
AMC 10

하프 모의고사

제 12 회

해설

정답표 • 출처 • 단계별 풀이

정답표와 출처

번호	정답	출처	영역
1	C	2019 AMC 10A 10번	경우의 수와 확률
2	A	2010 AMC 10B 11번	대수
3	C	2014 AMC 10B 12번	정수론
4	D	2002 AMC 10B 13번	대수
5	B	2007 AMC 10A 15번	기하
6	E	2003 AMC 10B 16번	경우의 수와 확률
7	C	2004 AMC 10A 17번	대수
8	D	2002 AMC 10A 18번	기하
9	E	2018 AMC 10B 19번	정수론
10	E	2019 AMC 10B 20번	기하

1 경우의 수와 확률

출처: 2019 AMC 10A 10번

폭이 10피트, 길이가 17피트인 직사각형 모양의 바닥에 한 변의 길이가 1피트인 정사각형 타일 170장이 깔려 있다. 벌레 한 마리가 바닥의 한 꼭짓점에서 마주 보는 꼭짓점까지 직선으로 걸어간다. 처음 타일과 마지막 타일을 포함하여, 벌레가 지나가는 타일은 몇 장인가?

- (A) 17 (B) 25 (C) 26 (D) 27 (E) 28

핵심 아이디어. 벌레는 격자선을 하나 건널 때마다 정확히 새 타일 하나에 들어갑니다. 그러므로 벌레가 건너는 격자선의 개수를 세고, 처음 출발한 타일 하나를 더하면 됩니다.

바닥은 길이 방향으로 타일 17장, 폭 방향으로 타일 10장입니다. 바닥 안쪽에는 길이 방향을 가로지르는 격자선이 $17 - 1 = 16$ 개, 길이 방향을 따라 놓인 격자선이 $10 - 1 = 9$ 개 있습니다. 한 꼭짓점에서 반대쪽 꼭짓점까지 가는 직선 경로는 이 선들을 각각 정확히 한 번씩 건넵니다.

벌레가 두 선을 동시에 건널 수도 있을까요? 그러려면 타일 네 장이 만나는 꼭짓점을 지나야 합니다. 이것은 양 끝점 사이에 좌표가 모두 정수이고 $\frac{y}{x} = \frac{10}{17}$ 인 점 (x, y) 가 있어야 한다는 뜻인데, 10과 17은 서로소이므로 불가능합니다. 따라서 선을 하나 건널 때마다 새 타일이 정확히 하나씩 늘어납니다.

지나가는 타일의 수: $1 + 16 + 9 = 26$.

주의. 단순히 $10 + 17 = 27$ (선택지 D)로 더하면 하나를 더 세게 됩니다. **안쪽** 격자선은 17개와 10개가 아니라 16개와 9개이고, 여기에 처음 타일 1장을 더해야 합니다.

정답: (C) 26

2 대수

출처: 2010 AMC 10B 11번

어떤 쇼핑객이 정가가 \$100보다 비싼 물건을 사려고 하며, 세 가지 쿠폰 중 아무거나 하나를 사용할 수 있다. 쿠폰 A는 정가의 15%를 할인해 주고, 쿠폰 B는 정가에서 \$30을 할인해 주며, 쿠폰 C는 정가가 \$100을 넘는 금액의 25%를 할인해 준다.

쿠폰 A로 절약하는 금액이 쿠폰 B나 C로 절약하는 금액 이상이 되는 가격 중 가장 낮은 가격과 가장 높은 가격을 각각 x, y 라 하자. $y - x$ 의 값은?

- (A) 50 (B) 60 (C) 75 (D) 80 (E) 100

핵심 아이디어. 각 쿠폰으로 절약하는 금액을 가격 p 에 대한 식으로 쓰고, A를 나머지 두 쿠폰과 하나씩 따로 비교해 봅시다. 문제가 **가장 낮은** 가격과 **가장 높은** 가격을 묻고 있으므로, 한 비교에서는 아래쪽 끝이, 다른 비교에서는 위쪽 끝이 나오리라고 짐작할 수 있습니다.

1단계. 정가가 p 일 때 절약하는 금액(달러)은 다음과 같습니다.

$$A: 0.15p, \quad B: 30, \quad C: 0.25(p - 100) = 0.25p - 25.$$

2단계. A와 B의 비교: $0.15p \geq 30$ 이면 $p \geq \frac{30}{0.15} = 200$ 입니다. A의 절약액은 가격이 오를수록 커지고 B의 절약액은 일정하므로, 이것이 아래쪽 끝입니다.

3단계. A와 C의 비교: $0.15p \geq 0.25p - 25$ 이면 $25 \geq 0.10p$ 이므로 $p \leq 250$ 입니다. 가격이 1달러 오를 때마다 C의 절약액은 25센트씩 늘지만 A의 절약액은 15센트씩만 늘기 때문에, 결국 C가 A를 앞지릅니다. 이것이 위쪽 끝입니다.

4단계. 두 비교가 모두 성립하는 것은 정확히 $200 \leq p \leq 250$ 일 때이므로 $x = 200$, $y = 250$ 이고 $y - x = 50$ 입니다.

양 끝 확인: $p = 200$ 일 때 절약액은 \$30, \$30, \$25이고, $p = 250$ 일 때는 \$37.50, \$30, \$37.50입니다. 두 경우 모두 A가 다른 쿠폰 각각보다 못하지 않습니다.

주의. 쿠폰 A는 B와 C 둘 다에 뒤지지 않아야 합니다. A를 B하고만 비교하면 A의 절약액은 \$30을 넘은 뒤 끝없이 커지므로 가장 높은 가격이 아예 존재하지 않습니다.

정답: (A) 50

3 정수론

출처: 2014 AMC 10B 12번

2,014,000,000의 가장 큰 약수는 자기 자신이다. 이 수의 약수 중 다섯 번째로 큰 약수는?

- (A) 125,875,000 (B) 201,400,000 (C) 251,750,000 (D) 402,800,000 (E) 503,500,000

핵심 아이디어. 약수는 d 와 $\frac{N}{d}$ 으로 짝을 이루므로, 다섯 번째로 큰 약수는 N 을 다섯 번째로 작은 약수로 나눈 값입니다. 문제의 “가장 큰 약수는 자기 자신이다”라는 말이 바로 이 점을 암시합니다. 그것은 $N \div 1$ 일 뿐이니깐요. 작은 약수는 나열하기 쉽지만 큰 약수는 그렇지 않습니다.

1단계. 먼저 소인수분해합니다. $N = 2,014,000,000 = 2014 \times 10^6$ 으로 쓰면, $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$ 이고 $10^6 = 2^6 \cdot 5^6$ 이므로 다음을 얻습니다.

$$N = 2^7 \cdot 5^6 \cdot 19 \cdot 53.$$

2단계. 가장 작은 약수부터 나열합니다. N 을 나누는 소수는 2, 5, 19, 53뿐이므로 3, 6, 7은 약수가 아닙니다. 1부터 차례로 쓰면 다음과 같습니다.

$$1, 2, 4, 5, 8, 10, \dots$$

다섯 번째로 작은 약수는 8입니다.

3단계. 약수 d 가 커질수록 $\frac{N}{d}$ 은 약수들을 따라 작아집니다. 따라서 가장 큰 약수 다섯 개는 $\frac{N}{1}, \frac{N}{2}, \frac{N}{4}, \frac{N}{5}, \frac{N}{8}$ 이고, 다섯 번째로 큰 약수는 다음과 같습니다.

$$\frac{2,014,000,000}{8} = 251,750,000.$$

주의. 2의 거듭제곱만 나열하다가 5를 빠뜨리기 쉽습니다. 1, 2, 4, 8, 16을 쓰면 $\frac{N}{16} = 125,875,000$ 이 되는데, 이것은 선택지 (A)입니다.

정답: (C) 251,750,000

4 대수

출처: 2002 AMC 10B 13번

모든 y 의 값에 대하여 $8xy - 12y + 2x - 3 = 0$ 이 성립하도록 하는 x 의 값은?

- (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{3}{2}$ 또는 $-\frac{1}{4}$ (C) $-\frac{2}{3}$ 또는 $-\frac{1}{4}$ (D) $\frac{3}{2}$ (E) $-\frac{3}{2}$ 또는 $-\frac{1}{4}$

핵심 아이디어. “모든 y 의 값에 대하여 성립한다”는 것은 y 가 결과에 아무 영향을 주지 않아야 한다는 뜻입니다. y 가 들어 있는 항끼리 묶어 인수분해해 봅시다. 그러면 y 가 들어 있지 않은 인수가 0이 되어야 합니다.

1단계. 두 항씩 묶어 인수분해합니다.

$$8xy - 12y + 2x - 3 = 4y(2x - 3) + (2x - 3) = (4y + 1)(2x - 3).$$

2단계. 이 곱은 모든 y 에 대하여 0이어야 합니다. $y = 0$ 을 넣어 보면 첫 번째 인수는 $4 \cdot 0 + 1 = 1$ 이므로 $2x - 3 = 0$, 즉 $x = \frac{3}{2}$ 이어야 합니다.

3단계. 거꾸로 $x = \frac{3}{2}$ 이면 두 번째 인수가 0이므로, y 가 무엇이든 곱은 0입니다. 직접 대입하면 $8 \cdot \frac{3}{2}y - 12y + 2 \cdot \frac{3}{2} - 3 = 12y - 12y + 3 - 3 = 0$ 입니다.

따라서 가능한 값은 $x = \frac{3}{2}$ 뿐입니다.

다른 풀이. 좌변을 y 에 대한 일차식 $(8x - 12)y + (2x - 3)$ 으로 봅시다. 이것이 모든 y 에 대하여 0이려면 기울기와 상수항이 모두 0이어야 합니다. 즉 $8x - 12 = 0$ 이고 $2x - 3 = 0$ 이어야 하며, 두 식 모두 $x = \frac{3}{2}$ 를 줍니다.

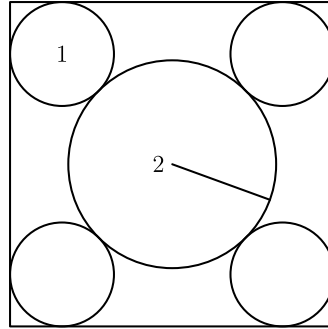
주의. 인수분해한 뒤 $(4y + 1)(2x - 3) = 0$ 을 보통의 방정식처럼 “풀어서” $x = \frac{3}{2}$ 또는 $-\frac{1}{4}$ (선택지 B)라고 쓰고 싶어집니다. 하지만 $-\frac{1}{4}$ 은 x 가 아니라 y 의 값이고, 그 하나의 y 에 대해서만 식을 0으로 만듭니다.

정답: (D) $\frac{3}{2}$

5 기하

출처: 2007 AMC 10A 15번

그림과 같이 반지름이 1인 원 네 개가 각각 정사각형의 두 변에 접하고, 반지름이 2인 원에 외접한다. 이 정사각형의 넓이는?



- (A) 32 (B) $22 + 12\sqrt{2}$ (C) $16 + 16\sqrt{3}$ (D) 48 (E) $36 + 16\sqrt{2}$

핵심 아이디어. 원이 서로 접하면 “중심을 잇는” 것이 기본입니다. 두 중심 사이의 거리는 두 반지름의 합이기 때문입니다. 여기서는 모든 원의 중심이 정사각형의 대각선 위에 있으므로, 문제 전체를 대각선 하나 위에서 풀 수 있습니다.

1단계. 정사각형의 두 꼭짓점이 $(0, 0)$ 과 (s, s) 가 되도록 놓습니다. 왼쪽 아래 모퉁이의 작은 원은 $(0, 0)$ 을 지나고 두 변에 접하므로, 그 중심은 두 변에서 각각 1만큼 떨어져 있습니다. 즉 중심은 $(1, 1)$ 입니다. 대칭성에 의해 큰 원의 중심은 정사각형의 한가운데인 $(\frac{s}{2}, \frac{s}{2})$ 입니다.

2단계. 두 원은 외접하므로 중심 사이의 거리는 $2 + 1 = 3$ 입니다. 두 중심은 모두 대각선 $y = x$ 위에 있으므로, 그 사이의 거리를 식으로 쓰면 다음과 같습니다.

$$\sqrt{2} \left(\frac{s}{2} - 1 \right) = 3, \quad \text{따라서} \quad \frac{s}{2} - 1 = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad s = 2 + 3\sqrt{2}.$$

3단계. 넓이는 다음과 같습니다.

$$s^2 = (2 + 3\sqrt{2})^2 = 4 + 12\sqrt{2} + 18 = 22 + 12\sqrt{2}.$$

다른 풀이. 꼭짓점에서 정사각형의 중심까지 대각선을 따라가 봅시다. 꼭짓점에서 작은 원의 중심까지는 1×1 정사각형의 대각선이므로 $\sqrt{2}$ 이고, 거기서 큰 원의 중심까지 3을 더 갑니다. 따라서 대각선 전체의 길이는 $2(3 + \sqrt{2}) = 6 + 2\sqrt{2}$ 이고, 정사각형의 넓이는 대각선의 길이의 제곱의 절반이므로 다음과 같습니다.

$$\frac{(6 + 2\sqrt{2})^2}{2} = \frac{36 + 24\sqrt{2} + 8}{2} = 22 + 12\sqrt{2}.$$

주의. 정사각형의 꼭짓점에서 작은 원의 중심까지의 거리는 1이 아니라 $\sqrt{2}$ 입니다. 1로 계산하면 대각선의 절반이 $1 + 3 = 4$, 대각선이 8이 되어 넓이가 $\frac{8^2}{2} = 32$, 즉 (A)가 됩니다.

정답: (B) $22 + 12\sqrt{2}$

6 경우의 수와 확률

출처: 2003 AMC 10B 16번

어느 식당에는 디저트가 세 가지 있고, 전체 요리는 주요리의 정확히 두 배만큼 있다. 저녁 식사 한 끼는 전체 요리 하나, 주요리 하나, 디저트 하나로 이루어진다. 손님이 2003년의 매일 밤 서로 다른 저녁 식사를 할 수 있으려면, 이 식당은 주요리를 최소한 몇 가지 제공해야 하는가?

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

핵심 아이디어. 저녁 식사 한 끼는 서로 독립인 세 가지 선택으로 이루어지므로, 서로 다른 저녁 식사의 가짓수는 곱으로 구합니다(곱의 법칙). 그러면 “매일 밤 서로 다른 저녁 식사”라는 조건은 이 곱이 2003년의 밤의 수 이상이어야 한다는 뜻입니다.

1단계. 식당이 주요리를 m 가지 제공한다고 합시다. 그러면 전체 요리는 $2m$ 가지, 디저트는 3가지이므로, 서로 다른 저녁 식사의 가짓수는 다음과 같습니다.

$$2m \cdot m \cdot 3 = 6m^2.$$

2단계. 2003년은 윤년이 아니므로(2003은 4로 나누어떨어지지 않습니다) 밤이 365번 있습니다. 따라서 다음이 성립해야 합니다.

$$6m^2 \geq 365, \quad \text{즉} \quad m^2 \geq \frac{365}{6} \approx 60.8.$$

3단계. 자연수를 대입해 봅시다. $7^2 = 49$ 는 너무 작습니다. $6 \cdot 49 = 294 < 365$ 이기 때문입니다. 하지만 $8^2 = 64$ 는 됩니다. $6 \cdot 64 = 384 \geq 365$ 입니다. 따라서 주요리는 최소 8가지입니다.

참고로 선택지의 값 $m = 4, 5, 6, 7, 8$ 에 대한 저녁 식사의 가짓수는 각각 96, 150, 216, 294, 384이고, 365에 이르는 것은 마지막뿐입니다.

주의. $\sqrt{60.8} \approx 7.8$ 에서 소수 부분을 버리면 7(선택지 D)이 됩니다. 하지만 주요리가 7가지이면 저녁 식사는 294가지뿐입니다. 조건을 만족시키는 “최솟값”을 묻는 문제에서는 **올림**을 해야 합니다.

정답: (E) 8

7 대수

출처: 2004 AMC 10A 17번

브렌다와 샬리가 원형 트랙 위의 지름의 양 끝에 있는 두 지점에서 출발하여 서로 반대 방향으로 달린다. 두 사람은 브렌다가 100미터를 달렸을 때 처음 만난다. 두 사람은 그 후 샬리가 처음 만난 지점을 지나 150미터를 더 달렸을 때 다시 만난다. 두 사람은 각각 일정한 속력으로 달린다. 트랙의 길이는 몇 미터인가?

- (A) 250 (B) 300 (C) 350 (D) 400 (E) 500

핵심 아이디어. 두 사람이 서로를 향해 달릴 때 중요한 것은 두 사람이 **함께** 달린 거리입니다. 두 번의 만남 사이에 함께 달린 거리는 트랙 길이의 일정한 몫이고, 속력이 일정하므로 각자 달린 거리는 걸린 시간에 비례합니다. 그러니 두 구간을 비교해 봅시다.

트랙의 길이를 L 이라 합시다.

1단계. 두 사람은 지름의 양 끝에서 출발하므로, 트랙을 따라 $\frac{L}{2}$ 만큼 떨어져 있습니다. 서로를 향해 달리로 두 사람이 달린 거리의 합이 $\frac{L}{2}$ 이 될 때 만납니다. 그중 브렌다가 달린 거리가 100미터입니다.

2단계. 만난 뒤 두 사람은 서로 멀어지고, 함께 트랙 한 바퀴를 더 달렸을 때, 즉 달린 거리의 합이 L 이 될 때 다시 만납니다. 이것은 첫 번째 구간에서 함께 달린 거리의 두 배이므로, (속력이 일정하므로) 시간도 두 배가 걸리고, 이 구간에서 브렌다는 $2 \cdot 100 = 200$ 미터를 달립니다.

3단계. 같은 구간에서 샬리는 150미터를 달립니다. 두 사람이 함께 트랙 한 바퀴를 달렸으므로 다음이 성립합니다.

$$L = 200 + 150 = 350.$$

확인: 길이가 350미터인 트랙에서 첫 번째 구간의 거리의 합은 175이므로, 브렌다가 100을 달리는 동안 샬리는 75를 달립니다. 그 비는 4 : 3입니다. 두 번째 구간에서는 브렌다가 200, 샬리가 150을 달리므로 역시 4 : 3이고, 속력이 일정하다는 조건과 맞습니다.

주의. “지름의 양 끝”이라는 조건을 놓치고 첫 번째 만남도 두 번째 만남처럼(거리의 합이 L) 다루면, 브렌다가 두 구간에서 각각 100씩 달리게 되어 $L = 100 + 150 = 250$, 즉 (A)가 나옵니다.

정답: (C) 350

8 기하

출처: 2002 AMC 10A 18번

표준 정육면체 주사위 27개를 붙여서 $3 \times 3 \times 3$ 정육면체를 만들었다. (표준 주사위에서는 서로 마주 보는 두 면에 적힌 수의 합이 항상 7이다.) 이 $3 \times 3 \times 3$ 정육면체의 겉면에 보이는 모든 수의 합으로 가능한 가장 작은 값은?

- (A) 60 (B) 72 (C) 84 (D) 90 (E) 96

핵심 아이디어. 주사위는 각각 독립적으로 돌릴 수 있으므로, 주사위 하나하나에서 합을 최소로 만들면 됩니다. 27개의 주사위를 겉면에 보이는 면의 개수에 따라 분류하고, 마주 보는 면에 대한 규칙을 이용해 어떤 수들이 함께 보일 수 있는지 알아봅시다.

1단계. 주사위를 분류합니다. $3 \times 3 \times 3$ 정육면체에는 꼭짓점 주사위 8개(보이는 면 3개), 각 모서리의 가운데에 있는 모서리 주사위 12개(보이는 면 2개), 각 면의 한가운데에 있는 면 중심 주사위 6개(보이는 면 1개), 그리고 한가운데에 숨은 주사위 1개(보이는 면 0개)가 있습니다. 확인: $8 + 12 + 6 + 1 = 27$.

2단계. 꼭짓점 주사위. 보이는 세 면은 주사위의 서로 다른 면이므로 서로 다른 세 수가 적혀 있고, 그 합은 적어도 $1 + 2 + 3 = 6$ 입니다. 이 값은 실제로 가능합니다. 마주 보는 쌍은 1-6, 2-5, 3-4이므로 1, 2, 3 중 어느 두 면도 마주 보지 않고, 정육면체에서 서로 마주 보지 않는 세 면은 항상 한 꼭짓점에서 만나기 때문입니다. 합계: $8 \cdot 6 = 48$.

3단계. 모서리 주사위. 보이는 두 면에는 서로 다른 두 수가 적혀 있으므로 합은 적어도 $1 + 2 = 3$ 입니다. 또 1과 2는 마주 보지 않으므로 이웃한 면이고, 두 면이 함께 보이게 할 수 있습니다. 합계: $12 \cdot 3 = 36$.

4단계. 면 중심 주사위는 한 면만 보이므로 적어도 1이고, 합계는 6입니다. 한가운데 주사위는 아무 면도 보이지 않습니다.

모두 더하면 겉면의 합은 적어도 $48 + 36 + 6 = 90$ 이고, 모든 주사위를 위와 같이 돌려 놓으면 정확히 90이 됩니다.

주의. 면 중심 주사위 여섯 개를 잊으면 $48 + 36 = 84$, 즉 (C)가 됩니다. 분류한 주사위의 개수를 더해 27개가 되는지 항상 확인합니다.

정답: (D) 90

9 정수론

출처: 2018 AMC 10B 19번

조이와 클로이, 그리고 그들의 딸 조에는 생일이 모두 같다. 조이는 클로이보다 1살 많고, 조에는 오늘 정확히 1살이 되었다. 오늘은 클로이의 나이가 조에의 나이의 정수배가 되는 9번의 생일 중 첫 번째 생일이다. 다음번에 조이의 나이가 조에의 나이의 배수가 될 때, 조이의 나이의 두 자리 숫자의 합은?

- (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11

핵심 아이디어. 나이는 계속 변하지만 두 사람의 나이 차는 절대 변하지 않습니다. 클로이의 나이를 조에의 나이에 이 고정된 차를 더한 것으로 쓰면, “조에의 나이의 배수”라는 조건은 “나이 차이가 조에의 나이로 나누어떨어진다”가 되고, 따라서 “9번의 생일”은 “나이 차의 약수가 9개”라는 뜻이 됩니다.

1단계. 클로이와 조에의 나이 차를 g 라 하면, 오늘 클로이는 $g + 1$ 살입니다. 조에가 z 살이 되는 생일에 클로이는 $z + g$ 살이므로, 두 나이의 비는 다음과 같습니다.

$$\frac{z + g}{z} = 1 + \frac{g}{z},$$

이 값은 z 가 g 의 약수일 때 정확히 자연수가 됩니다. 오늘부터 조에의 나이는 $z = 1, 2, 3, \dots$ 이므로, g 의 약수 하나마다 그런 생일이 정확히 하나씩 있습니다(오늘은 $z = 1$). 따라서 g 의 약수는 정확히 9개입니다.

2단계. $g = p^a q^b \dots$ 이면 약수의 개수는 $(a+1)(b+1) \dots$ 입니다. 이것이 9가 되려면 $g = p^8$ 또는 $g = p^2 q^2$ 이어야 합니다. 그런 수 중 가장 작은 것은 $36 = 2^2 \cdot 3^2$ 이고, 그다음은 $100 = 2^2 \cdot 5^2$, 그 뒤로는 더 큰 수들입니다. 101살의 어머니에게 한 살짜리 딸이 있을 수는 없으므로 $g = 36$ 입니다. 즉 클로이는 37살, 조이는 38살입니다.

확인: 조에의 나이가 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36(36의 약수)일 때가 그 9번의 생일입니다.

3단계. 조이와 조에의 나이 차는 37이므로, 같은 논리로 조이의 나이가 조에의 나이의 배수가 되는 것은 정확히 z 가 37의 약수일 때입니다. 37은 소수이므로 그런 때는 $z = 1$ (오늘)과 $z = 37$ 뿐입니다. 다음번은 조에가 37살이고 조이가 $37 + 37 = 74$ 살일 때입니다.

각 자리 숫자의 합은 $7 + 4 = 11$ 입니다.

정답: (E) 11

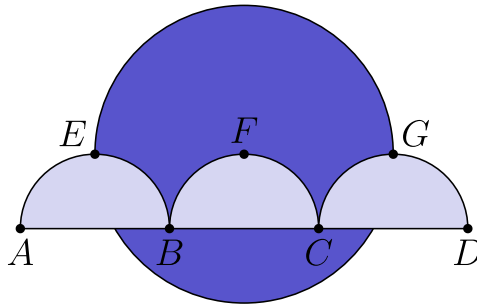
10 기하

출처: 2019 AMC 10B 20번

그림과 같이 점 B 와 C 가 선분 $\overline{AD}$ 를 삼등분하여 $AB = BC = CD = 2$ 이다. 반지름이 1인 세 반원 $\widehat{AEB}$, $\widehat{BFC}$, $\widehat{CGD}$ 는 지름이 $\overline{AD}$ 위에 있고, 직선 $\overline{AD}$ 에 의해 나뉘는 같은 반평면에 놓여 있으며, 직선 $\overline{EG}$ 에 각각 E, F, G 에서 접한다. 반지름이 2인 원의 중심은 F 이다. 이 원의 내부에 있으면서 세 반원의 외부에 있는 영역(그림에서 색칠한 부분)의 넓이는 다음 꼴로 나타낼 수 있다.

$$\frac{a}{b} \cdot \pi - \sqrt{c} + d,$$

여기서 a, b, c, d 는 양의 정수이고 a 와 b 는 서로소이다. $a + b + c + d$ 의 값은?



(A) 13

(B) 14

(C) 15

(D) 16

(E) 17

핵심 아이디어. 색칠한 영역을 두 수평선 $\overline{EG}$ 와 $\overline{AD}$ 로 잘라서 익숙한 모양의 조각으로 나누어 봅시다. 직선 $\overline{EG}$ 는 중심 F 를 지나므로 큰 원을 정확히 반으로 나눕니다. 그래서 $\overline{EG}$ 가 가장 먼저 떠오르는 자르는 선입니다.

반원들은 반지름이 1이고 꼭대기에서 직선 $\overline{EG}$ 에 접하므로, $\overline{EG}$ 는 $\overline{AD}$ 와 평행하고 $\overline{AD}$ 보다 1만큼 위에 있습니다. E, F, G 는 각각 $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$ 의 중점 바로 위에 있고, $EF = FG = 2$ 입니다.

1단계 ($\overline{EG}$ 위쪽). 반원들은 직선 $\overline{EG}$ 와 점 E, F, G 에서만 만나므로, 큰 원의 위쪽 절반은 전부 색칠되어 있습니다. 그 넓이는 $\frac{1}{2}\pi \cdot 2^2 = 2\pi$ 입니다.

2단계 ($\overline{EG}$ 와 $\overline{AD}$ 사이). 윗변이 $\overline{EG}$ 이고 아랫변이 $\overline{AD}$ 위에 있는 4×1 직사각형을 봅시다. 넓이는 4입니다. 이 직사각형 안에서 반원들이 덮는 부분은 $\widehat{AEB}$ 의 4분의 1, $\widehat{BFC}$ 전체, $\widehat{CGD}$ 의 4분의 1이므로 넓이는 $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \pi$ 입니다. 이 띠 안에서 큰 원은 직사각형 밖으로 나가지 않고, 직사각형의 아래쪽 두 모퉁이 중 큰 원 밖에 있는 작은 부분은 양 끝의 반원이 덮고 있습니다. 따라서 이 부분에서 색칠된 넓이는 $4 - \pi$ 입니다.

3단계 ($\overline{AD}$ 아래쪽). 큰 원이 $\overline{AD}$ 와 만나는 두 점을 P, Q 라 하고, F 바로 아래에 있는 $\widehat{BC}$ 의 중점을 M 이라 합시다. 그러면 $FM = 1$, $FP = 2$ 이므로 $\cos \angle PFM = \frac{1}{2}$ 이고, $\angle PFM = 60^\circ$, $\angle PFQ = 120^\circ$ 입니다. 또 $PM = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$ 입니다. 반원들은 모두 $\overline{AD}$ 위쪽에 있으므로 $\overline{AD}$ 아래의 활꼴은 전부 색칠되어 있습니다. 이 활꼴은 중심각이 120° 인 부채꼴에서 삼각형 PFQ 를 뺀 것입니다.

$$\frac{120}{360} \cdot \pi \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 1 = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}.$$

4단계 (더하기). $2\pi + (4 - \pi) + \left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right) = \frac{7}{3}\pi - \sqrt{3} + 4$ 이므로 $a = 7, b = 3, c = 3, d = 4$ 이고 $a + b + c + d = 17$ 입니다.

주의. $\cos \angle PFM = \frac{1}{2}$ 에서 얻은 60° 는 중심각의 **절반**일 뿐입니다. 중심각이 60° 인 부채꼴을 쓰면 활꼴의 넓이가 $\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$, 전체 넓이가 $\frac{5}{3}\pi - \sqrt{3} + 4$ 가 되어 합이 15, 즉 (C)가 나옵니다.

정답: (E) 17