AMC 10

제 9 회

하프 모의고사

해설

정답표 • 출처 • 단계별 풀이

10문항 모두 AMC 10 기출(2000–2019)의 10–20번 문항에서 가져와 원래 번호 순서대로 배열한 것입니다. 원문 © Mathematical Association of America.

정답표와 출처

번호	정답	출처	영역
1	**D**	2004 AMC 10A 10번	경우의 수와 확률
2	**C**	2001 AMC 10 11번	대수
3	**A**	2003 AMC 10A 12번	경우의 수와 확률
4	**B**	2004 AMC 10B 13번	대수
5	**C**	2016 AMC 10A 14번	정수론
6	**E**	2011 AMC 10B 15번	대수
7	**E**	2014 AMC 10A 16번	기하
8	**B**	2010 AMC 10B 17번	대수
9	**E**	2008 AMC 10B 19번	기하
10	**B**	2013 AMC 10B 20번	정수론

1 경우의 수와 확률

출처: 2004 AMC 10A 10번

> 동전 A를 세 번 던지고 동전 B를 네 번 던진다. 두 동전은 모두 공정한 동전이다. 두 동전을 던져서 나온 앞면의 개수가 서로 같을 확률은?
>
> **(A)** $\frac{19}{128}$ **(B)** $\frac{23}{128}$ **(C)** $\frac{1}{4}$ **(D)** $\frac{35}{128}$ **(E)** $\frac{1}{2}$

핵심 아이디어. 동전 A에서 나올 수 있는 앞면의 개수는 $0, 1, 2, 3$개뿐입니다. 따라서 이 네 가지 경우로 나누어 각 동전의 경우의 수를 세고 곱해 봅시다.

n번 던져서 앞면이 k번 나오는 경우의 수는 $\binom{n}{k}$ 입니다.

동전 A(3번 던짐, 전체 $2^3 = 8$가지): 앞면이 $0, 1, 2, 3$번 나오는 경우의 수는 각각 $1,\ 3,\ 3,\ 1$가지입니다.

동전 B(4번 던짐, 전체 $2^4 = 16$가지): 앞면이 $0, 1, 2, 3, 4$번 나오는 경우의 수는 각각 $1,\ 4,\ 6,\ 4,\ 1$가지입니다.

두 동전은 서로 독립이므로, 일어날 가능성이 같은 전체 결과는 $8 \cdot 16 = 128$가지입니다. 앞면의 개수가 같은 결과의 수는 다음과 같습니다.

$$1 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 1 \cdot 4 = 1 + 12 + 18 + 4 = 35.$$

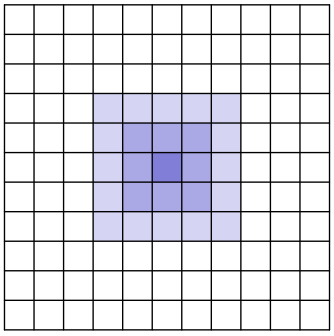
동전 B에서 앞면이 네 번 나오는 경우는 결코 같아질 수 없으므로 더해지는 것이 없습니다. 따라서 구하는 확률은 $\frac{35}{128}$ 입니다.

정답: (D) $\frac{35}{128}$

2 대수

출처: 2001 AMC 10 11번

단위정사각형을 배열한 그림의 일부가 아래와 같다. 가운데의 진하게 칠한 정사각형을 생각하자. 이 가운데 정사각형을 둘러싼 첫 번째 고리에는 단위정사각형이 8개 있고, 두 번째 고리에는 단위정사각형이 16개 있다. 이 과정을 계속할 때, 100번째 고리에 있는 단위정사각형의 개수는?



(A) 396 **(B)** 404 **(C)** 800 **(D)** 10,000 **(E)** 10,404

핵심 아이디어. 고리 하나는 조금 더 큰 정사각형에서 정사각형 하나를 떼어 내고 남은 부분입니다. 그림에서 각 고리는 꽉 찬 정사각형의 가장 바깥 층으로 보이므로, 곧바로 "큰 정사각형 빼기 작은 정사각형"을 떠올릴 수 있습니다.

1단계. 가운데 정사각형과 첫 번째 고리를 합치면 3×3 정사각형입니다. 두 번째 고리를 더하면 5×5 정사각형이 됩니다. 고리 하나를 더할 때마다 각 변에 정사각형이 한 칸씩 붙으므로 한 변의 길이는 매번 2씩 늘어납니다. 즉, 가운데 정사각형과 처음 n개의 고리를 합치면 $(2n+1) \times (2n+1)$ 정사각형이 됩니다.

2단계. 따라서 n번째 고리는 $(2n+1) \times (2n+1)$ 정사각형에서 그 안의 $(2n-1) \times (2n-1)$ 정사각형을 떼어 낸 것입니다.

$$(2n+1)^2 - (2n-1)^2 = (4n^2 + 4n + 1) - (4n^2 - 4n + 1) = 8n.$$

확인: $n = 1$이면 8, $n = 2$이면 16으로 문제의 조건과 일치합니다.

3단계. $n = 100$일 때 고리에는 단위정사각형이 $8 \cdot 100 = 800$개 있습니다. 직접 계산해도 $201^2 - 199^2 = 40401 - 39601 = 800$입니다.

주의. 100번째 고리를 100×100 정사각형의 테두리로 생각하면 $4 \cdot 100 - 4 = 396$, 즉 (A)가 나옵니다. 100번째 고리는 199×199 정사각형을 둘러싸고 있으므로 201×201 정사각형의 테두리입니다.

정답: (C) 800

3 경우의 수와 확률

출처: 2003 AMC 10A 12번

> 네 점 $(0,0)$, $(4,0)$, $(4,1)$, $(0,1)$을 꼭짓점으로 하는 직사각형의 내부에서 임의로 한 점 (x,y)를 고른다. $x<y$일 확률은?
>
> **(A)** $\frac{1}{8}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{3}{8}$ **(D)** $\frac{1}{2}$ **(E)** $\frac{3}{4}$

핵심 아이디어. 어떤 영역에서 점을 고르게 임의로 고를 때 확률은 넓이의 비입니다. 조건 $x<y$는 직선 $y=x$를 경계로 하는 반평면이므로, 직사각형 위에 이 직선을 그리고 그 위쪽 부분의 넓이를 재어 봅시다.

1단계. 직사각형은 $x=0$부터 $x=4$까지, $y=0$부터 $y=1$까지이므로 넓이는 $4\cdot 1=4$입니다.

2단계. $x<y$인 점은 직선 $y=x$의 위쪽에 있습니다. 직사각형 안에서는 항상 $y\le 1$이므로 $x<y$이면 반드시 $x<1$입니다. 즉, 이런 점은 왼쪽의 1×1 정사각형 안에만 있을 수 있습니다.

이 단위정사각형에서 직선 $y=x$는 $(0,0)$에서 $(1,1)$까지의 대각선입니다. 그 위쪽 부분은 세 꼭짓점이 $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$인 삼각형으로, 두 변의 길이가 1과 1인 직각삼각형이므로 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}$입니다.

3단계. 구하는 확률은 다음과 같습니다.

$$\frac{\text{조건을 만족하는 넓이}}{\text{전체 넓이}}=\frac{1/2}{4}=\frac{1}{8}.$$

주의. "$x<y$와 $x>y$는 대칭이므로 답은 $\frac{1}{2}$이다"라고 생각하면 (D)를 고르게 됩니다. 이 대칭이 성립하려면 x와 y를 바꾸어도 영역이 그대로여야 합니다. 정사각형이라면 맞지만, 이 4×1 직사각형에서는 틀립니다.

정답: (A) $\frac{1}{8}$

4 대수

출처: 2004 AMC 10B 13번

> 미국에서 동전의 두께는 다음과 같다. 페니 1.55 mm, 니켈 1.95 mm, 다임 1.35 mm, 쿼터 1.75 mm. 이 동전들을 쌓은 더미의 높이가 정확히 14 mm일 때, 더미에 있는 동전은 몇 개인가?
>
> **(A)** 7 **(B)** 8 **(C)** 9 **(D)** 10 **(E)** 11

핵심 아이디어. 네 가지 두께는 모두 소수점 아래 둘째 자리가 5이고, 서로 0.2 mm의 배수만큼 차이가 납니다. 이런 규칙은 나머지를 살펴보라는 신호입니다. 두께를 100분의 1 mm 단위로 나타내면 각 동전의 두께를 20으로 나눈 나머지는 15이고, 목표인 1400은 나머지가 0입니다. 이것이 동전의 개수를 제한하고, 대략적인 크기 범위로 마무리할 수 있습니다.

1단계: 개수의 범위. 동전 하나의 두께는 많아야 1.95 mm, 적어도 1.35 mm입니다. 동전이 k개이면 다음이 성립합니다.

$$1.35k \le 14 \le 1.95k,$$

따라서 $k \ge 14/1.95 \approx 7.2$, $k \le 14/1.35 \approx 10.4$입니다. 그러므로 k는 8, 9, 10 중 하나입니다.

2단계: 나누어떨어짐 조건. 100분의 1 mm 단위로 나타내면 두께는 $135, 155, 175, 195$이고 더미의 높이는 1400입니다. 각 두께는 20의 배수보다 15만큼 큽니다($135 = 120 + 15$, $155 = 140 + 15$, $175 = 160 + 15$, $195 = 180 + 15$). 따라서 동전 k개의 두께의 합은 (20의 배수) $+ 15k$ 꼴입니다.

1400은 20의 배수이므로 $15k$ 역시 마찬가지입니다. $15k = 20m$이면 $3k = 4m$이고, 3과 4는 서로소이므로 k는 4의 배수여야 합니다.

3단계. 8, 9, 10 중 4의 배수는 8뿐입니다. 실제로 8개가 가능합니다. 쿼터 여덟 개를 쌓으면 $8 \cdot 1.75 = 14$ mm입니다.

정답: (B) 8

5 정수론

출처: 2016 AMC 10A 14번

> 순서를 생각하지 않을 때, 2016을 2와 3만의 합으로 나타내는 방법은 몇 가지인가? (예를 들어 $1008 \cdot 2 + 0 \cdot 3$과 $402 \cdot 2 + 404 \cdot 3$은 이러한 방법 중 서로 다른 두 가지이다.)
>
> **(A)** 236 **(B)** 336 **(C)** 337 **(D)** 403 **(E)** 672

핵심 아이디어. "순서를 생각하지 않는다"는 것은 2를 **몇 개**, 3을 **몇 개** 쓰는지에 따라 방법이 정해진다는 뜻입니다. 따라서 $2x + 3y = 2016$의 음이 아닌 정수해의 개수를 세면 됩니다. 그리고 3의 개수를 정하면 2의 개수는 저절로 정해집니다.

1단계. 2의 개수를 x, 3의 개수를 y라 하면 $2x + 3y = 2016$, $x, y \geq 0$입니다. 각 y에 대하여 x는 많아야 하나로, $x = \dfrac{2016 - 3y}{2}$입니다. 이 값이 음이 아닌 정수여야 합니다.

2단계. $2016 - 3y$가 짝수인 것은 $3y$가 짝수일 때, 즉 y가 짝수일 때와 정확히 같습니다. 또 $x \geq 0$이라는 조건은 $3y \leq 2016$, 즉 $y \leq 672$를 뜻합니다.

3단계. 따라서 y는 0부터 672까지의 짝수 중 어느 것이든 될 수 있습니다.

$$y = 0, 2, 4, \ldots, 672,$$

즉 $\dfrac{672}{2} + 1 = 337$개의 값이 있습니다. 각 값마다 방법이 하나씩 대응하며, $1008 \cdot 2 + 0 \cdot 3$($y = 0$일 때)부터 $0 \cdot 2 + 672 \cdot 3$($y = 672$일 때)까지입니다.

주의. $672 \div 2 = 336$을 계산하고 멈추면 (B)를 고르게 됩니다. 목록 $0, 2, \ldots, 672$에는 양 끝값이 **모두** 포함되므로 값이 하나 더 있어 337개입니다.

정답: (C) 337

6 대수

출처: 2011 AMC 10B 15번

> @ 기호로 "평균 내기" 연산을 나타내자. 즉, $a@b = \frac{a+b}{2}$ 이다. 다음 분배법칙 중에서 모든 수 x, y, z에 대하여 성립하는 것을 있는 대로 고른 것은?
>
> I. $x@(y+z) = (x@y) + (x@z)$
>
> II. $x + (y@z) = (x+y)@(x+z)$
>
> III. $x@(y@z) = (x@y)@(x@z)$
>
> **(A)** I만 **(B)** II만 **(C)** III만 **(D)** I과 III만 **(E)** II와 III만

핵심 아이디어. 각 법칙은 항등식이므로, 모든 @ 연산을 $\frac{+}{2}$ 꼴로 풀어 쓰고 양변을 비교하면 됩니다. 양변이 다르다면 수치 예 하나로 그 법칙이 성립하지 않음을 보일 수 있습니다.

법칙 I. 좌변: $x@(y+z) = \dfrac{x+y+z}{2}$. 우변:

$$\frac{x+y}{2} + \frac{x+z}{2} = \frac{2x+y+z}{2} = x + \frac{y+z}{2}.$$

우변에는 $\frac{x}{2}$가 더 붙어 있으므로 $x \neq 0$이면 양변이 다릅니다. 예를 들어 $x = 2$, $y = z = 0$이면 좌변은 1, 우변은 $1 + 1 = 2$입니다. 법칙 I은 성립하지 않습니다.

법칙 II. 좌변: $x + \dfrac{y+z}{2}$. 우변:

$$(x+y)@(x+z) = \frac{(x+y)+(x+z)}{2} = \frac{2x+y+z}{2} = x + \frac{y+z}{2}.$$

모든 x, y, z에 대하여 같으므로 법칙 II는 성립합니다. (두 수를 각각 x만큼 옮기면 그 평균도 x만큼 옮겨집니다.)

법칙 III. 좌변: $x@\dfrac{y+z}{2} = \dfrac{x + \frac{y+z}{2}}{2} = \dfrac{2x+y+z}{4}$. 우변:

$$\frac{\frac{x+y}{2} + \frac{x+z}{2}}{2} = \frac{\frac{2x+y+z}{2}}{2} = \frac{2x+y+z}{4}.$$

이번에도 같으므로 법칙 III은 성립합니다.

참인 것은 II와 III뿐입니다.

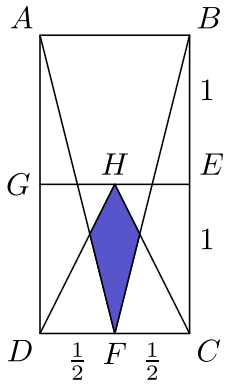
주의. 법칙 I은 보통의 분배법칙 $a(b+c) = ab + ac$와 가장 닮아 보여서 확인하지 않고 받아들이기 쉽습니다. 하지만 I이 들어 있는 선택지는 모두 틀립니다. 또 $x = y = z = 0$으로 확인하면 양변이 모두 0이 되어 잘못 판단하게 됩니다. $x \neq 0$인 예를 골라야 합니다.

정답: (E) II와 III만

7 기하

출처: 2014 AMC 10A 16번

직사각형 $ABCD$에서 $AB = 1$, $BC = 2$이고, 점 E, F, G는 각각 $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$의 중점이다. 점 H는 $\overline{GE}$의 중점이다. 색칠한 부분의 넓이는?



(A) $\frac{1}{12}$ **(B)** $\frac{\sqrt{3}}{18}$ **(C)** $\frac{\sqrt{2}}{12}$ **(D)** $\frac{\sqrt{3}}{12}$ **(E)** $\frac{1}{6}$

핵심 아이디어. 색칠한 부분은 연꼴입니다. 즉, 세로선 $\overline{HF}$에 대하여 대칭입니다. 연꼴의 넓이는 두 대각선의 길이의 곱의 절반이고, 대각선 하나인 $HF = 1$은 이미 알고 있습니다. 나머지 대각선은 두 직선의 교점만 구하면 되므로 좌표를 쓰면 깔끔합니다.

1단계: 좌표. $D = (0,0)$, $C = (1,0)$, $B = (1,2)$, $A = (0,2)$로 놓습니다. 그러면 $E = (1,1)$, $F = (\frac{1}{2},0)$, $G = (0,1)$이고, $\overline{GE}$의 중점 H는 $(\frac{1}{2},1)$입니다.

그림에서 색칠한 부분의 꼭짓점은 H, F, $\overline{AF}$와 $\overline{DH}$의 교점 P, $\overline{BF}$와 $\overline{CH}$의 교점 Q입니다.

2단계: P 구하기. 직선 DH는 $(0,0)$에서 $(\frac{1}{2},1)$로 가므로 $y = 2x$입니다. 직선 AF는 $(0,2)$에서 $(\frac{1}{2},0)$으로 가므로 $y = 2 - 4x$입니다. $2x = 2 - 4x$로 놓으면 $x = \frac{1}{3}$이므로 $P = (\frac{1}{3},\frac{2}{3})$입니다.

그림은 $x = \frac{1}{2}$에 대하여 좌우 대칭이므로 $Q = (\frac{2}{3},\frac{2}{3})$입니다.

3단계: 넓이. 두 대각선은 HF(세로, 길이 1)와 PQ(가로, 길이 $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$)입니다. 두 대각선은 서로 수직이므로 넓이는 다음과 같습니다.

$$\text{넓이} = \frac{1}{2} \cdot HF \cdot PQ = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

다른 풀이. 더하는 대신 빼서 구해 봅시다. 삼각형 DHC는 밑변 $DC = 1$, 높이 1(H의 높이)이므로 넓이가 $\frac{1}{2}$입니다. 여기서 연꼴을 빼면 삼각형 DPF와 FQC가 남습니다. 삼각형 DPF는 밑변 $DF = \frac{1}{2}$, 높이 $\frac{2}{3}$(P의 높이)이므로 넓이가 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$이고, FQC는 이것과 좌우 대칭입니다. 따라서 연꼴의 넓이는 $\frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$입니다.

정답: (E) $\frac{1}{6}$

8 대수

출처: 2010 AMC 10B 17번

> 유클리드 시의 모든 고등학교가 수학 경시대회에 학생 3명으로 이루어진 팀을 하나씩 보냈다. 대회 참가자들의 점수는 모두 서로 달랐다. 앤드리아의 점수는 전체 학생의 점수의 중앙값이었고, 앤드리아의 팀에서 가장 높은 점수였다. 앤드리아의 팀원인 베스와 칼라는 각각 37등과 64등을 하였다. 이 시에 있는 고등학교는 몇 개인가?
>
> **(A)** 22 **(B)** 23 **(C)** 24 **(D)** 25 **(E)** 26

핵심 아이디어. 주어진 사실을 모두 학교 수 n에 대한 조건으로 바꾸어 봅시다. "중앙값"과 "점수가 모두 다름"을 함께 생각하면 학생 수가 홀수여야 하고, "64등"과 "팀에서 최고점"은 각각 하한과 상한을 줍니다.

1단계: 홀짝. 학생은 $3n$명입니다. 학생 수가 짝수이면 중앙값은 가운데 두 점수의 평균이고, 점수가 모두 다르므로 그 평균은 누구의 점수도 아닙니다. 앤드리아의 점수가 **바로** 중앙값이므로 $3n$은 홀수이고, 따라서 n도 홀수입니다. 또 앤드리아는 정확히 한가운데인 $\dfrac{3n+1}{2}$등입니다(최고점을 1등으로 셉니다).

2단계: 하한. 칼라가 64등이므로 학생은 적어도 64명이고, $3n \geq 64$입니다. $3 \cdot 21 = 63$이므로 $n \geq 22$이고, n은 홀수이므로 $n \geq 23$입니다.

3단계: 상한. 앤드리아는 팀에서 최고점이었으므로 베스보다 등수가 앞섭니다.

$$\frac{3n+1}{2} < 37 \quad \Longrightarrow \quad 3n+1 < 74 \quad \Longrightarrow \quad 3n < 73,$$

따라서 $n \leq 24$이고, n은 홀수이므로 $n \leq 23$입니다.

4단계. 그러므로 $n = 23$입니다. 확인: 학생은 69명이고, 앤드리아는 35등으로 베스(37등)보다 앞서며, 칼라의 64등도 69명 안에 들어갑니다.

주의. 홀짝 단계를 건너뛰면 $64 \leq 3n < 73$만 남아 $n = 22, 23, 24$가 모두 가능해집니다. 즉 (A), (B), (C)가 모두 살아남습니다. 학생이 66명이나 72명이면 중앙값이 어느 한 학생의 점수가 아니므로, 홀수인 값만 가능합니다.

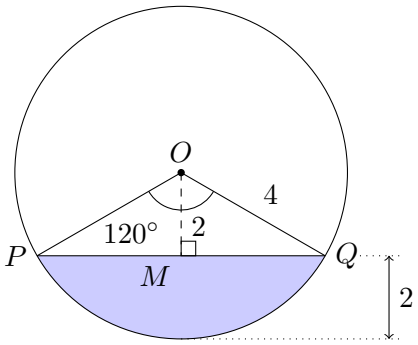
정답: (B) 23

9 기하

출처: 2008 AMC 10B 19번

> 반지름이 4피트이고 높이가 9피트인 원기둥 모양의 물탱크가 옆으로 뉘어 놓여 있다. 이 탱크에 물이 깊이 2피트까지 채워져 있다. 물의 부피는 몇 세제곱피트인가?
>
> **(A)** $24\pi - 36\sqrt{2}$ **(B)** $24\pi - 24\sqrt{3}$ **(C)** $36\pi - 36\sqrt{3}$ **(D)** $36\pi - 24\sqrt{2}$ **(E)** $48\pi - 36\sqrt{3}$

핵심 아이디어. 탱크가 옆으로 누워 있으므로, 길이 9피트를 따라 자른 단면은 모두 똑같습니다. 반지름이 4인 원에서 현 아래쪽 조각에 물이 차 있는 모양입니다. 따라서 부피는 (그 조각의 넓이) $\times 9$입니다. 현으로 잘린 부분의 넓이는 **부채꼴 빼기 삼각형**으로 구합니다.



1단계: 각. 물의 깊이가 2피트이고 반지름이 4이므로, 수면 $\overline{PQ}$는 중심 O보다 $4-2=2$피트 아래에 있습니다. O에서 $\overline{PQ}$에 내린 수선의 발을 M이라 하면 $OM=2$, $OP=4$입니다. 빗변의 길이가 한 변의 길이의 두 배인 직각삼각형은 세 각의 크기가 30, 60, 90도인 삼각형이므로 $\angle POM = 60^\circ$, $PM = 2\sqrt{3}$입니다. 따라서 $\angle POQ = 120^\circ$, $PQ = 4\sqrt{3}$입니다.

2단계: 단면. 부채꼴 POQ의 넓이는 $\dfrac{120}{360}\cdot\pi\cdot 4^2 = \dfrac{16\pi}{3}$입니다. 삼각형 POQ의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot PQ\cdot OM = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3}\cdot 2 = 4\sqrt{3}$입니다. 물의 단면은 부채꼴에서 삼각형을 뺀 것이므로 넓이는 $\dfrac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}$입니다.

3단계: 부피.

$$9\left(\frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}\right) = 48\pi - 36\sqrt{3} \approx 88.4.$$

검산: 탱크를 가득 채우면 $\pi\cdot 4^2\cdot 9 = 144\pi \approx 452$세제곱피트입니다. 폭이 8피트인 원의 바닥에 깔린 2피트 두께의 층은 그 절반보다 훨씬 적어야 하므로, 약 5분의 1이라는 결과는 타당합니다.

정답: (E) $48\pi - 36\sqrt{3}$

10 정수론

출처: 2013 AMC 10B 20번

수 2013을 다음 꼴로 나타낸다.

$$2013 = \frac{a_1!a_2!\cdots a_m!}{b_1!b_2!\cdots b_n!},$$

여기서

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_m$$

과

$$b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$$

은 양의 정수이고, $a_1 + b_1$은 가능한 한 작다. $|a_1 - b_1|$의 값은?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5

핵심 아이디어. 팩토리얼과 특정한 수가 함께 나오면 소인수분해를 해 봅시다. 소수 p가 $k!$을 나누는 것은 $k \geq p$일 때와 정확히 같습니다. 따라서 2013의 가장 큰 소인수 때문에 a_1이 커야 하고, 그 큰 팩토리얼은 분모가 약분해야 할 다른 소수들까지 끌고 들어옵니다.

1단계: a_1의 하한. $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$이고 61은 소수입니다. 분모를 없애면 다음과 같습니다.

$$a_1!\,a_2!\cdots a_m! = 2013 \cdot b_1!\,b_2!\cdots b_n!,$$

따라서 61은 좌변을 나눕니다. 곱을 나누는 소수는 인수 중 하나를 나누므로, 61은 어떤 $a_i!$을 나누고, 이를 위해서는 $a_i \geq 61$이어야 합니다. 그러므로 $a_1 \geq 61$입니다.

2단계: b_1의 하한. 이제 $a_1!$은 소수 59를 인수로 가지므로($59 \leq 61$이므로), 59는 좌변을 나누고 따라서 우변도 나눕니다. 그런데 59는 $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$을 나누지 않으므로, 59는 어떤 $b_j!$을 나누어야 하고 $b_1 \geq 59$입니다. 그러므로 $a_1 + b_1 \geq 120$입니다.

3단계: 120은 실제로 가능합니다. $a_1 = 61$, $b_1 = 59$로 잡으면 $\frac{61!}{59!} = 61 \cdot 60$입니다. 여기서 다시 60으로 나누고 $33 = 3 \cdot 11$을 곱해야 합니다. 즉, $\frac{11}{20}$을 곱해야 합니다. $\frac{11!}{10!} = 11$이고 $\frac{3!}{5!} = \frac{1}{20}$이므로 다음과 같이 나타낼 수 있습니다.

$$2013 = \frac{61! \cdot 11! \cdot 3!}{59! \cdot 10! \cdot 5!},$$

여기서 $61 \geq 11 \geq 3$, $59 \geq 10 \geq 5$입니다. 확인: $61 \cdot 60 \cdot 11 \cdot \frac{1}{20} = 61 \cdot 33 = 2013$.

4단계. $a_1 \geq 61$이고 $b_1 \geq 59$이므로, 합이 120이 되려면 정확히 $a_1 = 61$, $b_1 = 59$여야 합니다. 따라서 $|a_1 - b_1| = 2$입니다.

주의. 가장 먼저 떠오르는 시도는 $\frac{61!}{60!} = 61$로, $2013 = \frac{61! \cdot 11! \cdot 3!}{60! \cdot 10! \cdot 2!}$이 되어 $|a_1 - b_1| = 1$, 즉 (A)를 얻습니다. 이 표현도 올바르지만 $a_1 + b_1 = 121$입니다. 분모를 $59!$까지 낮추면 더 작게 만들 수 있습니다.

정답: (B) 2