5센트짜리로 채웁니다. 10센트짜리가 모자라지 않으면 나머지는 5센트짜리 한 개 이하입니다. 10센트짜리를 다 쓰게 되면 나머지는 10센트짜리 전부를 넘는 금액인데, 이는 많아야 5센트짜리 x 개의 금액입니다.

3단계. 전체 금액은

$$5x + 10(12 - x) = 120 - 5x \text{ 센트이고,}$$

만들 수 있는 금액은 5, 10, ..., $120 - 5x$ 로 $\frac{120 - 5x}{5} = 24 - x$ 가지입니다.

4단계. $24 - x = 17$ 로 놓으면 5센트짜리 동전이 $x = 7$ 개이므로, 10센트짜리 동전은 $12 - 7 = 5$ 개입니다.

검산: 5센트짜리 7개와 10센트짜리 5개의 합은 $35 + 50 = 85$ 센트이고, 5, 10, ..., 85는 17가지입니다.

주의. x 를 구하고 거기서 멈추면 7, 즉 선택지 (E)를 고르게 됩니다. 하지만 x 는 5센트짜리 동전의 개수이고, 문제는 10센트짜리 동전의 개수를 묻습니다.

정답: (C) 5

5 대수

출처: 2015 AMC 10B 14번

a, b, c 는 서로 다른 한 자리 수이다. 다음 방정식의 근의 합의 최댓값은 얼마인가

$$(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) = 0?$$

- (A) 15 (B) 15.5 (C) 16 (D) 16.5 (E) 17

핵심 아이디어. 두 곱에 모두 인수 $(x - b)$ 가 들어 있으니 이것으로 묶으면 근이 바로 보입니다. 그러면 근의 합은 a, b, c 에 가중치를 준 합이 되고, 가중치가 가장 큰 자리에 가장 큰 숫자를 넣으면 됩니다.

1단계. $(x - b)$ 로 묶습니다.

$$(x - b)[(x - a) + (x - c)] = (x - b)(2x - a - c) = 0.$$

근은 $x = b$ 와 $x = \frac{a+c}{2}$ 입니다.

2단계. 두 근의 합은 다음과 같습니다.

$$S = b + \frac{a + c}{2} = \frac{a + 2b + c}{2}.$$

숫자 b 는 두 번, a 와 c 는 한 번씩 더해집니다.

3단계. 상한. $a + 2b + c = (a + b + c) + b$ 로 씁니다. 서로 다른 세 숫자의 합은 많아야 $9 + 8 + 7 = 24$ 이고 $b \leq 9$ 이므로, $a + 2b + c \leq 33$ 이고 $S \leq 16.5$ 입니다.

4단계. 이 값은 실제로 나옵니다. $b = 9, a = 7, c = 8$ 로 잡으면 방정식은 $(x - 9)(2x - 15) = 0$ 이 되고, 근은 9와 7.5이며 그 합은 16.5입니다.

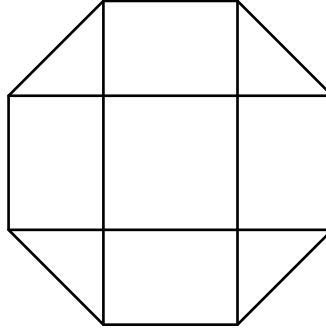
주의. 9를 b 가 아니라 a 나 c 에 넣으면, 예를 들어 $a = 9, b = 8, c = 7$ 이면 $8 + \frac{9+7}{2} = 16$, 즉 선택지 (C)가 나옵니다. 인수분해한 꼴을 보면 b 의 가치가 두 배임을 알 수 있습니다.

정답: (D) 16.5

6 기하

출처: 2011 AMC 10B 16번

그림과 같이 다트판은 정팔각형이고 여러 영역으로 나뉘어 있다. 다트판에 던진 다트가 판 위의 어느 곳에 맞을 가능성도 모두 같다고 하자. 다트가 가운데 정사각형 안에 맞을 확률은?



- (A) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (E) $2-\sqrt{2}$

핵심 아이디어. “어느 곳에 맞을 가능성도 모두 같다”는 것은 확률이 넓이의 비, 즉 가운데 정사각형의 넓이를 팔각형 전체의 넓이로 나눈 값이라는 뜻입니다. 비만 물으므로 편한 크기를 잡읍시다. 팔각형의 한 변의 길이를 1로 둡니다.

1단계. 두 세로선은 팔각형의 윗변 양 끝에서 시작하므로, 가운데 정사각형의 폭은 그 변의 길이와 정확히 같습니다. 팔각형의 한 변이 1이므로 가운데 정사각형의 한 변은 1, 넓이는 1입니다.

2단계. 네 귀퉁이 조각은 각각 팔각형의 한 변(길이 1)을 빗변으로 하는 직각이등변삼각형입니다. 따라서 직각을 낀 두 변의 길이는 $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이고, 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4}$ 입니다. 네 귀퉁이를 합한 넓이는 1입니다.

3단계. 네 직사각형은 각각 한 변이 1(가운데 정사각형과 공유하는 변)이고, 다른 한 변은 삼각형의 직각을 낀 변과 같은 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 입니다. 네 개를 합한 넓이는 $4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ 입니다.

4단계. 팔각형의 넓이는 $1 + 1 + 2\sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2}$ 이므로, 구하는 확률은 다음과 같습니다.

$$\frac{1}{2 + 2\sqrt{2}} = \frac{1}{2(\sqrt{2} + 1)} \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2(2 - 1)} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}.$$

이 값은 약 0.207입니다.

주의. 팔각형을 둘러싼 정사각형의 넓이 $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ 로 나누면, 잘려 나간 네 귀퉁이를 빼는 것을 잊은 셈이 되어 $3 - 2\sqrt{2} \approx 0.17$ 이 나옵니다. 이 값은 선택지에 없습니다.

정답: (A) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

7 대수

출처: 2011 AMC 10A 17번

여덟 개의 항으로 이루어진 수열 A, B, C, D, E, F, G, H 에서 C 의 값은 5이고, 연속한 세 항의 합은 항상 30이다. $A + H$ 의 값은?

- (A) 17 (B) 18 (C) 25 (D) 26 (E) 43

핵심 아이디어. 겹치는 두 합을 비교해 봅시다. $A + B + C = 30$ 과 $B + C + D = 30$ 은 $B + C$ 를 공유하므로 $D = A$ 입니다. 같은 비교를 끝까지 하면 수열이 세 항마다 반복된다는 것을 알 수 있고, 이제 H 가 어디에 오는지만 보면 됩니다.

1단계. 연속한 두 합을 뺍니다. $(B + C + D) - (A + B + C) = 30 - 30$ 에서 $D = A$ 를 얻습니다. 같은 방법으로 $E = B, F = C, G = D, H = E$ 입니다.

2단계. 따라서 수열은 주기 3으로 반복됩니다.

$$A, B, 5, A, B, 5, A, B,$$

여기서 $C = 5$ 와 $F = C = 5$ 를 이용했습니다. 특히 $H = B$ 입니다.

3단계. $A + B + C = 30$ 에서 $A + B = 30 - 5 = 25$ 이므로 다음을 얻습니다.

$$A + H = A + B = 25.$$

A 의 값 자체는 정해지지 않는다는 점에 주의합니다. $B = 25 - A$ 로 두면 어떤 A 라도 조건을 만족하지만, 합 $A + H$ 는 항상 25입니다.

다른 풀이. 세 항의 합 다섯 개를 거의 모든 항이 지워지도록 결합합니다.

$$(A + B + C) + (C + D + E) + (F + G + H) - (B + C + D) - (E + F + G) = A + C + H.$$

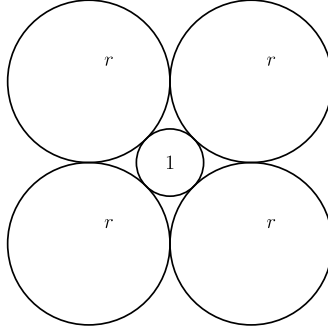
좌변은 $30 + 30 + 30 - 30 - 30 = 30$ 이므로 $A + C + H = 30$ 이고, $A + H = 30 - 5 = 25$ 입니다.

정답: (C) 25

8 기하

출처: 2007 AMC 10B 18번

그림과 같이 반지름이 1인 원을 반지름이 r 인 원 4개가 둘러싸고 있다. r 의 값은?



- (A) $\sqrt{2}$ (B) $1 + \sqrt{2}$ (C) $\sqrt{6}$ (D) 3 (E) $2 + \sqrt{2}$

핵심 아이디어. 두 원이 접하면 두 중심 사이의 거리는 반지름의 합입니다. 바깥쪽 네 원의 중심을 이으면 정사각형이 되고, 작은 원의 중심은 그 정사각형의 한가운데에 있습니다. 따라서 하나의 거리를 두 가지 방법으로 구합니다.

1단계. 이웃한 바깥 원끼리 접하므로 두 중심 사이의 거리는 $r + r = 2r$ 입니다. 바깥쪽 네 원의 중심은 한 변의 길이가 $2r$ 인 정사각형을 이룹니다.

2단계. 작은 원은 바깥 원 네 개에 모두 접하므로, 그 중심은 네 꼭짓점에서 같은 거리에 있습니다. 즉 정사각형의 중심입니다. 정사각형의 중심에서 꼭짓점까지의 거리는 대각선의 절반이므로 다음과 같습니다.

$$\frac{2r\sqrt{2}}{2} = r\sqrt{2}.$$

3단계. 작은 원은 각 바깥 원과 접하므로, 같은 거리가 $1 + r$ 이기도 합니다. 두 식을 같다고 놓으면 다음을 얻습니다.

$$r\sqrt{2} = r + 1 \implies r(\sqrt{2} - 1) = 1 \implies r = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}.$$

4단계. 분모를 유리화합니다. $\frac{1}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1} = 1 + \sqrt{2}$ 입니다.

검산: $r = 1 + \sqrt{2}$ 이면 $r\sqrt{2} = \sqrt{2} + 2$ 이고 $r + 1 = 2 + \sqrt{2}$ 입니다. 두 값이 일치합니다.

정답: (B) $1 + \sqrt{2}$

9 경우의 수와 확률

출처: 2001 AMC 10 19번

패트는 글레이즈드, 초콜릿, 슈거파우더의 세 종류 도넛이 충분히 많이 있는 곳에서 도넛 네 개를 사려고 한다. 고를 수 있는 서로 다른 경우의 수는?

- (A) 6 (B) 9 (C) 12 (D) 15 (E) 18

핵심 아이디어. 순서는 상관없고 재고도 떨어지지 않으므로, 한 가지 선택은 각 종류를 몇 개씩 고르는 나로만 정해집니다. 따라서 $g + c + p = 4$ 의 음이 아닌 정수해의 개수를 세면 되고, 이것이 바로 “별과 막대” 방법으로 세는 것입니다.

1단계. 글레이즈드, 초콜릿, 슈거파우더 도넛의 개수를 각각 g, c, p 라 합시다. 각 선택은 다음 식의 해 하나에 대응합니다.

$$g + c + p = 4, \quad g, c, p \geq 0.$$

2단계. 도넛 네 개를 별로 나타내고, 막대 두 개로 세 묶음(글레이즈드 | 초콜릿 | 슈거파우더)으로 나눕니다. 예를 들어 $**||**$ 는 글레이즈드 2개, 초콜릿 0개, 슈거파우더 2개를 뜻합니다.

3단계. 6개의 자리에 별 4개와 막대 2개를 한 줄로 배열하는 방법 하나하나가 선택 하나에 정확히 대응하고, 그 역도 성립합니다. 막대를 놓을 2자리를 고르는 방법의 수는 다음과 같습니다.

$$\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15.$$

다른 풀이. 선택의 모양에 따라 셉니다. 네 개가 모두 같은 경우($4+0+0$): 3가지. 세 개와 한 개($3+1+0$): $3 \cdot 2 = 6$ 가지. 두 개와 두 개($2+2+0$): 3가지. 두 개, 한 개, 한 개($2+1+1$): 3가지. 모두 $3 + 6 + 3 + 3 = 15$ 가지입니다.

주의. 경우를 나누어 셀 때는 한 가지 모양을 빠뜨리기 쉽습니다. $4+0+0$ 인 선택이나 $2+2+0$ 인 선택을 빠뜨리면 3이 줄어 12, 즉 선택지 (C)가 나옵니다.

정답: (D) 15

10 대수

출처: 2007 AMC 10A 20번

수 a 가 등식 $4 = a + a^{-1}$ 을 만족시킨다. $a^4 + a^{-4}$ 의 값은?

- (A) 164 (B) 172 (C) 192 (D) 194 (E) 212

핵심 아이디어. a 를 직접 구하지 마십시오. 대신 주어진 등식을 제공합니다. $a \cdot a^{-1} = 1$ 이므로 곱의 항은 그냥 수 2가 되고, 지수를 1, 2, 4로 차례로 올려 갈 수 있습니다.

1단계. $a + a^{-1} = 4$ 를 제공합니다.

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot a^{-1} + a^{-2} = 16, \quad \text{즉} \quad a^2 + 2 + a^{-2} = 16,$$

따라서 $a^2 + a^{-2} = 14$ 입니다.

2단계. 한 번 더 제공합니다.

$$a^4 + 2 \cdot a^2 \cdot a^{-2} + a^{-4} = 196, \quad \text{즉} \quad a^4 + 2 + a^{-4} = 196,$$

따라서 $a^4 + a^{-4} = 194$ 입니다.

주의. $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ 인 것처럼 제공하면 가운데 항 2가 빠집니다. 마지막 단계에서 그렇게 하면 196, 두 단계 모두에서 그렇게 하면 256이 나오는데, 둘 다 선택지에 없으므로 곱의 항을 다시 확인해야 한다는 신호입니다.

다른 풀이. 직접 풀어 봅시다. 양변에 a 를 곱하면 $a^2 - 4a + 1 = 0$ 이므로 $a = 2 \pm \sqrt{3}$ 입니다. $a = 2 + \sqrt{3}$ 으로 잡습니다(다른 근은 이 수의 역수이므로 같은 답이 나옵니다). 그러면 $a^2 = 7 + 4\sqrt{3}$ 이고 $a^4 = (7 + 4\sqrt{3})^2 = 49 + 56\sqrt{3} + 48 = 97 + 56\sqrt{3}$ 입니다. $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$ 이므로 $a^{-4} = 97 - 56\sqrt{3}$ 이고, 합은 194입니다.

정답: (D) 194