
AMC 10

제 5 회

하프 모의고사

해설

정답표 • 출처 • 단계별 풀이

정답표와 출처

번호	정답	출처	영역
1	A	2008 AMC 10B 10번	기하
2	E	2018 AMC 10A 11번	경우의 수와 확률
3	C	2000 AMC 10 12번	대수
4	C	2018 AMC 10B 13번	정수론
5	D	2017 AMC 10A 14번	대수
6	B	2015 AMC 10B 15번	정수론
7	B	2011 AMC 10A 16번	대수
8	C	2009 AMC 10B 17번	기하
9	D	2017 AMC 10B 18번	경우의 수와 확률
10	A	2005 AMC 10A 20번	기하

1 기하

출처: 2008 AMC 10B 10번

반지름이 5인 원 위에 두 점 A 와 B 가 있고 $AB = 6$ 이다. 점 C 는 열호 AB 의 중점이다. 선분 AC 의 길이는?

- (A) $\sqrt{10}$ (B) $\frac{7}{2}$ (C) $\sqrt{14}$ (D) $\sqrt{15}$ (E) 4

핵심 아이디어. 중심 O 에서 현 $\overline{AB}$ 에 수선을 내려 봅시다. 이 수선은 현의 중점 D 에서 현과 만나고, 연장하면 호의 중점 C 를 지납니다.

1단계. D 는 $\overline{AB}$ 의 중점이므로 $AD = 3$ 입니다. 직각삼각형 ODA 에서 빗변은 반지름 $OA = 5$ 이므로 다음과 같습니다.

$$OD = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4.$$

2단계. 세 점 O, D, C 는 한 직선 위에 있고, $OC = 5$ 도 반지름입니다. 따라서 $DC = OC - OD = 5 - 4 = 1$ 입니다.

3단계. 삼각형 ADC 는 D 에서 직각이고, 직각을 낀 두 변이 $AD = 3$, $DC = 1$ 이므로 다음과 같습니다.

$$AC = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}.$$

주의. 4는 중심에서 현까지의 거리 OD 이지, 길이 AC 가 아닙니다. 1단계에서 멈추면 선택지 (E)를 고르게 됩니다.

정답: (A) $\sqrt{10}$

2 경우의 수와 확률

출처: 2018 AMC 10A 11번

공정한 표준 6면체 주사위 7개를 던질 때, 윗면에 나온 수의 합이 10일 확률은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{n}{6^7},$$

여기서 n 은 양의 정수이다. n 의 값은?

- (A) 42 (B) 49 (C) 56 (D) 63 (E) 84

핵심 아이디어. 6^7 가지 결과가 모두 같은 확률로 일어나므로, n 은 합이 10인 순서 있는 결과의 개수일 뿐입니다. 모든 주사위의 눈은 1 이상이므로 일곱 개의 주사위가 이미 7을 차지하고, 나누어 줄 “추가” 눈은 3개만 남습니다. 아주 적은 경우의 수입니다.

1단계. 각 주사위의 눈을 $1+(\text{추가분})$ 으로 씁니다. 일곱 개의 추가분은 ≥ 0 인 정수이고, 그 합은 $10 - 7 = 3$ 입니다. 그러면 어떤 주사위도 $1 + 3 = 4$ 보다 큰 눈이 나올 수 없으므로, 주사위 눈의 상한 6은 전혀 문제가 되지 않습니다.

2단계. 3개의 추가분이 어떻게 묶이는지에 따라 경우를 나눕니다.

- 3개 모두 한 주사위에 (한 주사위가 4): 주사위를 고르는 방법은 7가지입니다.
- 한 주사위에 2개, 다른 주사위에 1개 (3과 2): 3이 나올 주사위를 고르고 (7가지), 다른 주사위 중에서 2가 나올 주사위를 고르면 (6가지) $7 \cdot 6 = 42$ 가지입니다.
- 세 주사위에 1개씩 (2가 세 개): 세 주사위를 고르는 방법은 $\binom{7}{3} = 35$ 가지입니다.

3단계. 경우를 모두 더하면 $n = 7 + 42 + 35 = 84$ 입니다.

주의. 가운데 경우에서 두 주사위는 역할이 다릅니다. 하나는 3, 다른 하나는 2가 나옵니다. 이것을 $\binom{7}{2} = 21$ 로 세면 두 주사위를 서로 바꿔도 같은 것으로 취급하게 되어, 합계가 $7 + 21 + 35 = 63$, 즉 선택지 (D)가 됩니다.

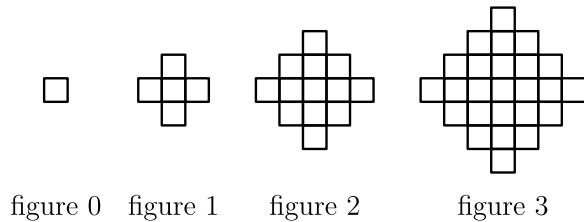
다른 풀이. 별과 막대(stars and bars): 3개의 추가분(별)을 6개의 칸막이(막대)를 써서 7개의 주사위에 나누어 놓습니다. 기호는 모두 9개이고 그중 3개가 별이므로 $n = \binom{9}{3} = 84$ 입니다.

정답: (E) 84

3 대수

출처: 2000 AMC 10 12번

그림 0, 1, 2, 3은 각각 서로 겹치지 않는 단위정사각형 1, 5, 13, 25개로 이루어져 있다. 이 규칙이 계속된다면, 그림 100을 이루는 서로 겹치지 않는 단위정사각형은 몇 개인가?



(A) 10401

(B) 19801

(C) 20201

(D) 39801

(E) 40801

핵심 아이디어. 그림 100은 직접 그리기에는 너무 크므로, 예측 가능하게 커지는 구조를 찾아봅시다. 각 그림을 세로줄(열) 단위로 읽으면, 열의 높이는 홀수들이 꼭대기까지 커졌다가 다시 작아집니다.

1단계. 그림 3을 왼쪽에서 오른쪽으로 봅시다. 열의 높이는 1, 3, 5, 7, 5, 3, 1입니다. 확인하면 $1 + 3 + 5 + 7 + 5 + 3 + 1 = 25$ 입니다. 그림 2의 열은 1, 3, 5, 3, 1 (합 13)이고, 그림 1의 열은 1, 3, 1 (합 5)입니다.

2단계. 따라서 그림 n 은 홀수 $1, 3, \dots, 2n + 1$ 이 올라간 다음 $2n - 1, \dots, 3, 1$ 이 내려오는 모양입니다. 올라가는 절반은 처음 $n + 1$ 개의 홀수이고, 내려오는 절반은 처음 n 개의 홀수입니다.

3단계. 처음 m 개의 홀수의 합은 m^2 입니다(예를 들어 $1 + 3 + 5 = 9$). 따라서 그림 n 의 정사각형 개수는

$$(n+1)^2 + n^2$$

입니다. 확인하면 $n = 0, 1, 2, 3$ 일 때 1, 5, 13, 25가 나옵니다. ✓

4단계. $n = 100$ 이면 다음과 같습니다.

$$101^2 + 100^2 = 10201 + 10000 = 20201.$$

주의. 그림은 그림 0부터 시작하므로, 그림 100은 100번째가 아니라 101번째 그림입니다. 100번째 그림으로 보면 $n = 99$ 를 쓰게 되어 $100^2 + 99^2 = 19801$, 즉 선택지 (B)가 됩니다.

다른 풀이. 한 그림에서 다음 그림으로 갈 때 개수는 4, 8, 12, ... 씩, 즉 k 번째 단계에서 $4k$ 씩 늘어납니다. 따라서 그림 100의 정사각형은 $1 + 4(1 + 2 + \dots + 100) = 1 + 4 \cdot 5050 = 20201$ 개입니다.

정답: (C) 20201

4 정수론

출처: 2018 AMC 10B 13번

수열 101, 1001, 10001, 100001, ... 의 처음 2018개의 수 중에서 101로 나누어떨어지는 것은 몇 개인가?

- (A) 253 (B) 504 (C) 505 (D) 506 (E) 1009

핵심 아이디어. 모든 항은 $10^m + 1$ 꼴이고, $101 = 100 + 1$ 자체도 이 수열의 항입니다. 100은 101보다 하나 작으므로, 10의 거듭제곱을 101로 나눈 나머지는 짧은 주기로 반복될 수밖에 없습니다. 그 주기를 찾아봅시다.

1단계. k 번째 항은 $10^{k+1} + 1$ 이므로, k 가 1부터 2018까지 변할 때 지수 $m = k + 1$ 은 2부터 2019까지 변합니다.

2단계. 101로 나눈 나머지(mod)로 생각합시다. $100 = 101 - 1$ 이므로 $10^2 \equiv -1$ 입니다. 그러면 10의 거듭제곱은 주기 4로 순환합니다.

$$10^1 \equiv 10, \quad 10^2 \equiv -1, \quad 10^3 \equiv -10, \quad 10^4 \equiv 1,$$

그 뒤로는 이 패턴이 반복됩니다. (실제로 $10^4 - 1 = 9999 = 99 \cdot 101$ 입니다.)

3단계. 1을 더하면, m 을 4로 나눈 나머지가 1, 2, 3, 0일 때 $10^m + 1$ 의 나머지는 각각 11, 0, -9, 2입니다. 이 중 $m \equiv 2 \pmod{4}$ 인 경우에만 101의 배수가 됩니다. 예를 들어 101 ($m = 2$)과 $1000001 = 101 \cdot 9901$ ($m = 6$)은 조건을 만족하지만, 1001, 10001, 100001은 만족하지 않습니다.

4단계. 2부터 2019까지의 m 중에서 $m \equiv 2 \pmod{4}$ 인 것을 셉니다. 이들은 2, 6, 10, ..., 2018이고, 그 개수는

$$\frac{2018 - 2}{4} + 1 = 504 + 1 = 505$$

입니다.

주의. $2018 \div 4 = 504.5$ 를 계산하고 내림하면 504, 즉 선택지 (B)가 됩니다. 목록 2, 6, ..., 2018은 맨 첫 항부터 시작하므로 개수는 505입니다. 등차적으로 늘어나는 목록의 개수는 항상 (끝항 - 첫항) ÷ 공차 + 1로 세어야 합니다.

정답: (C) 505

5 대수

출처: 2017 AMC 10A 14번

로저는 매주 용돈으로 영화표 한 장과 탄산음료 한 잔의 값을 낸다. 지난주 로저의 용돈은 A 달러였다. 영화표의 가격은 A 와 탄산음료 가격의 차의 20%였고, 탄산음료의 가격은 A 와 영화표 가격의 차의 5%였다. 로저가 영화표와 탄산음료에 낸 금액은 A 의 몇 퍼센트인가? (가장 가까운 정수 퍼센트로 반올림한다.)

- (A) 9% (B) 19% (C) 22% (D) 23% (E) 25%

핵심 아이디어. 모르는 두 가격이 각각 서로를 이용해 설명되어 있으므로, 이름을 붙여 방정식 두 개를 세웁니다. A 에 대한 비율만 중요하므로 $A = 1$ (또는 편리한 다른 값)로 놓아도 됩니다.

1단계. 영화표 가격을 t , 탄산음료 가격을 s 라 하고 $A = 1$ 로 놓습니다. (이렇게 해도 괜찮습니다. 용돈이 두 배가 되면 두 가격도 두 배가 되므로, 두 가격이 A 에서 차지하는 비율은 A 에 따라 달라지지 않습니다.) 두 문장을 식으로 쓰면 다음과 같습니다.

$$t = \frac{1}{5}(1 - s), \quad s = \frac{1}{20}(1 - t).$$

2단계. 분모를 없애면 $5t = 1 - s$ 이므로 $s = 1 - 5t$ 입니다. 이것을 $20s = 1 - t$ 에 대입하면 다음과 같습니다.

$$20(1 - 5t) = 1 - t \implies 20 - 100t = 1 - t \implies 99t = 19 \implies t = \frac{19}{99}.$$

3단계. 그러면 다음을 얻습니다.

$$s = 1 - 5 \cdot \frac{19}{99} = \frac{99 - 95}{99} = \frac{4}{99}.$$

검산하면 $\frac{1}{5} \left(1 - \frac{4}{99} \right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{95}{99} = \frac{19}{99}$ 입니다. ✓

4단계. 합은 $t + s = \frac{23}{99} \approx 0.2323$ 이고, 가장 가까운 정수 퍼센트로 나타내면 23%입니다.

주의. 영화표 가격은 A 의 20%가 아니라 $A - s$ 의 20%입니다. 단순히 20% + 5%로 더하면 25%, 즉 선택지 (E)가 됩니다. 각 가격은 A 보다 작은 값의 몇 퍼센트이므로, 실제 합은 25%보다 작아야 합니다.

정답: (D) 23%

6 정수론

출처: 2015 AMC 10B 15번

햄릿 마을에는 말 한 마리당 사람이 3명, 소 한 마리당 양이 4마리, 사람 한 명당 오리가 3마리 있다. 다음 중 햄릿 마을의 사람, 말, 양, 소, 오리의 수를 모두 합한 값이 될 수 없는 것은?

- (A) 41 (B) 47 (C) 59 (D) 61 (E) 66

핵심 아이디어. 모든 수가 말의 수나 소의 수 중 하나와 비로 연결되어 있으므로, 모든 것을 이 두 수로 나타내 봅시다. 그러면 합은 $13h + 5c$ 꼴이 되고, 문제는 “어느 선택지를 이 꼴로 나타낼 수 없는가?”가 됩니다.

1단계. 말의 수를 h , 소의 수를 c 라 합시다(음이 아닌 정수). 그러면 사람은 $3h$ 명, 오리는 $3 \cdot 3h = 9h$ 마리, 양은 $4c$ 마리입니다. 합은 다음과 같습니다.

$$h + 3h + 9h + c + 4c = 13h + 5c.$$

즉 말 한 마리마다 사람과 동물 13의 묶음이 따라오고, 소 한 마리마다 5의 묶음이 따라옵니다.

2단계. 선택지 중 네 개는 이 묶음들로 만들 수 있습니다.

$$41 = 13 \cdot 2 + 5 \cdot 3, \quad 59 = 13 \cdot 3 + 5 \cdot 4, \quad 61 = 13 \cdot 2 + 5 \cdot 7, \quad 66 = 13 \cdot 2 + 5 \cdot 8.$$

3단계. 47의 경우, 말 묶음은 $13h \leq 47$, 즉 $h = 0, 1, 2, 3$ 만 가능합니다. 이때 소에게 남는 수는 각각

$$47, \quad 34, \quad 21, \quad 8,$$

이고, 이 중 어느 것도 5의 배수가 아닙니다. 따라서 어떤 h 와 c 를 골라도 47을 만들 수 없습니다.

빠르게 훑어보는 방법도 있습니다. $5c$ 의 일의 자리 숫자는 항상 0 또는 5이므로, $13h$ 의 일의 자리 숫자는 합의 일의 자리 숫자와 같거나 그것과 5만큼 차이가 나야 합니다. 47이 되려면 $13h$ 의 일의 자리 숫자가 7 또는 2여야 하는데, 배수 0, 13, 26, 39의 일의 자리 숫자는 0, 3, 6, 9입니다.

정답: (B) 47

7 대수

출처: 2011 AMC 10A 16번

다음 중 $\sqrt{9-6\sqrt{2}} + \sqrt{9+6\sqrt{2}}$ 와 같은 것은?

- (A) $3\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{6}$ (C) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ (D) $3\sqrt{3}$ (E) 6

핵심 아이디어. 두 근호 안의 수 $9 \mp 6\sqrt{2}$ 는 서로 **켈레**입니다. 합 전체를 제곱하면 교차항이 켈레끼리의 곱이 되어 근호가 완전히 사라집니다. (또는, 각 근호 안의 수가 사실은 완전제곱식입니다.)

1단계. $S = \sqrt{9-6\sqrt{2}} + \sqrt{9+6\sqrt{2}}$ 라 합시다. $S > 0$ 임에 유의합니다. $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ 을 이용해 제곱하면 다음과 같습니다.

$$S^2 = (9-6\sqrt{2}) + (9+6\sqrt{2}) + 2\sqrt{(9-6\sqrt{2})(9+6\sqrt{2})}.$$

2단계. 앞의 두 항을 더하면 18입니다. 마지막 근호 안의 곱은 제곱의 차입니다.

$$(9-6\sqrt{2})(9+6\sqrt{2}) = 81 - 36 \cdot 2 = 81 - 72 = 9.$$

따라서 $S^2 = 18 + 2\sqrt{9} = 18 + 6 = 24$ 입니다.

3단계. $S > 0$ 이므로 $S = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ 입니다.

근삿값으로 확인해 봅시다. $6\sqrt{2} \approx 8.485$ 이므로 두 근호의 값은 각각 약 $\sqrt{0.515} \approx 0.717$, $\sqrt{17.485} \approx 4.182$ 입니다. 그 합은 약 4.899이고, 이는 $2\sqrt{6} \approx 4.899$ 와 일치합니다.

주의. 제곱근은 그냥 더해지지 않습니다. $\sqrt{x} + \sqrt{y} \neq \sqrt{x+y}$ 입니다. 두 근호를 “합쳐서” $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ 로 만들면 선택지 (A)가 됩니다.

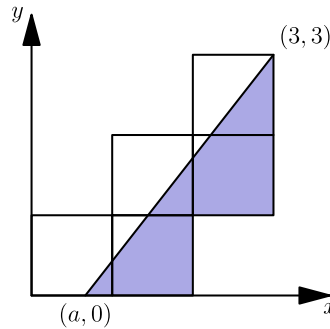
다른 풀이. $9-6\sqrt{2} = (\sqrt{p}-\sqrt{q})^2 = p+q-2\sqrt{pq}$ 인 꼴을 찾아봅시다. $p+q=9$, $2\sqrt{pq}=6\sqrt{2}$, 즉 $pq=18$ 이어야 하므로 $p=6$, $q=3$ 입니다. 따라서 $\sqrt{9-6\sqrt{2}} = \sqrt{6}-\sqrt{3}$ 이고($\sqrt{6} > \sqrt{3}$ 이므로 양수입니다), $\sqrt{9+6\sqrt{2}} = \sqrt{6}+\sqrt{3}$ 입니다. 둘의 합은 $2\sqrt{6}$ 입니다.

정답: (B) $2\sqrt{6}$

8 기하

출처: 2009 AMC 10B 17번

좌표평면 위에 단위정사각형 다섯 개가 그림과 같이 놓여 있고, 왼쪽 아래 꼭짓점은 원점에 있다. $(a, 0)$ 에서 $(3, 3)$ 까지 이어진 비스듬한 직선이 전체 영역을 넓이가 같은 두 영역으로 나눈다. a 의 값은?

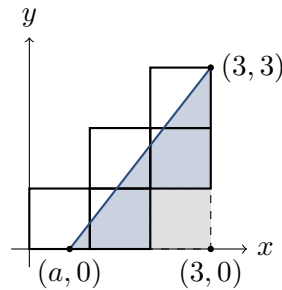


- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{3}{4}$ (E) $\frac{4}{5}$

핵심 아이디어. 색칠된 영역은 모양이 어색하지만, 거의 직각삼각형입니다. 꼭짓점이 $(a, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 3)$ 인 삼각형과 비교하면, 오른쪽 아래 구석의 단위정사각형 하나가 빠져 있다는 점만 다릅니다. 쉬운 넓이를 구한 다음 빼 봅시다.

1단계. 다섯 정사각형의 넓이의 합은 5이므로, 색칠된 영역의 넓이는 $\frac{5}{2}$ 가 되어야 합니다.

2단계. 색칠된 영역을 꼭짓점이 $(a, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 3)$ 인 직각삼각형으로 채워 봅시다. 두 직각변의 길이는 $3 - a$ (x 축 방향)와 3(세로 방향)이므로, 넓이는 $\frac{3(3-a)}{2}$ 입니다.



3단계. 이 삼각형은 색칠된 영역에 점선 정사각형 $[2, 3] \times [0, 1]$ 을 더한 것인데, 이 정사각형은 다섯 정사각형 중 하나가 **아닙니다**. 따라서 다음과 같습니다.

$$\frac{3(3-a)}{2} - 1 = \frac{5}{2} \implies \frac{3(3-a)}{2} = \frac{7}{2} \implies 3-a = \frac{7}{3} \implies a = \frac{2}{3}.$$

4단계. 그림을 확인해 봅시다. $a = \frac{2}{3}$ 일 때 $x = 2$ 에서 직선의 높이는 $3 \cdot \frac{2 - 2/3}{3 - 2/3} = \frac{12}{7}$ 이고, 이는 1과 2 사이입니다. 따라서 점선 정사각형은 실제로 직선 아래에 놓이고, 삼각형의 나머지 부분은 다섯 정사각형 안에 있습니다.

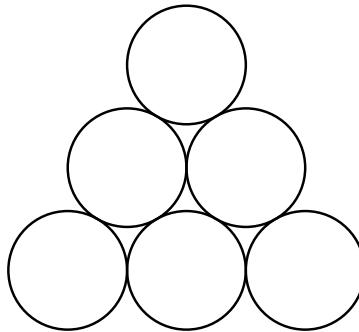
주의. 빠진 정사각형을 빼는 것을 잊으면 $\frac{3(3-a)}{2} = \frac{5}{2}$ 에서 $a = \frac{4}{3}$ 를 얻습니다. 이 값은 선택지에 없으며, 삼각형이 색칠된 영역보다 크다는 신호입니다.

정답: (C) $\frac{2}{3}$

9 경우의 수와 확률

출처: 2017 AMC 10B 18번

아래 그림의 원판 6개 중 3개는 파란색, 2개는 빨간색, 1개는 초록색으로 칠하려고 한다. 그림 전체를 회전하거나 대칭이동하여 서로 겹쳐지는 두 칠하기는 같은 것으로 본다. 서로 다른 칠하기는 모두 몇 가지인가?



(A) 6

(B) 8

(C) 9

(D) 12

(E) 15

핵심 아이디어. 대칭이 있는 문제는 한 번만 쓰이는 색을 먼저 놓으면 쉬워집니다. 하나뿐인 초록색 원판이 놓일 수 있는 곳은 본질적으로 꼭짓점과 변의 가운데, 이렇게 두 가지뿐이고, 일단 놓고 나면 남는 대칭이 거의 없습니다.

1단계. 그림은 원판으로 이루어진 삼각형입니다. **꼭짓점** 원판이 세 개, **변** 원판이 세 개(가운데 줄의 두 개와 맨 아래 줄의 가운데)입니다. 회전과 대칭이동은 꼭짓점을 꼭짓점으로, 변을 변으로 옮기므로, 초록색이 꼭짓점에 있는 칠하기는 초록색이 변에 있는 칠하기와 결코 같아질 수 없습니다. 회전시키면, 초록색이 맨 위 꼭짓점이나 맨 아래 줄 가운데 원판에 있다고 가정할 수 있습니다.

2단계. 초록색을 맨 위에 놓습니다. 나머지 다섯 개 중에서 빨간 원판 두 개를 고르는 방법은 $\binom{5}{2} = 10$ 가지이고, 나머지는 파란색입니다. 초록색을 맨 위에 그대로 두는 대칭은 (아무것도 하지 않는 것을 제외하면) 좌우 대칭이동뿐입니다. 이 대칭이동은 맨 아래 줄 가운데 원판은 그대로 두고, 가운데 줄의 두 원판을 서로 바꾸며, 아래쪽 두 꼭짓점을 서로 바꿉니다.

3단계. 10가지 중에서 이 대칭이동으로 변하지 않는 것은 정확히 2가지입니다. 가운데 줄의 두 원판이 모두 빨간색이거나, 아래쪽 두 꼭짓점이 모두 빨간색인 경우입니다. 나머지 8가지는 서로 거울상인 쌍을 이루므로 4가지 칠하기가 더 생깁니다. 따라서 초록색이 맨 위에 있으면 $2 + 4 = 6$ 가지입니다.

4단계. 초록색이 맨 아래 줄 가운데에 있을 때도 같은 논리가 적용됩니다. 세로축에 대한 대칭이동은 맨 위 원판을 그대로 두고 두 쌍을 각각 서로 바꾸므로, 역시 $2 + 4 = 6$ 가지입니다. 모두 합하면 $6 + 6 = 12$

가지입니다.

주의. (대칭을 고려하지 않은) 색칠은 $\frac{6!}{3!2!1!} = 60$ 가지이고 대칭은 6개이지만, $60 \div 6 = 10$ 은 답이 아닙니다. 대칭인 칠하기는 서로 다른 복사본이 6개보다 적으므로, 이렇게 나누면 덜 세어집니다.

다른 풀이. 복사본의 개수를 세어 봅시다. 어떤 대칭이동으로 변하지 않는 칠하기는 60가지 색칠 중에 3번만 나타납니다. 그런 색칠은 12가지이므로(대칭이동 3개 각각에 대하여, 초록색을 고정되는 원판에 놓는 방법 2가지, 빨간색을 서로 바뀌는 쌍에 놓는 방법 2가지), $12 \div 3 = 4$ 가지 칠하기가 됩니다. 나머지 48가지 색칠은 6개씩 묶이므로 8가지 칠하기가 됩니다. 합계는 $4 + 8 = 12$ 가지입니다.

정답: (D) 12

10 기하

출처: 2005 AMC 10A 20번

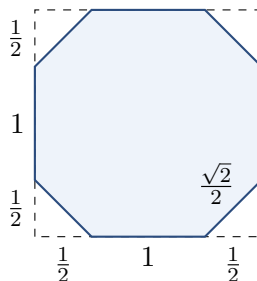
모든 내각의 크기가 같은 팔각형이 있다. 이 팔각형의 네 변의 길이는 1, 나머지 네 변의 길이는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이고, 이웃한 두 변의 길이는 항상 서로 다르다. 이 팔각형의 넓이는?

- (A) $\frac{7}{2}$ (B) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{5+4\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{4+5\sqrt{2}}{2}$ (E) 7

핵심 아이디어. 모든 내각의 크기가 같은 팔각형에서 각 내각은 135° 이므로, 변의 방향은 가로, 세로, 두 대각선 방향의 네 가지뿐입니다. 길이 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 는 정확히 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ 정사각형의 대각선 길이이므로, 팔각형을 네 귀퉁이가 잘린 정사각형으로 보라는 강한 힌트입니다.

1단계. 각 외각은 $360^\circ \div 8 = 45^\circ$ 이므로, 이웃한 변은 45° 씩 방향을 바꿉니다. 길이가 번갈아 나오므로, 팔각형을 돌려서 길이가 1 인 네 변은 가로·세로 방향이 되고 길이가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 인 네 변은 대각선 방향이 되게 할 수 있습니다.

2단계. 길이가 1 인 네 변을 서로 만날 때까지 연장합니다. 이 변들은 정사각형을 이루고, 대각선 방향의 각 변은 귀퉁이의 삼각형을 잘라 냅니다. 이 삼각형은 세 각이 $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ 이고 빗변이 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로, 각 직각변의 길이는 $\frac{\sqrt{2}}{2} \div \sqrt{2} = \frac{1}{2}$ 입니다.



3단계. 정사각형의 한 변의 길이는 $\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 2$ 이므로 넓이는 4입니다. 잘려 나간 삼각형 하나의 넓이는

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ 이고, 이런 삼각형이 네 개 있습니다.

$$\text{넓이} = 4 - 4 \cdot \frac{1}{8} = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}.$$

다른 풀이. 팔각형을 조각으로 나누어 구할 수도 있습니다. 가운데의 1×1 정사각형(넓이 1), 그 네 변에 붙은 $1 \times \frac{1}{2}$ 직사각형 네 개(넓이 $4 \cdot \frac{1}{2} = 2$), 직각변이 $\frac{1}{2}$ 인 귀퉁이 삼각형 네 개(넓이 $4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$)입니다. 합계는 $1 + 2 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ 입니다.

정답: (A) $\frac{7}{2}$