
AMC 10

하프 모의고사

제 11 회

해설

정답표 • 출처 • 단계별 풀이

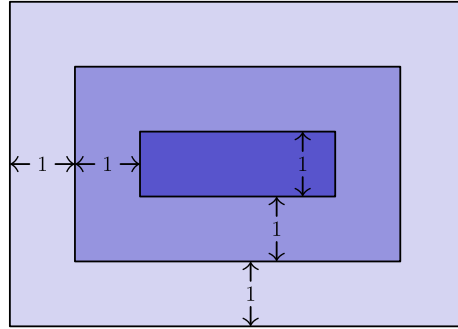
정답표와 출처

번호	정답	출처	영역
1	B	2016 AMC 10A 10번	대수
2	B	2005 AMC 10A 11번	기하
3	E	2003 AMC 10B 13번	정수론
4	A	2001 AMC 10 14번	대수
5	C	2017 AMC 10A 15번	경우의 수와 확률
6	B	2015 AMC 10A 16번	대수
7	D	2006 AMC 10B 17번	경우의 수와 확률
8	E	2014 AMC 10B 18번	대수
9	D	2000 AMC 10 19번	기하
10	D	2014 AMC 10A 20번	정수론

1 대수

출처: 2016 AMC 10A 10번

그림과 같이 세 가지 색으로 깔개를 만들었다. 서로 다른 색으로 된 세 영역의 넓이는 등차수열을 이룬다. 안쪽 직사각형의 폭은 1피트이고, 색칠된 두 영역은 각각 네 번 모두에서 폭이 1피트이다. 안쪽 직사각형의 길이는 몇 피트인가?



(A) 1

(B) 2

(C) 4

(D) 6

(E) 8

핵심 아이디어. 모르는 길이를 ℓ 이라 하고, 각 색 영역의 넓이를 ℓ 로 나타낸 다음 두 차가 같도록 놓아 봅시다.

1단계. 안쪽 직사각형은 두 변의 길이가 1과 ℓ 이므로 넓이는 ℓ 입니다.

2단계. 모든 변에 폭 1피트의 띠를 두르면 가로와 세로가 각각 2씩 늘어나므로, 중간 직사각형의 두 변은 3과 $\ell + 2$ 입니다. 중간 영역은 이 직사각형에서 안쪽 직사각형을 뺀 것이므로 넓이는 $3(\ell + 2) - \ell = 2\ell + 6$ 입니다.

3단계. 깔개 전체의 두 변은 5와 $\ell + 4$ 입니다. 바깥 영역의 넓이는 $5(\ell + 4) - 3(\ell + 2) = 2\ell + 14$ 입니다.

4단계. 등차수열에서는 이웃한 항의 차이가 모두 같습니다. 두 번째 차는 $(2\ell + 14) - (2\ell + 6) = 8$ 이므로, 첫 번째 차 $(2\ell + 6) - \ell = \ell + 6$ 도 8이어야 합니다. 따라서 $\ell = 2$ 입니다.

확인: 세 넓이는 2, 10, 18로, 8씩 커집니다.

주의. 중간 영역과 바깥 영역은 액자 모양입니다. 직사각형 전체의 넓이 $3(\ell + 2)$ 와 $5(\ell + 4)$ 를 그대로 세 영역의 넓이로 쓰면 넓이가 ℓ , $3\ell + 6$, $5\ell + 20$ 이 되어, 두 차 $2\ell + 6$ 과 $2\ell + 14$ 는 결코 같을 수 없습니다. 즉 해가 없습니다.

정답: (B) 2

2 기하

출처: 2005 AMC 10A 11번

한 모서리의 길이가 n 인 나무 정육면체의 여섯 면을 모두 빨간색으로 칠한 다음, n^3 개의 단위 정육면체로 잘랐다. 단위 정육면체들의 면 전체 개수 중 정확히 4분의 1이 빨간색이다. n 의 값은?

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

핵심 아이디어. 두 가지를 따로 세어 봅시다. 작은 면 전체의 개수와 빨간 면의 개수를 세고, 그 비를 $\frac{1}{4}$ 로 놓습니다. 빨간 면은 큰 정육면체의 칠해진 겉면을 이루던 단위 정사각형과 정확히 같으므로, 어느 정육면체가 꼭짓점에 있고 어느 것이 모서리에 있는지 따지지 않아도 쉽게 셀 수 있습니다.

1단계. 단위 정육면체는 n^3 개이고 각각 면이 6개이므로, 작은 면은 모두 $6n^3$ 개입니다.

2단계. 칠해진 것은 큰 정육면체의 바깥쪽뿐입니다. 큰 정육면체의 면 6개는 각각 단위 정사각형이 $n \times n$ 격자 모양으로 모인 것이고, 그 정사각형 하나하나가 단위 정육면체 하나의 면입니다. 따라서 빨간 작은 면은 정확히 $6n^2$ 개입니다. 자르면서 새로 생긴 면은 모두 칠해지지 않은 면입니다.

3단계. 빨간 면의 비율은 다음과 같습니다.

$$\frac{\text{빨간 면}}{\text{전체 면}} = \frac{6n^2}{6n^3} = \frac{1}{n}.$$

$\frac{1}{n} = \frac{1}{4}$ 로 놓으면 $n = 4$ 입니다.

확인: $n = 4$ 이면 단위 정육면체는 64개, 그 면은 384개이고, 그중 $6 \cdot 16 = 96$ 개가 빨간색입니다. 실제로 $\frac{96}{384} = \frac{1}{4}$ 입니다.

주의. 묻는 것은 정육면체가 아니라 면입니다. 빨간 페인트가 조금이라도 묻은 단위 정육면체 ($n^3 - (n-2)^3$ 개)를 세면 다른 질문에 답하게 됩니다. $n = 4$ 일 때 그 수는 64개 중 56개로, 4분의 1과는 거리가 멉니다.

정답: (B) 4

3 정수론

출처: 2003 AMC 10B 13번

양의 정수 x 의 각 자리 숫자의 합을 $\clubsuit(x)$ 라 하자. 예를 들어 $\clubsuit(8) = 8$ 이고 $\clubsuit(123) = 1 + 2 + 3 = 6$ 이다. $\clubsuit(\clubsuit(x)) = 3$ 을 만족시키는 두 자리 수 x 는 몇 개인가?

- (A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 9 (E) 10

핵심 아이디어. 바깥쪽부터 안쪽으로 풀어 봅시다. $y = \clubsuit(x)$ 라 하면 조건은 $\clubsuit(y) = 3$ 일 뿐입니다. x 가 두 자리 수이므로 y 는 작은 수이고, 가능한 y 의 값은 아주 적습니다. 먼저 그 값들을 찾고, 각 값을 만드는 x 를 세면 됩니다.

1단계. y 는 얼마나 클 수 있을까요? 두 자리 수의 각 자리 숫자는 많아야 9와 9이므로 $y = \clubsuit(x) \leq 18$ 입니다. 또 $y \geq 1$ 입니다.

2단계. 1부터 18까지의 y 중에서 각 자리 숫자의 합이 3인 것은 무엇일까요? $y = 3$ 과 $y = 12$ 뿐입니다. (그다음 수인 21은 18보다 큼니다.)

3단계. 각 자리 숫자의 합이 3인 두 자리 수 x : 십의 자리 숫자는 1, 2, 3 중 하나이고, 그러면 12, 21, 30이 됩니다. 모두 3개입니다.

4단계. 각 자리 숫자의 합이 12인 두 자리 수 x : 십의 자리 숫자 a 와 일의 자리 숫자 $12 - a$ 가 모두 9 이하여야 하므로, a 는 3부터 9까지입니다.

39, 48, 57, 66, 75, 84, 93.

모두 7개입니다.

5단계. 따라서 x 의 값은 모두 $3 + 7 = 10$ 개입니다.

주의. “ x 의 각 자리 숫자의 합이 3”에서 멈추면 $\clubsuit$ 연산을 두 번 적용한다는 사실을 잊은 것입니다. 그러면 12, 21, 30만 세게 되어 답이 3, 즉 (A)가 됩니다. 30을 빠뜨리면(일의 자리 숫자가 0이어도 됩니다) 모두 $2 + 7 = 9$ 개, 즉 (D)가 됩니다.

정답: (E) 10

4 대수

출처: 2001 AMC 10 14번

어느 자선 단체가 자선 행사 티켓 140장을 모두 \$2001에 팔았다. 일부 티켓은 정가(달러 단위의 정수 금액)에 팔렸고, 나머지는 반값에 팔렸다. 정가에 팔린 티켓으로 모은 금액은?

- (A) \$782 (B) \$986 (C) \$1158 (D) \$1219 (E) \$1449

핵심 아이디어. 미지수는 두 개(정가 티켓의 수와 정가)인데 방정식은 하나뿐입니다. 이때 실마리는 두 미지수가 모두 정수라는 점입니다. 방정식을 “곱 = 수” 꼴로 바꾸고 그 수의 약수를 살펴봅시다.

1단계. 정가 p 달러에 팔린 티켓을 n 장이라 하면, 나머지 $140 - n$ 장은 $\frac{p}{2}$ 달러에 팔렸습니다. 따라서 다음이 성립합니다.

$$np + (140 - n) \cdot \frac{p}{2} = 2001.$$

2단계. 양변에 2를 곱해 분모를 없애면 $2np + 140p - np = 4002$ 이고, 정리하면 다음과 같습니다.

$$p(n + 140) = 4002.$$

3단계. 소인수분해하면 $4002 = 2 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 29$ 입니다. “일부” 티켓은 정가에, 나머지는 반값에 팔렸으므로 $1 \leq n \leq 139$ 이고, 따라서 $n + 140$ 은 141과 279 사이에 있는 4002의 약수입니다. 이 범위 근처에 있는 4002의 약수는 138, 174, 667이고, 이 중 범위에 맞는 것은 $174 = 2 \cdot 3 \cdot 29$ 뿐입니다.

4단계. 따라서 $n + 140 = 174$ 이므로 정가 티켓은 $n = 34$ 장, 정가는 $p = \frac{4002}{174} = 23$ 달러입니다. 정가 티켓으로 모은 금액은 $34 \cdot 23 = \$782$ 입니다.

확인: 나머지 106장은 \$11.50에 팔려 \$1219를 모으고, $782 + 1219 = 2001$ 입니다.

주의. 질문을 잘 읽어야 합니다. 묻는 것은 정가 티켓으로 모은 금액입니다. 반값 티켓으로 모은 금액은 $106 \cdot \$11.50 = \1219 로, 선택지 (D)입니다.

정답: (A) \$782

5 경우의 수와 확률

출처: 2017 AMC 10A 15번

클로에는 구간 $[0, 2017]$ 에서 실수 하나를 균등하게 무작위로 고른다.

이와 독립적으로, 로랑은 구간 $[0, 4034]$ 에서 실수 하나를 균등하게 무작위로 고른다.

로랑이 고른 수가 클로에가 고른 수보다 클 확률은?

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{5}{6}$ (E) $\frac{7}{8}$

핵심 아이디어. 로랑의 구간은 클로에의 구간의 정확히 두 배이므로, 로랑의 수가 $[0, 4034]$ 의 어느 쪽 절반에 떨어지는지로 경우를 나누어 봅시다. 위쪽 절반이면 로랑이 반드시 이기고, 아래쪽 절반이면 두 사람이 같은 구간에서 고르므로 대칭성에 의해 공정한 동전 던지기와 같습니다.

1단계. 확률 $\frac{1}{2}$ 로 로랑의 수는 $(2017, 4034]$ 에 있습니다. 클로에의 수는 2017 이하이므로, 이때는 로랑의 수가 반드시 더 큼니다.

2단계. 확률 $\frac{1}{2}$ 로 로랑의 수는 $[0, 2017]$ 에 있고, 이때 로랑의 수는 클로에의 수와 같은 구간에서 균등하게 분포합니다. 어느 쪽도 유리하지 않고, 실수에서는 두 수가 같을 확률이 0이므로, 로랑의 수가 더 클 확률은 $\frac{1}{2}$ 입니다.

3단계. 두 경우를 합치면 다음과 같습니다.

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

다른 풀이. (클로에, 로랑)의 순서쌍을 2017×4034 직사각형 안에서 균등하게 고른 점으로 생각하고, 클로에의 수를 가로축에 둡시다. 로랑의 수가 더 크지 않은 것은 점이 직선 “로랑 = 클로에” 위에 있거나 그 아래쪽에 있을 때이고, 이 부분은 직각을 낀 두 변의 길이가 2017과 2017인 직각삼각형입니다. 그 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot 2017^2$ 이므로, 직사각형 전체에 대한 비율은 다음과 같습니다.

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot 2017^2}{2017 \cdot 4034} = \frac{1}{4}$$

따라서 답은 $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ 입니다.

주의. “무작위로 고른 두 수는 어느 쪽이든 더 클 가능성이 똑같다”는 말은 두 수가 같은 구간에서 나올 때만 성립합니다. 여기서 이를 쓰면 $\frac{1}{2}$, 즉 (A)가 됩니다.

정답: (C) $\frac{3}{4}$

6 대수

출처: 2015 AMC 10A 16번

다음 두 식이 성립한다.

$$y + 4 = (x - 2)^2,$$

$$x + 4 = (y - 2)^2,$$

$x \neq y$ 일 때, 다음 식의 값은

$$x^2 + y^2?$$

(A) 10

(B) 15

(C) 20

(D) 25

(E) 30

핵심 아이디어. x 와 y 를 서로 바꾸면 한 식이 다른 식이 되므로, 자연스러운 방법은 두 식을 빼는 것과 더하는 것입니다. 빼면 $x - y$ 라는 인수가 생기고, 조건 $x \neq y$ 덕분에 바로 그 인수로 나눌 수 있습니다.

1단계. 첫 번째 식에서 두 번째 식을 빼면 다음과 같습니다.

$$y - x = (x - 2)^2 - (y - 2)^2.$$

우변은 제곱의 차이므로 $((x - 2) - (y - 2))((x - 2) + (y - 2)) = (x - y)(x + y - 4)$ 입니다. 좌변은 $-(x - y)$ 입니다.

2단계. 따라서 $-(x - y) = (x - y)(x + y - 4)$ 입니다. $x \neq y$ 이므로 양변을 $x - y$ 로 나눌 수 있습니다.

$$-1 = x + y - 4, \quad \text{따라서} \quad x + y = 3.$$

3단계. 이번에는 두 식을 더해 봅시다.

$$x + y + 8 = (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = x^2 + y^2 - 4(x + y) + 8.$$

양변의 8을 지우고 $-4(x + y)$ 를 이항하면 $x^2 + y^2 = 5(x + y) = 5 \cdot 3 = 15$ 입니다.

확인: $x \neq y$ 인 해는 $x, y = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$ (순서는 어느 쪽이든)입니다. 두 수의 합은 3이고, 제곱의 합은 $\frac{(30+6\sqrt{21})+(30-6\sqrt{21})}{4} = 15$ 입니다.

조건이 필요한 이유: $x = y$ 이면 두 식 모두 $x + 4 = (x - 2)^2$ 이 되고, 그 해는 $x = y = 0$ 과 $x = y = 5$ 이므로 $x^2 + y^2 = 0$ 또는 50이 됩니다. 문제의 조건이 이 경우들을 제외합니다.

주의. $x + y = 3$ 을 구한 뒤 그것을 제공하고 끝내면 안 됩니다. $(x + y)^2 = 9$ 에는 $2xy$ 도 들어 있으므로 $x^2 + y^2$ 이 아닙니다.

정답: (B) 15

7 경우의 수와 확률

출처: 2006 AMC 10B 17번

밥과 앨리스는 각각 주머니를 하나씩 가지고 있고, 각 주머니에는 파란색, 초록색, 주황색, 빨간색, 보라색 공이 하나씩 들어 있다. 앨리스가 자신의 주머니에서 공 하나를 임의로 꺼내 밥의 주머니에 넣는다. 그다음 밥이 자신의 주머니에서 공 하나를 임의로 꺼내 앨리스의 주머니에 넣는다. 이 과정이 끝난 후 두 주머니의 내용물이 같을 확률은?

- (A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{1}{2}$

핵심 아이디어. 어떤 공이 어디로 가는지 추적하지 말고 색을 추적합니다. 앨리스가 어떤 색을 보내든, 밥이 바로 그 색을 돌려보낼 때에만 두 주머니가 같아지므로, 문제는 밥의 주머니에서 한 번 꺼내는 것으로 줄어듭니다.

1단계. 앨리스가 색 X 인 공을 옮긴다고 합시다. 이제 앨리스에게는 X 를 제외한 네 가지 색이 있고, 밥에게는 공이 여섯 개 있습니다. 각 색의 공이 하나씩 있고, 색 X 인 공이 하나 더 있습니다.

2단계. 밥이 색 Y 인 공을 돌려보낸다고 합시다. $Y = X$ 이면, 앨리스는 빠졌던 색을 되찾아 모든 색을 하나씩 갖게 되고, 밥에게도 모든 색이 하나씩 남습니다. 두 주머니는 같습니다. $Y \neq X$ 이면, 앨리스에게는 색 Y 인 공이 두 개 있고 색 X 인 공은 없으며, 밥에게는 여전히 색 X 인 공이 두 개 있습니다. 두 주머니는 다릅니다.

3단계. 따라서 밥은 자신의 공 여섯 개 중에서 색 X 인 공 두 개 가운데 하나를 골라야 합니다. 이것은 X 가 어떤 색이었는지와 상관없으므로, 구하는 확률은 다음과 같습니다.

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

주의. 밥이 “앨리스가 준 그 공”을 돌려보내야 한다고 생각하기 쉬운데, 그럴 확률은 $\frac{1}{6}$, 즉 (B)입니다. 하지만 밥이 원래 가지고 있던 색 X 인 공도 똑같이 조건을 만족합니다. 두 주머니에서 중요한 것은 색뿐입니다.

정답: (D) $\frac{1}{3}$

8 대수

출처: 2014 AMC 10B 18번

11개의 양의 정수로 이루어진 목록이 있다. 이 목록의 평균은 10, 중앙값은 9이고, 최빈값은 8 하나뿐이다. 이 목록에 있는 정수가 가질 수 있는 가장 큰 값은?

- (A) 24 (B) 30 (C) 31 (D) 33 (E) 35

핵심 아이디어. 합은 $11 \cdot 10 = 110$ 으로 고정되어 있으므로, 가장 큰 수를 크게 만드는 것은 나머지 열 개의 수를 작게 만드는 것과 같습니다. 진짜 문제는 8을 몇 개 쓰느냐입니다. 8이 많을수록 다른 값도 더 여러 번 반복할 수 있어 합을 줄이기 쉽지만, 8이 1이 들어갈 자리를 차지하기도 합니다. 개수마다 하나씩 시도해 봅시다.

1단계. 목록을 크기 순으로 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{11}$ 이라 씁시다. 중앙값은 $a_6 = 9$ 이고, 가장 큰 값은 $a_{11} = 110 - (a_1 + \dots + a_{10})$ 입니다. $8 < 9$ 이므로 모든 8은 $a_1, \dots, a_5$ 중에 있고, 따라서 8은 많아야 다섯 개입니다. 또 8은 적어도 두 개 있어야 합니다. 그렇지 않으면 반복되는 값이 없어서 8이 유일한 최빈값이 될 수 없습니다. 8이 k 번 나타나면 다른 값은 각각 많아야 $k - 1$ 번 나타날 수 있습니다.

2단계. 각 k 에 대하여 $a_1 + \dots + a_{10}$ 의 가능한 최솟값을 구합니다.

- $k = 2$: 다른 값은 많아야 한 번씩 나옵니다. 가장 작은 경우는 1, 2, 3, 8, 8, 9, 10, 11, 12, 13이고 합은 77이므로 $a_{11} \leq 33$ 입니다.
- $k = 3$: 다른 값은 많아야 두 번씩 나옵니다. 가장 작은 경우는 1, 1, 8, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 11이고 합은 75이므로 $a_{11} \leq 35$ 입니다.
- $k = 4$: 가장 작은 경우는 1, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10이고 합은 80이므로 $a_{11} \leq 30$ 입니다.
- $k = 5$: 가장 작은 경우는 8, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10이고 합은 86이므로 $a_{11} \leq 24$ 입니다.

각 목록은 작은 수부터 욕심껏 채워서 만듭니다. a_6 보다 앞에는 가장 작은 값들을 허용되는 만큼 여러 번 쓰고, $a_6 = 9$ 부터는 9를 허용되는 만큼 여러 번 쓴 다음(a_6 자신도 포함), 그다음 10을 쓰는 식으로 계속합니다.

3단계. 가장 좋은 상한은 35이고, 실제로 이 값을 얻을 수 있습니다. 다음 목록을 봅시다.

1, 1, 8, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 11, 35

이 목록은 합이 110이고 중앙값이 9이며, 8은 세 번, 다른 값은 각각 많아야 두 번 나타납니다.

주의. 대부분의 학생은 8을 두 개만 씁니다. 그것이 가장 “저렴한” 최빈값처럼 보이기 때문입니다. 하지만 그러면 다른 값이 모두 달라야 해서 33, 즉 (D)가 나옵니다. 8을 세 개 쓰면 1, 9, 10이 반복될 수 있어서 합을 둘 더 줄일 수 있습니다.

정답: (E) 35

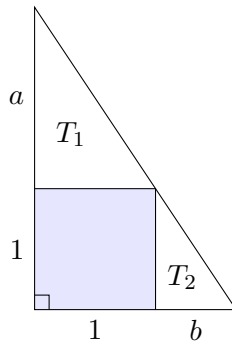
9 기하

출처: 2000 AMC 10 19번

직각삼각형의 빗변 위의 한 점을 지나고 이 삼각형의 직각을 낀 두 변에 각각 평행한 직선을 그어, 이 삼각형을 정사각형 하나와 더 작은 직각삼각형 두 개로 나누었다. 두 작은 직각삼각형 중 하나의 넓이는 정사각형의 넓이의 m 배이다. 정사각형의 넓이에 대한 다른 작은 직각삼각형의 넓이의 비는?

- (A) $\frac{1}{2m+1}$ (B) m (C) $1-m$ (D) $\frac{1}{4m}$ (E) $\frac{1}{8m^2}$

핵심 아이디어. 비만 중요하므로 정사각형의 한 변의 길이를 1로 놓읍시다. 두 작은 삼각형은 변이 서로 평행하므로 닮음이고, 닮음을 이용하면 한 삼각형의 변과 다른 삼각형의 변을 연결할 수 있습니다.



1단계. 위쪽 삼각형 T_1 은 가로 변이 1(정사각형의 윗변)이고 세로 변이 a 입니다. 옆쪽 삼각형 T_2 는 세로 변이 1(정사각형의 오른쪽 변)이고 가로 변이 b 입니다.

2단계. 각 작은 삼각형의 변은 큰 삼각형의 변과 평행하므로 T_1 과 T_2 는 닮음이고, 세로 변은 세로 변끼리 대응합니다. 세로 변과 가로 변의 비를 비교하면 다음과 같습니다.

$$\frac{a}{1} = \frac{1}{b}, \quad \text{따라서} \quad ab = 1.$$

3단계. 정사각형의 넓이는 1입니다. 두 작은 삼각형의 역할은 대칭이므로, 넓이가 정사각형의 m 배인 것을 T_1 이라 해도 됩니다. 그러면 $\frac{1}{2} \cdot a \cdot 1 = m$ 이므로 $a = 2m$ 입니다. 따라서 $b = \frac{1}{a} = \frac{1}{2m}$ 이고, T_2 의 넓이는 다음과 같습니다.

$$\frac{1}{2} \cdot b \cdot 1 = \frac{1}{4m}.$$

이것을 정사각형의 넓이 1로 나누면 구하는 비는 $\frac{1}{4m}$ 입니다.

주의. 특별한 경우를 대입해 보는 것은 좋은 방법이지만, 직각이등변삼각형인 경우는 안 됩니다. 그때는 $m = \frac{1}{2}$ 이고 모든 선택지가 $\frac{1}{2}$ 가 되어 하나도 지울 수 없습니다. 대신 $a = 2$ 를 넣어 봅시다. 그러면 $m = 1$, $b = \frac{1}{2}$ 이므로 다른 삼각형의 비는 $\frac{1}{4}$ 이고, $m = 1$ 일 때 $\frac{1}{4}$ 가 되는 것은 (D) 뿐입니다.

정답: (D) $\frac{1}{4m}$

10 정수론

출처: 2014 AMC 10A 20번

곱 $(8)(888\dots 8)$ 에서 두 번째 인수는 k 자리 수이고, 이 곱은 각 자리 숫자의 합이 1000인 정수이다. k 의 값은?

- (A) 901 (B) 911 (C) 919 (D) 991 (E) 999

핵심 아이디어. k 가 1000 가까이 되면 곱을 직접 계산할 수는 없지만, $k = 1, 2, 3, 4$ 일 때는 계산해서 규칙을 찾을 수 있습니다. 그다음 곱셈을 한 자리씩 손으로 해 보면 규칙이 왜 계속되는지 알 수 있습니다. 받아올림이 일정한 값으로 고정되기 때문입니다.

1단계. 작은 경우를 계산해 봅시다.

$$8 \cdot 8 = 64, \quad 8 \cdot 88 = 704, \quad 8 \cdot 888 = 7104, \quad 8 \cdot 8888 = 71104.$$

곱은 7, 그다음 1이 여러 개, 마지막에 04가 오는 꼴로 보입니다.

2단계. 그 이유를 알아봅시다. $8 \cdot 888\dots 8$ 을 오른쪽부터 한 자리씩 곱합니다.

- 일의 자리: $8 \cdot 8 = 64$ 입니다. 4를 쓰고 6을 올립니다.
- 십의 자리: 다시 $8 \cdot 8 = 64$ 이고, 받아올림을 더하면 $64 + 6 = 70$ 입니다. 0을 쓰고 7을 올립니다.
- 그 이후의 모든 자리: $8 \cdot 8$ 에 받아올림을 더하면 $64 + 7 = 71$ 입니다. 1을 쓰고 다시 7을 올립니다.
- 마지막(k 번째) 자리까지 곱한 뒤 남은 받아올림 7을 맨 앞에 씁니다.

처음 두 자리 다음의 자리는 3번째부터 k 번째까지이므로, 1은 $k - 2$ 개입니다($k \geq 2$ 일 때).

3단계. 각 자리 숫자의 합은 다음과 같습니다.

$$7 + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{k-2} + 0 + 4 = k + 9.$$

$k + 9 = 1000$ 으로 놓으면 $k = 991$ 입니다.

확인: $k = 4$ 일 때 이 식은 13을 주고, 실제로 $7 + 1 + 1 + 0 + 4 = 13$ 입니다.

정답: (D) 991