AMC 10

제 15 회

하프 모의고사

해설

정답표 • 출처 • 단계별 풀이

10문항 모두 AMC 10 기출(2000–2019)의 10–20번 문항에서 가져와 원래 번호 순서대로 배열한 것입니다. 원문 © Mathematical Association of America.

정답표와 출처

번호	정답	출처	영역
1	**C**	2015 AMC 10A 10번	경우의 수와 확률
2	**D**	2009 AMC 10A 11번	기하
3	**A**	2008 AMC 10B 12번	대수
4	**D**	2011 AMC 10B 13번	경우의 수와 확률
5	**C**	2000 AMC 10 14번	정수론
6	**E**	2009 AMC 10B 15번	대수
7	**B**	2013 AMC 10B 16번	기하
8	**D**	2007 AMC 10A 17번	정수론
9	**E**	2012 AMC 10A 18번	기하
10	**C**	2004 AMC 10B 19번	대수

1 경우의 수와 확률

출처: 2015 AMC 10A 10번

> $abcd$의 네 문자를 다시 배열할 때, 이웃한 어떤 두 문자도 알파벳에서 이웃한 문자가 아닌 배열은 몇 가지인가? 예를 들어, 이러한 배열에는 ab나 ba가 포함될 수 없다.
>
> **(A)** 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

핵심 아이디어. 배열은 모두 24가지뿐이므로, 첫 글자에 따라 나누어 어떤 배열이 살아남는지 살펴봅시다.

이웃하면 안 되는 쌍은 a–b, b–c, c–d입니다(순서는 상관없습니다).

a로 시작하는 경우: 다음 글자는 b가 될 수 없으므로 c 또는 d입니다. ac 다음에는 c 뒤에 b나 d가 올 수 없는데, 남은 글자는 이 둘뿐입니다. ad 다음에는 마지막 두 글자 b와 c가 나란히 놓이게 됩니다. 따라서 a로 시작하는 배열은 없고, 같은 논리로($a \leftrightarrow d$, $b \leftrightarrow c$로 바꾸어 보면) d로 시작하는 배열도 없습니다.

b로 시작하는 경우: 다음 글자는 (a나 c가 아닌) d여야 합니다. d 다음에는 (c가 아닌) a가 와야 하고, 마지막은 c입니다. 즉 $bdac$입니다. 확인하면 bd, da, ac는 모두 허용됩니다.

c로 시작하는 경우: 같은 방법으로 바꾸어 보면 가능한 배열은 $cadb$뿐입니다.

따라서 조건을 만족하는 배열은 $bdac$와 $cadb$, 정확히 2가지입니다.

정답: (C) 2

---

2 기하

출처: 2009 AMC 10A 11번

> 정육면체의 한 모서리의 길이를 1만큼 늘이고, 다른 한 모서리의 길이를 1만큼 줄이고, 나머지 한 모서리의 길이는 그대로 두었다. 새로 만든 직육면체의 부피는 처음 정육면체의 부피보다 5만큼 작다. 처음 정육면체의 부피는?
>
> **(A)** 8 **(B)** 27 **(C)** 64 **(D)** 125 **(E)** 216

핵심 아이디어. 한 모서리의 길이에 이름을 붙이고 두 부피를 식으로 써 봅시다. "1만큼 늘이고 ... 1만큼 줄이고"라는 말은 제곱의 차 $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$을 쓰라는 신호입니다.

1단계. 정육면체의 한 모서리의 길이를 x라 하면, 부피는 x^3입니다.

2단계. 새 입체의 세 모서리의 길이는 $(x+1)$, $(x-1)$, x입니다. 따라서 부피는 다음과 같습니다.

$$x(x+1)(x-1) = x(x^2-1) = x^3 - x.$$

3단계. 즉 새 입체는 정육면체보다 정확히 x만큼 작습니다. 문제에서 5만큼 작다고 했으므로 $x^3 - x = x^3 - 5$이고, $x = 5$입니다.

4단계. 정육면체의 부피는 $5^3 = 125$입니다.

확인: 새 입체의 부피는 $6 \times 4 \times 5 = 120$이고, $125 - 120 = 5$입니다. ✓

3단계가 일반적으로 말해 주는 사실에 주목합시다. 어떤 정육면체이든 이렇게 바꾸면 부피는 항상 정확히 한 모서리의 길이만큼 줄어듭니다. 그래서 다른 선택지가 왜 안 되는지도 쉽게 알 수 있습니다. 예를 들어 부피가 64인 정육면체(한 모서리 4)는 4만큼만 줄어듭니다.

주의. 방정식에서 나온 것은 한 모서리의 길이 $x = 5$이지만, 문제가 묻는 것은 **부피**입니다. 5에서 멈추면 선택지에 없는 값을 찾게 됩니다. 답은 5^3입니다.

정답: (D) 125

---

3 대수

출처: 2008 AMC 10B 12번

> 집배원 피트는 걸음 수를 세는 만보기를 가지고 있다. 이 만보기는 99999걸음까지 기록하고, 그다음 걸음에서 00000으로 넘어간다. 피트는 1년 동안 걸은 거리를 마일 단위로 알아보려고 한다. 피트는 1월 1일에 만보기를 00000으로 맞추었다. 1년 동안 만보기는 99999에서 00000으로 마흔네 번 넘어갔고, 12월 31일에 만보기에 표시된 수는 50000이었다. 피트는 1마일을 걸을 때 1800걸음을 걷는다. 다음 중 피트가 1년 동안 걸은 거리(마일)에 가장 가까운 것은?
>
> **(A)** 2500 **(B)** 3000 **(C)** 3500 **(D)** 4000 **(E)** 4500

핵심 아이디어. 만보기를 자동차의 주행거리계처럼 생각해 봅시다. 한 번 넘어갈 때마다 100000걸음을 한 바퀴 다 채운 것입니다. 완전한 바퀴 수를 세고, 마지막 표시 값을 더한 뒤, 마일로 바꾸면 됩니다.

1단계. 한 번 넘어가는 것은 몇 걸음인가? 표시는 $00000, 00001, \ldots, 99999$로 올라가고, 그다음 한 걸음에서 다시 00000이 됩니다. 따라서 한 바퀴는 100000걸음입니다(99999걸음이 아닙니다. 넘어가게 만드는 그 한 걸음도 세어야 합니다).

2단계. 전체 걸음 수. 완전한 바퀴 마흔네 번에 마지막에 표시된 50000을 더합니다.

$$44 \times 100\,000 + 50\,000 = 4\,400\,000 + 50\,000 = 4\,450\,000\text{걸음}.$$

3단계. 마일로 바꾸기. 1마일당 1800걸음이므로 이 수로 나눕니다.

$$\frac{4\,450\,000}{1800} = \frac{44\,500}{18} \approx 2472.$$

4단계. 선택지와 비교하기. 2472는 2500과 겨우 28 차이이고, 다른 선택지와는 모두 500 넘게 차이가 납니다. 따라서 가장 가까운 것은 2500입니다.

계산기 없이 빠르게 확인해 봅시다. $4\,450\,000 \div 2000 = 2225$입니다. 2000 대신 1800으로 나누면 결과에 $\frac{2000}{1800} = \frac{10}{9}$을 곱하는 셈이므로, 9분의 1만큼 더해집니다. 즉 $2225 + 247 \approx 2472$입니다.

문제는 가장 가까운 선택지만 묻기 때문에, 작은 실수(한 번 넘어갈 때 99999 걸음으로 계산하거나, 마지막 50000을 빠뜨려 약 2444를 얻는 경우)를 해도 여기서는 답이 바뀌지 않습니다. 하지만 2단계에서 0의 개수를 정확히 세는 것은 매우 중요합니다.

정답: (A) 2500

---

4 경우의 수와 확률

출처: 2011 AMC 10B 13번

> 구간 $[-20, 10]$에서 두 실수를 각각 독립적으로 임의로 택한다. 택한 두 수의 곱이 0보다 클 확률은?
>
> **(A)** $\frac{1}{9}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{4}{9}$ **(D)** $\frac{5}{9}$ **(E)** $\frac{2}{3}$

핵심 아이디어. 두 수의 곱이 양수인 것은 두 수의 **부호가 같을** 때이고, 그때뿐입니다. 따라서 각 수의 부호만 중요하며, 각 부호가 나올 가능성은 구간의 길이로 알 수 있습니다.

1단계. 각 부호의 확률. 구간 $[-20, 10]$의 길이는 30입니다. 음수 부분인 -20부터 0까지의 길이는 20이고, 양수 부분인 0부터 10까지의 길이는 10입니다. 따라서 한 수에 대하여

$$P(\text{음수}) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}, \qquad P(\text{양수}) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

정확히 0을 택할 확률은 0이므로 무시해도 됩니다.

2단계. 부호가 같은 경우. 두 수는 독립적으로 택하므로 확률을 곱합니다.

$$P(\text{둘 다 음수}) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}, \qquad P(\text{둘 다 양수}) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$

3단계. 두 경우 더하기. 두 경우는 동시에 일어날 수 없으므로

$$P(\text{곱} > 0) = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}.$$

다른 풀이. 여사건을 세어 봅시다. 곱이 음수인 것은 한 수가 음수이고 다른 수가 양수일 때입니다. 이는 두 가지 순서로 일어날 수 있으므로 그 확률은 $2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$입니다. 따라서 $1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$입니다.

주의. "0보다 크다"를 "두 수가 모두 양수"로 잘못 읽기 쉽습니다. 그 경우만 계산하면 $\frac{1}{9}$, 즉 선택지 (A)가 나옵니다. 두 음수의 곱도 양수이며, 여기서는 그쪽이 **더 큰** 경우인 $\frac{4}{9}$, 즉 선택지 (C)입니다. 두 경우를 모두 더해야 합니다.

정답: (D) $\frac{5}{9}$

5 정수론

출처: 2000 AMC 10 14번

> 월터 선생님은 학생이 다섯 명인 수학 수업에서 시험을 실시하였다. 선생님은 점수를 임의의 순서로 스프레드시트에 입력하였고, 스프레드시트는 점수가 하나 입력될 때마다 학급 평균을 다시 계산하였다. 월터 선생님은 점수를 하나씩 입력할 때마다 평균이 항상 정수라는 것을 알아차렸다. 점수를 작은 것부터 차례로 나열하면 $71, 76, 80, 82, 91$이다. 월터 선생님이 마지막으로 입력한 점수는?
>
> **(A)** 71 **(B)** 76 **(C)** 80 **(D)** 82 **(E)** 91

핵심 아이디어. "처음 k개 점수의 평균이 정수"라는 말은 "처음 k개 점수의 합이 k로 나누어떨어진다"는 뜻입니다. 평균을 합의 나누어떨어짐으로 바꾸면 문제가 나머지에 관한 문제가 되며, 전체 합에서부터 **거꾸로** 따져 가는 것이 가장 쉽습니다.

1단계. 전체 합. $71 + 76 + 80 + 82 + 91 = 400$이고, 이는 당연히 5로 나누어떨어집니다.

2단계. 처음 네 점수 이용하기. 처음 네 점수의 합은 $400 -$ (마지막 점수)이고, 이 값은 4로 나누어떨어져야 합니다. 400은 4로 나누어떨어지므로 마지막 점수도 4로 나누어떨어져야 합니다. 점수 중에서 이 조건을 만족하는 것은 $76 = 4 \cdot 19$와 $80 = 4 \cdot 20$뿐입니다.

3단계. 처음 세 점수 이용하기. 처음 세 점수의 합은 (처음 네 점수의 합) $-$ (네 번째 점수)이고, 3으로 나누어떨어져야 합니다.

- 76이 마지막이라면 처음 네 점수의 합은 $400 - 76 = 324$로 3의 배수입니다. 그러면 네 번째 점수 자체가 3의 배수여야 합니다. 그런데 $71, 80, 82, 91$ 중 어느 것도 3의 배수가 아닙니다(3으로 나눈 나머지가 각각 $2, 2, 1, 1$입니다). 불가능합니다.
- 80이 마지막이라면 처음 네 점수의 합은 320이고, 이를 3으로 나눈 나머지는 2입니다. 네 번째 점수도 3으로 나눈 나머지가 2여야 하므로 71입니다. 그러면 처음 세 점수는 $76, 82, 91$이고, 그 합은 $249 = 3 \cdot 83$입니다. ✓

4단계. 처음 두 점수 확인하기. $76 + 82 = 158$은 짝수이므로 $76, 82, 91, 71, 80$의 순서가 조건을 만족합니다. 누적 합 $76, 158, 249, 320, 400$이 각각 $1, 2, 3, 4, 5$로 나누어떨어집니다.

따라서 마지막 점수는 80입니다.

주의. 2단계에서는 후보가 **두 개** 남습니다. 거기서 멈추고 첫 번째 후보 76을 택하면 선택지 (B)가 됩니다. 이를 걸러 내는 것이 3단계입니다.

정답: (C) 80

6 대수

출처: 2009 AMC 10B 15번

> 양동이에 물을 3분의 2만큼 채웠을 때, 양동이와 물의 무게의 합은 a킬로그램이다. 양동이에 물을 절반만큼 채웠을 때, 전체 무게는 b킬로그램이다. 양동이에 물을 가득 채웠을 때의 전체 무게(킬로그램)를 a와 b로 나타낸 것은?
>
> **(A)** $\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b$ **(B)** $\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}b$ **(C)** $\frac{3}{2}a+b$ **(D)** $\frac{3}{2}a+2b$ **(E)** $3a-2b$

핵심 아이디어. 전체 무게는 모르는 두 부분, 즉 빈 양동이와 가득 찬 물로 이루어져 있으므로 각각에 문자를 붙여 봅시다. 조건이 두 개, 미지수가 두 개입니다. 두 식을 빼면 양동이가 사라집니다.

1단계. 식 세우기. 빈 양동이의 무게를 x, 양동이를 가득 채우는 물의 무게를 y라 합시다. 그러면 다음이 성립합니다.

$$x+\tfrac{2}{3}y=a, \qquad x+\tfrac{1}{2}y=b.$$

2단계. 빼기. 양동이의 무게가 소거되어 $\frac{2}{3}y-\frac{1}{2}y=a-b$입니다. $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{4}{6}-\frac{3}{6}=\frac{1}{6}$이므로 이 식은 $\frac{1}{6}y=a-b$가 되고, $y=6a-6b$입니다.

3단계. 양동이의 무게 구하기. 두 번째 식에서 $x=b-\frac{1}{2}y=b-(3a-3b)=4b-3a$입니다.

4단계. 가득 찬 양동이.

$$x+y=(4b-3a)+(6a-6b)=3a-2b.$$

다른 풀이. 무게가 일정한 간격으로 늘어난다고 생각해 봅시다. 절반에서 3분의 2까지 채우면 물이 $\frac{1}{6}$만큼 더해지고 무게는 $a-b$만큼 늘어납니다. 3분의 2에서 가득 찰 때까지는 물이 $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$만큼 더해지므로, 같은 간격이 두 번 더 있는 셈입니다. 따라서 가득 찼을 때의 무게는 $a+2(a-b)=3a-2b$입니다.

수로 확인하기: 1 kg인 양동이에 물이 6 kg 들어간다면 $a=5$, $b=4$이고 가득 찼을 때의 무게는 7입니다. 실제로 $3(5)-2(4)=7$이고, 나머지 네 선택지는 $\frac{14}{3}$, $\frac{11}{2}$, $\frac{23}{2}$, $\frac{31}{2}$이 됩니다.

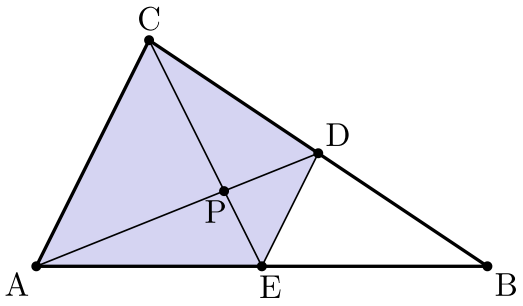
주의. 양동이의 무게가 없는 것처럼 a를 $\frac{3}{2}$배 하고 싶어지기 쉽습니다. 하지만 그러면 양동이 자체의 무게를 $1\frac{1}{2}$번 세게 됩니다. 선택지 (B), (C), (D)는 모두 $\frac{3}{2}a$에서 출발하는데, 위의 수치 확인에서 보듯 어느 것도 맞지 않습니다.

정답: (E) $3a-2b$

7 기하

출처: 2013 AMC 10B 16번

삼각형 $\triangle ABC$에서 중선 AD와 CE는 점 P에서 만나고, $PE = 1.5$, $PD = 2$, $DE = 2.5$이다. 사각형 $AEDC$의 넓이는?



(A) 13 **(B)** 13.5 **(C)** 14 **(D)** 14.5 **(E)** 15

핵심 아이디어. 주어진 세 길이 1.5, 2, 2.5는 피타고라스 수 3, 4, 5의 $\frac{1}{2}$배입니다. 삼각형의 세 변이 $a^2+b^2=c^2$을 만족하면 직각을 찾아봅시다. 여기서는 그 직각 때문에 두 중선이 수직이 되고, 대각선이 서로 수직인 사각형은 넓이를 쉽게 구할 수 있습니다.

1단계. P에서의 직각. $\triangle PDE$에서

$$PE^2 + PD^2 = 1.5^2 + 2^2 = 2.25 + 4 = 6.25 = 2.5^2 = DE^2,$$

따라서 피타고라스 정리의 역에 의해 $\angle DPE = 90^\circ$입니다. 즉 중선 AD와 CE는 서로 수직입니다.

2단계. 중선의 전체 길이. P는 무게중심이므로 각 중선을 꼭짓점 쪽이 더 길도록 $2:1$로 나눕니다. 따라서 $CP = 2 \cdot PE = 3$, $AP = 2 \cdot PD = 4$입니다. 그러므로

$$CE = 3 + 1.5 = 4.5, \qquad AD = 4 + 2 = 6.$$

3단계. 넓이. 사각형 $AEDC$를 대각선 AD를 따라 $\triangle ACD$와 $\triangle AED$로 나눕니다. $CE \perp AD$이므로, 밑변 AD에 대한 두 삼각형의 높이는 각각 $CP = 3$, $EP = 1.5$입니다. 따라서

$$[AEDC] = \tfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 + \tfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1.5 = 9 + 4.5 = 13.5.$$

이는 일반적인 규칙의 한 예입니다. 대각선 d_1, d_2가 서로 수직인 사각형의 넓이는 $\frac{1}{2}d_1d_2 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4.5$입니다.

정답: (B) 13.5

8 정수론

출처: 2007 AMC 10A 17번

> 양의 정수 m, n이 $75m = n^3$을 만족한다. $m+n$의 최솟값은?
>
> **(A)** 15 **(B)** 30 **(C)** 50 **(D)** 60 **(E)** 5700

핵심 아이디어. "n^3"은 세제곱수를 뜻합니다. 어떤 수가 세제곱수일 필요충분조건은 소인수분해했을 때 모든 소수의 지수가 3의 배수인 것입니다. 따라서 75를 소인수분해하고 m이 무엇을 채워야 하는지 생각해 봅시다.

1단계. 소인수분해. $75 = 3 \cdot 5^2$이므로 $75m = 3^1 \cdot 5^2 \cdot m$입니다.

2단계. m이 포함해야 하는 것. $3^1 \cdot 5^2 \cdot m$이 세제곱수가 되려면 3의 지수가 3의 배수가 되어야 하므로, m에는 3이 적어도 두 개 더 있어야 합니다. 마찬가지로 5의 지수를 맞추려면 5가 적어도 하나 더 필요합니다. 따라서 m은 $3^2 \cdot 5 = 45$의 배수입니다.

3단계. 가장 작은 m이 조건을 만족합니다. $m = 45$이면 $75 \cdot 45 = 3375 = 3^3 \cdot 5^3 = 15^3$이므로 $n = 15$이고 $m + n = 60$입니다.

4단계. 더 작은 값은 불가능합니다. n^3이 3과 5로 나누어떨어지므로 n도 그렇습니다. 따라서 어떤 양의 정수 k에 대하여 $n = 15k$입니다. 그러면 $m = \dfrac{(15k)^3}{75} = 45k^3$이므로

$$m + n = 45k^3 + 15k,$$

이 값은 k가 커질수록 커집니다. 최솟값은 $k = 1$일 때 $45 + 15 = 60$입니다.

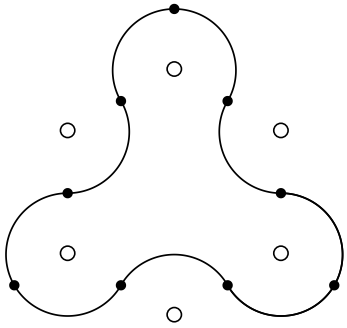
주의. $75m$을 세제곱수로 만드는 손쉬운 방법은 $m = 75^2$으로 두어 $75m = 75^3$이 되게 하는 것입니다. 그러면 $n = 75$이고 $m + n = 5625 + 75 = 5700$, 즉 선택지 (E)가 됩니다. 조건을 만족하는 쌍이긴 하지만 최솟값과는 거리가 멉니다. **부족한** 소인수만 채우면 됩니다.

정답: (D) 60

9 기하

출처: 2012 AMC 10A 18번

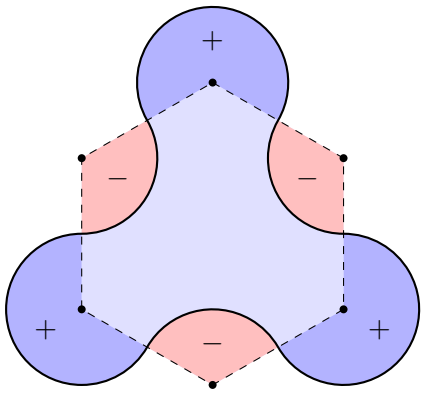
그림의 닫힌 곡선은 길이가 각각 $\frac{2\pi}{3}$ 인 합동인 원호 9개로 이루어져 있고, 각 호에 해당하는 원의 중심은 모두 한 변의 길이가 2인 정육각형의 꼭짓점 중 하나이다. 이 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이는?



(A) $2\pi + 6$ **(B)** $2\pi + 4\sqrt{3}$ **(C)** $3\pi + 4$ **(D)** $2\pi + 3\sqrt{3} + 2$ **(E)** $\pi + 6\sqrt{3}$

핵심 아이디어. 그림의 작은 원 여섯 개는 정육각형의 꼭짓점이므로 정육각형을 그려 넣어 봅시다. 그러면 곡선은 세 꼭짓점 둘레에서는 바깥으로 불룩 튀어나오고 나머지 세 꼭짓점에서는 안으로 움푹 들어갑니다. 따라서 넓이는 "정육각형 + 볼록한 부분 − 오목한 부분"이고, 볼록한 부분과 오목한 부분은 모두 부채꼴입니다.

1단계. 반지름. 반지름이 r이고 중심각이 120°인 호의 길이는 $\frac{1}{3} \cdot 2\pi r$입니다. $\frac{2\pi r}{3} = \frac{2\pi}{3}$로 놓으면 $r = 1$입니다. 이웃한 꼭짓점 사이의 거리는 2이므로, 반지름이 1인 이웃한 두 원은 각 변의 중점에서 정확히 만납니다. 즉 곡선은 여섯 변의 중점을 모두 지납니다.



2단계. 정육각형. 정육각형은 한 변의 길이가 2인 정삼각형 여섯 개로 이루어져 있고, 각 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 = \sqrt{3}$입니다. 따라서 정육각형의 넓이는 $6\sqrt{3}$입니다.

3단계. 볼록한 부분 (+). 위쪽, 왼쪽 아래, 오른쪽 아래 꼭짓점에서는 정육각형의 120° 내각 부분이 정육각형 안쪽에 있고, 곡선은 나머지 $360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$만큼을 정육각형 바깥에서 돌아갑니다(아홉 개의 호 중

두 개). 볼록한 부분 하나는 단위원의 중심각 240°인 부채꼴이며, 넓이는 $\frac{2}{3}\pi$입니다. 세 개를 합하면 2π가 더해집니다.

4단계. 오목한 부분 ($-$). 나머지 세 꼭짓점에서는 120°인 호 하나가 정육각형 안으로 파고들어, 넓이가 $\frac{1}{3}\pi$인 중심각 120°의 부채꼴을 잘라 냅니다. 세 개를 합하면 π가 빠집니다.

5단계. 합계. $6\sqrt{3} + 2\pi - \pi = \pi + 6\sqrt{3}$입니다. (확인: 호의 개수는 $3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 9$개로, 문제의 조건과 같습니다.)

> **주의.** 오목한 부분은 넓이를 **뺍니다**. 아홉 개의 120° 부채꼴을 모두 정육각형에 더하면 $3\pi + 6\sqrt{3}$이 되는데, 이것은 선택지에 없습니다. 어림셈으로도 구제받을 수 없습니다. 선택지 (B), (C), (D), (E)는 모두 13.2와 13.6 사이에 있기 때문입니다.

정답: (E) $\pi + 6\sqrt{3}$

---

10 대수

출처: 2004 AMC 10B 19번

> 수열 $2001, 2002, 2003, \ldots$에서 넷째 항부터 각 항은 바로 앞의 항을, 그 항보다 앞선 두 항의 합에서 빼서 얻는다. 예를 들어, 넷째 항은 $2001 + 2002 - 2003 = 2000$이다. 이 수열의 2004번째 항은?
>
> **(A)** -2004 **(B)** -2 **(C)** 0 **(D)** 4003 **(E)** 6007

> **핵심 아이디어.** 2004개의 항을 다 계산하는 사람은 없습니다. 아주 멀리 있는 항을 묻는 문제에서는 처음 몇 항을 써 보고 규칙을 찾은 뒤, 그 규칙을 믿을 수 있도록 점화 관계로 증명해 봅시다.

1단계. 몇 항 계산하기. 각 항을 $a_1, a_2, \ldots$라 하면 규칙은 $a_{k+1} = a_{k-2} + a_{k-1} - a_k$입니다.

$$a_5 = 2002 + 2003 - 2000 = 2005, \quad a_6 = 2003 + 2000 - 2005 = 1998, \quad a_7 = 2000 + 2005 - 1998 = 2007.$$

따라서 수열은 $2001, 2002, 2003, 2000, 2005, 1998, 2007, \ldots$로 이어집니다. 홀수 번째 항은 2씩 커지고, 짝수 번째 항 $2002, 2000, 1998, \ldots$은 2씩 작아집니다.

2단계. 규칙이 계속되는 이유. 규칙의 양변에서 a_{k-1}을 빼면 다음과 같습니다.

$$a_{k+1} - a_{k-1} = a_{k-2} - a_k = -(a_k - a_{k-2}).$$

즉 "두 칸 건너뛸 때의 변화량"은 매번 바로 앞 변화량의 부호를 바꾼 값입니다. 첫 변화량이 $a_3 - a_1 = +2$이므로 변화량은 $+2, -2, +2, -2, \ldots$로 바뀝니다. 다시 말해 $a_4 - a_2 = -2$, $a_6 - a_4 = -2$이고, 이후의 모든 짝수 번째 항에 대해서도 마찬가지입니다.

3단계. 2004번째 항. 짝수 번째 항은 $a_2 = 2002$에서 시작하여 매번 2씩 작아집니다. a_{2004}는 짝수 번째 항 중 1002번째이므로, 1001번 작아진 뒤의 값입니다.

$$a_{2004} = 2002 - 2 \cdot 1001 = 2002 - 2002 = 0.$$

깔끔하게 보는 방법도 있습니다. $a_{2j} = 2004 - 2j$ 이며, 이 식은 $a_2 = 2002$, $a_4 = 2000$, $a_6 = 1998$에 맞고, $a_{2004} = 0$을 줍니다.

> **주의.** 작아지는 횟수를 셀 때는 하나 차이로 틀리기 쉽습니다. 짝수 번째 항 중 1002번째 항은 1002번이 아니라 1001번 작아진 뒤에 나옵니다. 1002를 쓰면 $2002 - 2004 = -2$, 즉 선택지 (B)가 됩니다.

정답: (C) 0