AMC 10

제 10 회

하프 모의고사

해설

정답표 • 출처 • 단계별 풀이

10문항 모두 AMC 10 기출(2000–2019)의 10–20번 문항에서 가져와 원래 번호 순서대로 배열한 것입니다. 원문 © Mathematical Association of America.

정답표와 출처

번호	정답	출처	영역
1	**E**	2007 AMC 10A 10번	대수
2	**E**	2003 AMC 10A 11번	정수론
3	**D**	2016 AMC 10B 12번	경우의 수와 확률
4	**E**	2015 AMC 10B 13번	기하
5	**A**	2004 AMC 10A 14번	대수
6	**D**	2018 AMC 10A 15번	기하
7	**D**	2005 AMC 10A 16번	정수론
8	**C**	2019 AMC 10B 17번	경우의 수와 확률
9	**D**	2002 AMC 10B 18번	기하
10	**D**	2013 AMC 10B 19번	대수

1 대수

출처: 2007 AMC 10A 10번

> 던바 가족은 어머니, 아버지, 그리고 몇 명의 자녀로 이루어져 있다. 가족 구성원의 나이의 평균은 20이고, 아버지의 나이는 48세이며, 어머니와 자녀들의 나이의 평균은 16이다. 이 가족의 자녀는 몇 명인가?
>
> **(A)** 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 6

핵심 아이디어. 각 평균을 **합계**로 바꾸어 봅시다. 합계 = 평균 × 사람 수입니다. 그런 다음 가족 전체의 나이의 합을 두 가지 방법으로 나타냅니다.

자녀의 수를 N이라 하면, 가족은 $N+2$명이고 "어머니와 자녀들" 무리는 $N+1$명입니다.

가족 전체의 평균이 20이므로 나이의 합은 $20(N+2) = 20N + 40$입니다.

같은 합계를 아버지의 나이 48과 어머니와 자녀들의 나이의 합 $16(N+1) = 16N + 16$을 더해서 구하면 $16N + 64$입니다.

두 합계가 같으므로 $20N + 40 = 16N + 64$이고, $4N = 24$, $N = 6$입니다.

주의. 어머니도 평균이 16인 무리에 속합니다. 이 무리의 합계를 $16N$으로 쓰면 $20N + 40 = 16N + 48$이 되어 $N = 2$, 즉 (A)를 고르게 됩니다.

정답: (E) 6

2 정수론

출처: 2003 AMC 10A 11번

> 두 5자리 수 $AMC10$과 $AMC12$의 합이 123422이다. $A + M + C$의 값은?
>
> **(A)** 10 **(B)** 11 **(C)** 12 **(D)** 13 **(E)** 14

핵심 아이디어. 두 수는 모두 같은 세 자리 AMC로 시작하므로, AMC를 하나의 3자리 묶음으로 다루어 봅시다. 각 수를 "묶음 $\times 100$에 마지막 두 자리를 더한 것"으로 쓰면 이 퍼즐은 일차방정식 하나가 됩니다.

1단계. 여기서 $AMC10$은 곱이 아니라 숫자 A, M, C, 1, 0을 차례로 늘어놓은 수를 뜻합니다. 묶음 AMC를 왼쪽으로 두 자리 옮기면 100이 곱해지므로 다음과 같습니다.

$$AMC10 = 100 \cdot AMC + 10, \qquad AMC12 = 100 \cdot AMC + 12.$$

2단계. 두 식을 더하면 다음과 같습니다.

$$200 \cdot AMC + 22 = 123422,$$

따라서 $200 \cdot AMC = 123400$이고 $AMC = 123400 \div 200 = 617$입니다.

3단계. 그러므로 $A = 6$, $M = 1$, $C = 7$입니다. 확인: $61710 + 61712 = 123422$. 따라서 $A + M + C = 6 + 1 + 7 = 14$입니다.

다른 풀이. 더하는 대신 평균을 이용해 봅시다. 두 수는 마지막 두 자리 10과 12만 다르므로 두 수의 평균은 $AMC11$입니다. 한편 평균은 $123422 \div 2 = 61711$이기도 합니다. 앞의 세 자리를 읽으면 $AMC = 617$이고, $A + M + C = 14$입니다.

정답: (E) 14

---

3 경우의 수와 확률

출처: 2016 AMC 10B 12번

> 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$에서 서로 다른 두 수를 임의로 골라 곱한다. 그 곱이 짝수일 확률은?
>
> **(A)** 0.2 **(B)** 0.4 **(C)** 0.5 **(D)** 0.7 **(E)** 0.8

핵심 아이디어. 곱은 인수 중 **하나**만 짝수여도 짝수가 되므로 여러 경우로 나뉩니다. 반대 사건은 간단합니다. 곱이 홀수인 것은 **두** 수가 모두 홀수일 때뿐이므로, 그 경우를 세어 1에서 빼 봅시다.

1단계. 다섯 수에서 서로 다른 두 수를 고르는 방법의 수는 $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$이고, 모두 일어날 가능성이 같습니다.

2단계. 곱이 홀수인 것은 두 수가 모두 홀수일 때와 정확히 같습니다. 홀수는 1, 3, 5이고, 이 중 두 수로 이루어진 쌍은 $\{1, 3\}$, $\{1, 5\}$, $\{3, 5\}$로 $\binom{3}{2} = 3$쌍입니다.

3단계. 따라서 곱이 홀수일 확률은 $\frac{3}{10} = 0.3$이고, 곱이 짝수일 확률은 $1 - 0.3 = 0.7$입니다.

곱이 짝수인 쌍을 직접 나열해 확인해 봅시다. $\{1, 2\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 4\}$, $\{4, 5\}$로, 열 쌍 중 일곱 쌍입니다.

주의. "다섯 수 중 두 수가 짝수이므로 확률은 $\frac{2}{5} = 0.4$"라고 생각하면 (B)를 고르게 되는데, 이는 두 수 중 하나만 따져 본 것입니다. 나머지 한 수도 인수 2를 똑같이 제공할 수 있습니다.

정답: (D) 0.7

4 기하

출처: 2015 AMC 10B 13번

> 직선 $12x + 5y = 60$과 두 좌표축으로 둘러싸인 삼각형이 있다. 이 삼각형의 세 높이의 합은?
>
> **(A)** 20 **(B)** $\frac{360}{17}$ **(C)** $\frac{107}{5}$ **(D)** $\frac{43}{2}$ **(E)** $\frac{281}{13}$

핵심 아이디어. 두 좌표축은 직각으로 만나므로 이 삼각형은 직각삼각형입니다. 직각삼각형에서는 한 직각변이 다른 직각변에 대한 높이입니다. 빗변에 대한 높이만 따로 구하면 되고, 이는 넓이로 구할 수 있습니다.

1단계. 직선이 두 축과 만나는 점을 구합니다. $y = 0$을 대입하면 $12x = 60$이므로 $x = 5$이고, $x = 0$을 대입하면 $5y = 60$이므로 $y = 12$입니다. 세 꼭짓점은 $(0, 0)$, $(5, 0)$, $(0, 12)$입니다.

2단계. 두 직각변의 길이는 5와 12이므로 빗변의 길이는 $\sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$입니다. 길이가 12인 변은 길이가 5인 변에 수직이므로 그 변에 대한 높이이고, 반대도 마찬가지입니다. 따라서 두 높이는 12와 5입니다.

3단계. 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$입니다. 빗변에 대한 높이를 h라 하면 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot h$이기도 하므로 $13h = 60$, $h = \frac{60}{13}$입니다.

4단계. 세 높이의 합은 다음과 같습니다.

$$12 + 5 + \frac{60}{13} = \frac{156 + 65 + 60}{13} = \frac{281}{13}.$$

주의. 새로운 선분 세 개를 찾으려 하지 마십시오. 직각변 자체가 높이라는 것을 잊으면 계산한 $\frac{60}{13}$만 남는데, 이것은 선택지에 없습니다.

다른 풀이. 빗변에 대한 높이는 원점과 직선 $12x + 5y - 60 = 0$ 사이의 거리이므로 $\frac{|-60|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = \frac{60}{13}$입니다.

정답: (E) $\frac{281}{13}$

5 대수

출처: 2004 AMC 10A 14번

> 폴라의 지갑에 들어 있는 페니(1센트), 니켈(5센트), 다임(10센트), 쿼터(25센트) 동전 전체의 평균 금액은 20센트이다. 폴라에게 쿼터가 하나 더 있다면 평균 금액은 21센트가 된다. 폴라의 지갑에 들어 있는 다임은 몇 개인가?
>
> **(A)** 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

핵심 아이디어. 같은 미지의 개수로 평균이 두 번 주어지면, 늘 하던 대로 각 평균을 합계(평균 $\times$ 동전 수)로 바꿉니다. 그러면 동전의 개수가 정해지고, 동전이 이렇게 적으면 어떤 동전인지는 손으로 따져 볼 수 있습니다.

1단계. 동전의 개수를 n이라 하면 전체 금액은 $20n$센트입니다. 쿼터가 하나 더 있으면 동전 $n+1$개의 금액은 $20n+25$센트이고, 평균은 21이므로 다음과 같습니다.

$$20n + 25 = 21(n+1) = 21n + 21,$$

따라서 $n = 4$입니다. 폴라는 동전 4개, 금액으로 $20 \cdot 4 = 80$센트를 가지고 있습니다.

2단계. 쿼터의 개수를 세어 봅시다. 쿼터 네 개는 100센트로 너무 많습니다. 쿼터가 많아야 두 개이면 나머지 동전은 각각 많아야 10센트이므로, 동전 네 개의 합은 많아야 $2 \cdot 25 + 2 \cdot 10 = 70$센트로 너무 적습니다. 따라서 쿼터는 정확히 세 개입니다.

3단계. 쿼터 세 개는 75센트이므로, 남은 동전 하나의 금액은 $80 - 75 = 5$센트, 즉 니켈입니다. 지갑에는 쿼터 세 개와 니켈 하나가 있고$(25+25+25+5=80)$, 다임은 없습니다.

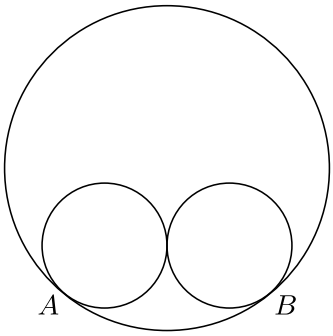
주의. "페니, 니켈, 다임, 쿼터"는 들어 있을 수 있는 동전의 종류를 나열한 것일 뿐, 각각 하나씩 있다는 뜻이 아닙니다. 실제로 하나씩이라면 동전 네 개의 금액은 $1+5+10+25 = 41$센트에 불과하여 80센트가 아닙니다.

정답: (A) 0

6 기하

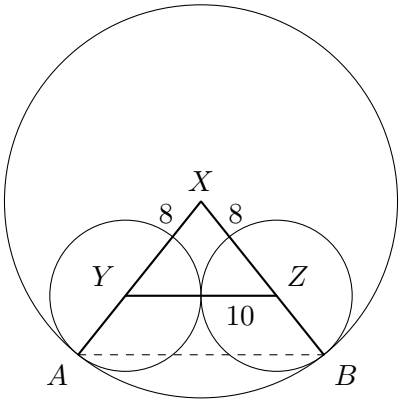
출처: 2018 AMC 10A 15번

그림과 같이 반지름이 5인 두 원이 서로 외접하고, 반지름이 13인 원에 각각 점 A와 B에서 내접한다. 거리 AB는 $\frac{m}{n}$ 꼴로 나타낼 수 있다. 단, m과 n은 서로소인 양의 정수이다. $m+n$의 값은?



(A) 21 **(B)** 29 **(C)** 58 **(D)** 69 **(E)** 93

핵심 아이디어. 원끼리 접할 때는 언제나 두 중심을 이어 봅시다. 접점은 두 중심을 지나는 직선 위에 있습니다. 여기서는 그 덕분에 A와 B가 큰 원의 중심에서 뻗어 나가는 반직선 위에 놓이고, $\overline{AB}$는 두 작은 원의 중심을 잇는 선분을 확대한 것이 됩니다.



1단계. 큰 원의 중심을 X, 두 작은 원의 중심을 Y, Z라 합시다. 두 작은 원은 외접하므로 $YZ = 5+5 = 10$입니다. 각 작은 원은 큰 원에 내접하므로 $XY = XZ = 13-5 = 8$입니다.

2단계. 접점 A는 반직선 XY 위에 있고, 큰 원 위의 점이므로 X로부터의 거리가 13입니다. 마찬가지로 B는 반직선 XZ 위에 있고 $XB = 13$입니다.

3단계. 삼각형 XAB와 XYZ는 X에서의 각을 공유하고, $\frac{XA}{XY} = \frac{XB}{XZ} = \frac{13}{8}$입니다. 따라서 두 삼각형은 닮음비가 $\frac{13}{8}$인 닮은 도형이고, 다음이 성립합니다.

$$AB = \frac{13}{8} \cdot YZ = \frac{13}{8} \cdot 10 = \frac{130}{8} = \frac{65}{4}.$$

65와 4는 서로소이므로 $m+n=65+4=69$입니다.

주의. 비를 거꾸로 써서 $AB=\frac{8}{13}\cdot 10=\frac{80}{13}$으로 계산하면 $80+13=93$, 즉 (E)를 고르게 됩니다. 간단히 확인하면 잡아낼 수 있습니다. A와 B는 Y와 Z보다 X에서 더 멀리 있으므로 AB는 10보다 **길어야** 합니다.

정답: (D) 69

---

7 정수론

출처: 2005 AMC 10A 16번

두 자리 수에서 그 수의 각 자리 숫자의 합을 뺀다. 그 결과의 일의 자리 숫자가 6이다. 이러한 성질을 가진 두 자리 수는 몇 개인가?

(A) 5 **(B)** 7 **(C)** 9 **(D)** 10 **(E)** 19

핵심 아이디어. 두 자리 수의 각 자리 숫자에 관한 문제는 그 수를 $10a+b$로 써 보라는 신호입니다. 여기서는 효과가 바로 나타납니다. 각 자리 숫자의 합을 빼면 일의 자리 숫자 b가 소거되므로 십의 자리 숫자만 중요합니다.

1단계. 수를 $10a+b$로 씁니다. 여기서 십의 자리 숫자 a는 1부터 9까지, 일의 자리 숫자 b는 0부터 9까지입니다. 각 자리 숫자의 합을 빼면 다음과 같습니다.

$$(10a+b)-(a+b)=9a.$$

예를 들어 $47-(4+7)=47-11=36=9\cdot 4$입니다.

2단계. $a=1,2,\ldots,9$일 때 $9a$의 값은 다음과 같습니다.

$$9,\ 18,\ 27,\ 36,\ 45,\ 54,\ 63,\ 72,\ 81.$$

이 중 일의 자리 숫자가 6인 것은 36뿐이므로 $a=4$입니다.

3단계. 결과 $9a$는 b와 전혀 관계가 없으므로, 0부터 9까지의 어떤 b를 골라도 됩니다. 구하는 수는 $40,41,\ldots,49$로 모두 열 개입니다.

주의. 특별한 수 하나를 찾고 멈추고 싶어지기 쉽습니다. b가 소거되므로 $a=4$가 되기만 하면 b의 값 열 개가 **모두** 가능합니다.

정답: (D) 10

8 경우의 수와 확률

출처: 2019 AMC 10B 17번

> 빨간 공 하나와 초록 공 하나를 양의 정수로 번호가 매겨진 상자들에 임의로, 서로 독립적으로 던져 넣는다. 각 공에 대하여 그 공이 k번 상자에 들어갈 확률은 2^{-k}이다. 단, $k = 1, 2, 3, \ldots$. 빨간 공이 초록 공보다 더 큰 번호의 상자에 들어갈 확률은?
>
> **(A)** $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{2}{7}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{3}{8}$ **(E)** $\frac{3}{7}$

핵심 아이디어. 두 공은 완전히 같은 규칙을 따르므로 "빨간 공이 더 큰 번호"일 확률과 "초록 공이 더 큰 번호"일 확률은 같아야 합니다. 이 대칭성 덕분에 **같은 상자**에 들어갈 확률만 구하면 되고, 그것은 간단한 등비급수입니다.

1단계. 다음 세 가지 중 정확히 하나가 일어납니다. 빨간 공이 더 큰 번호, 초록 공이 더 큰 번호, 또는 두 공이 같은 상자. 대칭성에 의해 앞의 두 경우의 확률은 같으므로 이를 p라 하면 다음과 같습니다.

$$2p + P(\text{같은 상자}) = 1.$$

2단계. 두 공이 모두 k번 상자에 들어갈 확률은 $2^{-k} \cdot 2^{-k} = 4^{-k}$입니다. 모든 상자에 대하여 더하면 다음과 같습니다.

$$P(\text{같은 상자}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots = \frac{1/4}{1 - 1/4} = \frac{1}{3}.$$

3단계. 그러면 $2p = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$이므로 $p = \frac{1}{3}$입니다.

결국 빨간 공이 더 큰 번호, 초록 공이 더 큰 번호, 같은 상자의 세 경우 모두 확률이 정확히 $\frac{1}{3}$입니다.

주의. "대칭이므로 답은 $\frac{1}{2}$이다"라고 하면 두 공이 같은 상자에 들어갈 수 있다는 것을 잊은 것입니다. $\frac{1}{2}$은 선택지에조차 없습니다. 대칭성으로 반씩 나누는 것은 같은 상자에 들어가는 경우를 뺀 나머지뿐입니다.

다른 풀이. 직접 계산해 봅시다. 빨간 공이 r번 상자에 들어가면, 초록 공이 더 작은 번호의 상자에 들어갈 확률은 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{r-1}} = 1 - 2^{1-r}$입니다. 따라서 다음과 같습니다.

$$p = \sum_{r=1}^{\infty} 2^{-r}\left(1 - 2^{1-r}\right) = \sum_{r=1}^{\infty} 2^{-r} - 2\sum_{r=1}^{\infty} 4^{-r} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

정답: (C) $\frac{1}{3}$

9 기하

출처: 2002 AMC 10B 18번

> 평면 위에 서로 다른 원 네 개를 그린다. 적어도 두 원이 만나는 점의 개수의 최댓값은?
>
> **(A)** 8 **(B)** 9 **(C)** 10 **(D)** 12 **(E)** 16

핵심 아이디어. 모든 교점은 원들의 어떤 **쌍**에 속하고, 한 쌍이 만날 수 있는 횟수는 정해져 있습니다. 따라서 쌍마다 개수의 상한을 구합니다. 그리고 최댓값을 묻는 문제이므로, 실제로 그 상한에 도달하는 그림을 보여야 합니다.

1단계 (상한). 서로 다른 두 원은 많아야 2개의 점에서 만납니다. 원 네 개로 만들 수 있는 쌍은 $\binom{4}{2} = \frac{4\cdot 3}{2} = 6$개입니다. 각 교점은 적어도 두 원 위에 있으므로 적어도 한 쌍의 교점입니다. 따라서 이러한 점은 많아야 $6 \cdot 2 = 12$개입니다.

2단계 (상한에 도달함). 단위정사각형의 네 꼭짓점 $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$을 중심으로 하고 반지름이 1인 원 네 개를 그립니다. 두 중심 사이의 거리는 1 또는 $\sqrt{2}$이고 둘 다 2보다 작으므로, 모든 쌍의 두 원은 2개의 점에서 만납니다. 세 원 위에 동시에 있는 점은 없으므로 12개의 점은 모두 서로 다릅니다. (예를 들어 $(0,0)$과 $(1,0)$을 중심으로 하는 두 원은 $\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$에서 만나는데, 두 점 모두 $(0,1)$이나 $(1,1)$로부터의 거리가 1이 아닙니다.)

따라서 최댓값은 12입니다.

주의. "각 원이 나머지 세 원과 두 번씩 만난다"고 세면 $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$가 되지만, 이렇게 세면 모든 쌍을 두 원에서 한 번씩, 즉 두 번 세게 됩니다. 2로 나누면 다시 12가 됩니다.

정답: (D) 12

10 대수

출처: 2013 AMC 10B 19번

> 실수 c, b, a는 이 순서로 등차수열을 이루고 $a \geq b \geq c \geq 0$이다. 이차식 $ax^2 + bx + c$의 근이 정확히 하나일 때, 이 근은?
>
> **(A)** $-7 - 4\sqrt{3}$ **(B)** $-2 - \sqrt{3}$ **(C)** -1 **(D)** $-2 + \sqrt{3}$ **(E)** $-7 + 4\sqrt{3}$

핵심 아이디어. 두 가지 신호가 있습니다. "등차수열"은 가운데 항을 중심으로 각 항을 $b-d$, b, $b+d$로 쓰라는 신호이고, "근이 정확히 하나"는 판별식이 0이라는 신호입니다. 둘을 합치면 d와 b의 비가 나옵니다.

1단계. 공차를 d라 하면 $c = b - d$, $a = b + d$입니다. $a \geq b$이므로 $d \geq 0$입니다. 또 $b > 0$입니다. $b = 0$이면 $c \geq 0$에서 $d = 0$이고 $a = 0$이 되어 이차식이 아니기 때문입니다.

2단계. 근이 정확히 하나라는 것은 $b^2 - 4ac = 0$이라는 뜻입니다.

$$b^2 = 4(b+d)(b-d) = 4b^2 - 4d^2,$$

따라서 $4d^2 = 3b^2$이고, $d \geq 0$이므로 $d = \frac{\sqrt{3}}{2}\, b$입니다.

3단계. 비만 중요하므로 $b = 2$로 잡습니다. 그러면 $d = \sqrt{3}$, $a = 2 + \sqrt{3}$, $c = 2 - \sqrt{3} > 0$이므로 모든 조건이 성립합니다. 중근은 다음과 같습니다.

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2(2+\sqrt{3})} = -\frac{1}{2+\sqrt{3}} = -\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = -(2-\sqrt{3}).$$

즉 $-2 + \sqrt{3}$입니다. 판별식을 확인하면 $2^2 - 4(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 4 - 4(4-3) = 0$입니다.

주의. 음의 제곱근 $d = -\sqrt{3}$을 택하면 $a \geq b$를 무시하게 됩니다. 그러면 $a = 2 - \sqrt{3}$이고 근은 $-\frac{1}{2-\sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3}$, 즉 (B)가 됩니다.

정답: (D) $-2 + \sqrt{3}$