
AMC 10

하프 모의고사

제 16 회

해설

정답표 • 출처 • 단계별 풀이

정답표와 출처

번호	정답	출처	영역
1	D	2001 AMC 10 10번	대수
2	C	2006 AMC 10A 12번	기하
3	A	2003 AMC 10A 13번	대수
4	C	2019 AMC 10B 14번	정수론
5	C	2011 AMC 10A 15번	대수
6	B	2008 AMC 10A 16번	기하
7	D	2019 AMC 10A 17번	경우의 수와 확률
8	D	2018 AMC 10A 18번	정수론
9	D	2014 AMC 10B 19번	경우의 수와 확률
10	D	2010 AMC 10A 20번	기하

1 대수

출처: 2001 AMC 10 10번

양수 x, y, z 가 $xy = 24$, $xz = 48$, $yz = 72$ 를 만족할 때, $x + y + z$ 의 값은?

- (A) 18 (B) 19 (C) 20 (D) 22 (E) 24

핵심 아이디어. 각 식에는 세 문자 중 두 개가 들어 있으므로, 세 식을 모두 곱하면 각 문자가 두 번씩 나타나 $(xyz)^2$ 이 됩니다.

1단계. 세 식을 곱하면 $(xy)(xz)(yz) = (xyz)^2 = 24 \cdot 48 \cdot 72$ 입니다. 소인수분해하면 $24 = 2^3 \cdot 3$, $48 = 2^4 \cdot 3$, $72 = 2^3 \cdot 3^2$ 이므로 이 곱은 $2^{10} \cdot 3^4$ 입니다. 세 수가 양수이므로 $xyz = 2^5 \cdot 3^2 = 288$ 입니다.

2단계. xyz 를 주어진 각 곱으로 나누면 문자 하나씩을 구할 수 있습니다.

$$x = \frac{288}{yz} = \frac{288}{72} = 4, \quad y = \frac{288}{xz} = \frac{288}{48} = 6, \quad z = \frac{288}{xy} = \frac{288}{24} = 12.$$

확인: $4 \cdot 6 = 24$, $4 \cdot 12 = 48$, $6 \cdot 12 = 72$.

3단계. $x + y + z = 4 + 6 + 12 = 22$ 입니다.

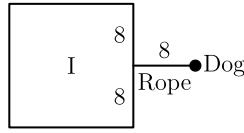
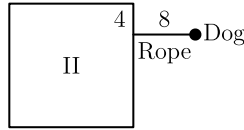
다른 풀이. 두 식을 나누어 문자 하나를 소거할 수도 있습니다. $xz = 48$ 을 $xy = 24$ 로 나누면 $\frac{z}{y} = 2$ 이므로 $z = 2y$ 입니다. 그러면 $yz = 72$ 는 $y \cdot 2y = 2y^2 = 72$ 가 되어 $y^2 = 36$ 이고, y 는 양수이므로 $y = 6$ 입니다. 따라서 $z = 12$, $x = \frac{24}{6} = 4$ 로 앞에서와 같은 값을 얻습니다.

정답: (D) 22

2 기하

출처: 2006 AMC 10A 12번

롤리는 자기 개를 길이 8피트인 밧줄로 한 변의 길이가 16피트인 정사각형 모양의 창고에 매어 두려고 한다. 롤리가 미리 그려 본 배치도는 다음과 같다.



두 배치 중 개가 돌아다닐 수 있는 영역의 넓이가 더 넓은 것은 어느 것이고, 몇 제곱피트만큼 더 넓은가?

- (A) I, 8π 만큼 (B) I, 6π 만큼 (C) II, 4π 만큼 (D) II, 8π 만큼 (E) II, 10π 만큼

핵심 아이디어. 밧줄이 닿는 범위를 그려 봅시다. 벽 앞쪽에서 개는 항상 반원을 휩쓸고 지나갑니다. 실제로 따져야 할 것은 밧줄이 창고의 모서리를 돌아갈 만큼 긴지뿐이며, 그림에 적힌 8과 4가 바로 모서리를 가리키고 있습니다.

1단계. 배치 I. 밧줄은 길이 16피트인 변의 한가운데에 매여 있습니다. 그 벽 앞쪽에서 개는 반지름 8인 반원을 휩쓸고, 그 넓이는 $\frac{1}{2}\pi \cdot 8^2 = 32\pi$ 입니다. 각 모서리는 매듭에서 정확히 8피트 떨어져 있으므로, 밧줄은 모서리에 겨우 닿을 뿐 모서리를 돌아갈 여분이 없습니다. 합계: 32π .

2단계. 배치 II. 매듭은 한 모서리에서 4피트, 다른 모서리에서 12피트 떨어져 있습니다. 벽 앞쪽에서 개는 이번에도 넓이 32π 인 반원을 휩쓸고 지나갑니다. 먼 모서리에는 닿지 않지만, 가까운 모서리에는 닿고도 밧줄이 $8 - 4 = 4$ 피트 남습니다.

그 모서리를 회전의 중심으로 하여, 길이 4피트인 나머지 밧줄은 벽을 연장한 직선 방향에서부터 이웃한 벽에 딱 붙을 때까지, 즉 직각만큼 돌 수 있습니다. 이때 반지름 4인 사분원을 휩쓸고, 그 넓이는 $\frac{1}{4}\pi \cdot 4^2 = 4\pi$ 이며 반원과 겹치지 않습니다. 합계: $32\pi + 4\pi = 36\pi$.

3단계. 배치 II가 $36\pi - 32\pi = 4\pi$ 제곱피트만큼 더 넓습니다.

주의. 창고가 모서리 너머로 도는 것을 막으므로, 추가되는 영역은 **사분원**입니다. 이를 반원으로 생각하면 $\frac{1}{2}\pi \cdot 4^2 = 8\pi$ 가 되어 “II, 8π 만큼”, 즉 선택지 (D)를 고르게 됩니다.

정답: (C) II, 4π 만큼

3 대수

출처: 2003 AMC 10A 13번

세 수의 합은 20이다. 첫 번째 수는 나머지 두 수의 합의 4배이고, 두 번째 수는 세 번째 수의 일곱 배이다. 세 수의 곱은?

- (A) 28 (B) 40 (C) 100 (D) 400 (E) 800

핵심 아이디어. 각 문장을 식으로 바꾸어 봅시다. 합의 조건과 첫 번째 조건이 모두 “나머지 두 수”를 한꺼번에 다루므로, $b + c$ 를 하나의 덩어리로 보고 먼저 구합니다.

세 수를 차례로 a, b, c 라 합시다. 세 문장은 다음을 말합니다.

$$a + b + c = 20, \quad a = 4(b + c), \quad b = 7c.$$

1단계. $a = 4(b + c)$ 를 합의 식에 대입하면 $4(b + c) + (b + c) = 20$, 즉 $5(b + c) = 20$ 입니다. 따라서 $b + c = 4$ 이고 $a = 4 \cdot 4 = 16$ 입니다.

2단계. 이제 $b = 7c$ 를 $b + c = 4$ 에 대입하면 $7c + c = 8c = 4$ 이므로 $c = \frac{1}{2}$, $b = 7 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ 입니다.

세 조건을 모두 확인해 봅시다. $16 + \frac{7}{2} + \frac{1}{2} = 16 + 4 = 20$ 이고, $16 = 4 \cdot 4$ 이며, $\frac{7}{2} = 7 \cdot \frac{1}{2}$ 입니다. 모두 성립합니다.

3단계. 세 수의 곱은 다음과 같습니다.

$$16 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{2} = 16 \cdot \frac{7}{4} = 28.$$

주의. 세 수가 정수라는 조건은 어디에도 없습니다. c 가 $\frac{1}{2}$ 로 나와도 올바른 값입니다. “정수”가 아니라고 해서 계산 실수를 찾으려 되돌아가거나 반올림하지 마세요.

다른 풀이. 전체를 비율에 따라 나누어 생각해 봅시다. 첫 번째 수는 나머지 두 수의 합의 4배이므로, 전체 20은 $4 : 1$ 로 나뉩니다. 즉 첫 번째 수는 $\frac{4}{5} \cdot 20 = 16$ 이고, 나머지 두 수의 합은 4입니다. 같은 방법으로 $b : c = 7 : 1$ 이므로 그 4는 $\frac{7}{8} \cdot 4 = \frac{7}{2}$ 과 $\frac{1}{8} \cdot 4 = \frac{1}{2}$ 로 나뉩니다.

정답: (A) 28

4 정수론

출처: 2019 AMC 10B 14번

19!을 십진법으로 나타내면 $121,6T5,100,40M,832,H00$ 이다. 여기서 T, M, H 는 주어지지 않은 숫자를 나타낸다. $T + M + H$ 의 값은?

- (A) 3 (B) 8 (C) 12 (D) 14 (E) 17

핵심 아이디어. 19!을 손으로 다 곱할 수는 없지만, 그 약수는 많이 알고 있습니다. 자릿수에서 바로 판정할 수 있는 약수를 골라 봅시다. 1000(끝 세 자리), 9(각 자리 숫자의 합), 11(각 자리 숫자를 번갈아 더하고 빼 값)입니다. 미지수가 세 개, 판정법도 세 개입니다.

1단계. 1000으로 나누어떨어짐. 곱 19!에는 5, 10, 15가 들어 있어 인수 5가 세 개 있고, 인수 2는 세 개보다 훨씬 많습니다. 따라서 19!은 $1000 = 2^3 \cdot 5^3$ 으로 나누어떨어지므로, 끝 세 자리는 000이고 $H = 0$ 입니다.

2단계. 9로 나누어떨어짐. 알려진 숫자의 합은 $1+2+1+6+5+1+0+0+4+0+8+3+2+0+0 = 33$ 입니다. 따라서 $33 + T + M$ 은 9의 배수입니다. $0 \leq T + M \leq 18$ 이므로 이 합은 33과 51 사이에 있고, 36 또는 45입니다. 즉 $T + M = 3$ 또는 $T + M = 12$ 입니다.

3단계. 11로 나누어떨어짐. 일의 자리부터 세어 1번째, 3번째, 5번째, ... 자리의 숫자를 더하면 $0+H+3+M+4+0+5+6+2 = 20+M$ 입니다. 2번째, 4번째, ... 자리의 숫자를 더하면 $0+2+8+0+0+1+T+1+1 = 13+T$ 입니다. 두 합의 차 $(20+M) - (13+T) = 7+M-T$ 는 11의 배수여야 합니다. 이 값은 -2와 16 사이에 있으므로 0 또는 11입니다. 즉 $T - M = 7$ 또는 $T - M = -4$ 입니다.

4단계. 종합하기. $T + M$ 과 $T - M$ 은 홀짝이 같습니다. $T + M = 3$ 과 $T - M = 7$ 을 연립하면 $M = -2$ 가 되어 불가능합니다. $T + M = 12$ 와 $T - M = -4$ 를 연립하면 $T = 4, M = 8$ 입니다. 실제로 $19! = 121,645,100,408,832,000$ 입니다.

따라서 $T + M + H = 4 + 8 + 0 = 12$ 입니다.

주의. 각 자리 숫자의 합만으로는 두 가지 가능성이 남습니다. 작은 쪽인 $T + M = 3$ 을 고르면 $3+0 = 3$, 즉 선택지 (A)가 됩니다. 어느 쪽인지 정하려면 11의 배수 판정법이 필요합니다.

정답: (C) 12

5 대수

출처: 2011 AMC 10A 15번

로이는 배터리-가솔린 하이브리드 자동차를 새로 샀다. 어느 여행에서 이 자동차는 처음 40마일은 배터리만으로 달렸고, 나머지 구간은 가솔린만으로 달렸으며, 이때 1마일당 0.02갤런의 가솔린을 사용하였다. 여행 전체에서 평균 연비는 갤런당 55마일이었다. 이 여행의 거리는 몇 마일인가?

- (A) 140 (B) 240 (C) 440 (D) 640 (E) 840

핵심 아이디어. “평균 갤런당 55마일”은 전체 거리(마일)를 전체 가솔린 양(갤런)으로 나눈 값입니다. 가솔린을 쓰는 것은 가솔린으로 달린 구간뿐이므로, 그 모르는 거리에 이름을 붙이고 이 분수 하나를 써 봅시다.

1단계. 식 세우기. 가솔린으로 달린 거리를 x 마일이라 합시다. 여행 전체의 거리는 $40+x$ 마일이고, 사용한 가솔린은 $0.02x$ 갤런입니다. 따라서 다음이 성립합니다.

$$\frac{40+x}{0.02x} = 55.$$

2단계. 풀기. 양변에 $0.02x$ 를 곱하면 $40+x = 55 \cdot 0.02x = 1.1x$ 입니다. 양변에서 x 를 빼면 $40 = 0.1x$ 이므로 $x = 400$ 입니다.

3단계. 묻는 것에 답하기. 여행 거리는 $40+400 = 440$ 마일입니다. 확인: 자동차가 쓴 가솔린은 $0.02 \cdot 400 = 8$ 갤런이고, 갤런당 $440 \div 8 = 55$ 마일입니다.

왜 이렇게 되는지 생각해 보면 도움이 됩니다. 가솔린만으로 달리면 연비는 갤런당 $1 \div 0.02 = 50$ 마일입니다. 배터리로 공짜로 달린 40마일이 평균을 55까지 끌어올립니다. 가솔린 구간이 길어질수록 평균은 다시 50에 가까워지므로, 평균이 정확히 55가 되는 여행 거리는 단 하나뿐입니다.

주의. $x = 400$ 은 여행 중 가솔린 구간일 뿐입니다. 문제는 여행 전체의 거리를 묻고 있으므로 배터리로 달린 40마일을 다시 더해야 합니다.

다른 풀이. 선택지를 대입해 봅시다. 여행 거리가 T 마일이면 사용한 가솔린은 $0.02(T - 40)$ 갤런입니다. $T = 440$ 이면 $0.02 \cdot 400 = 8$ 이고 $440 \div 8 = 55$ 입니다. $T = 240$ 이면 $0.02 \cdot 200 = 4$ 갤런이므로 60이 나와 너무 큼니다.

정답: (C) 440

6 기하

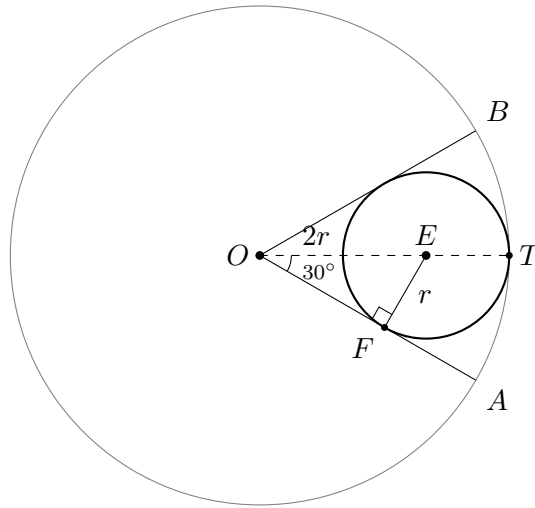
출처: 2008 AMC 10A 16번

두 점 A, B 는 중심이 O 인 원 위에 있고, $\angle AOB = 60^\circ$ 이다. 두 번째 원은 첫 번째 원에 내접하고 OA 와 OB 에 모두 접한다. 작은 원의 넓이와 큰 원의 넓이의 비는?

- (A) $\frac{1}{16}$ (B) $\frac{1}{9}$ (C) $\frac{1}{8}$ (D) $\frac{1}{6}$ (E) $\frac{1}{4}$

핵심 아이디어. 각의 두 변에 모두 접하는 원의 중심은 그 각의 이등분선 위에 있습니다. 60° 의 절반은 30° 이고, 접점으로 그은 반지름은 접선과 직각을 이룹니다. 따라서 30-60-90 삼각형이 나타나고, 이 삼각형이 r 과 O 로부터의 거리를 이어 줍니다.

큰 원과 작은 원의 반지름을 각각 R, r 이라 하고, 작은 원의 중심을 E 라 합시다.



1단계. E 는 OA 와 OB 로부터 모두 거리가 r 이므로 $\angle AOB$ 의 이등분선 위에 있고, $\angle EOA = 30^\circ$ 입니다.

2단계. 작은 원이 OA 에 접하는 점을 F 라 합시다. 반지름 $EF = r$ 은 OA 에 수직입니다. 직각삼각형 OFE 에서 O 에서의 각은 30° 이고, 이 각의 대변의 길이는 빗변의 길이의 절반입니다. 따라서 $OE = 2 \cdot EF = 2r$ 입니다.

3단계. 두 원은 두 중심을 지나는 직선 위의 점 T 에서 접하므로, O, E, T 는 한 직선 위에 있고 $OT = OE + ET$ 입니다. 즉 $R = 2r + r = 3r$ 입니다.

4단계. 넓이의 비는 반지름의 비의 제곱입니다.

$$\frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \left(\frac{r}{3r}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$

주의. 큰 원의 반지름은 E 를 지나 작은 원의 반지름만큼 더 뺀어 있습니다. $OE = R - r$ 대신 $OE = R$ 로 쓰면 $R = 2r$ 이 되어 비가 $\frac{1}{4}$, 즉 선택지 (E)가 나옵니다. 또 제공하는 것을 잊지 마세요. 반지름의 비 $\frac{1}{3}$ 은 넓이의 비가 아닙니다.

정답: (B) $\frac{1}{9}$

7 경우의 수와 확률

출처: 2019 AMC 10A 17번

어린이가 모양은 같고 색깔이 다른 정육면체들로 탑을 쌓는다. 빨간 정육면체 2개, 파란 정육면체 3개, 초록 정육면체 4개를 가지고 높이가 정육면체 8개인 탑을 쌓을 때, 쌓을 수 있는 서로 다른 탑은 몇 가지인가? (정육면체 하나는 남는다.)

- (A) 24 (B) 288 (C) 312 (D) 1,260 (E) 40,320

핵심 아이디어. “정육면체 하나는 남는다”는 말은 남는 정육면체의 색깔에 따라 경우를 나누라는 신호입니다. 각 경우에는 색깔이 반복되는 정육면체 8개를 배열하게 되는데, 이는 “같은 것이 있는 순열”의 전형적인 문제입니다.

1단계. 세는 방법. 정육면체 8개가 모두 다르다면 순서는 $8! = 40,320$ 가지입니다. 같은 색깔의 정육면체 끼리는 서로 바꾸어도 탑이 달라지지 않으므로, 각 색깔 안에서 섞는 방법의 수로 나눕니다. 빨간 것이 p 개, 파란 것이 q 개, 초록인 것이 s 개이면 그 수는 $\frac{8!}{p!q!s!}$ 입니다.

2단계. 세 가지 경우.

- 빨간 정육면체가 남는 경우(빨강 1개, 파랑 3개, 초록 4개): $\frac{40,320}{1 \cdot 6 \cdot 24} = \frac{40,320}{144} = 280$.
- 파란 정육면체가 남는 경우(빨강 2개, 파랑 2개, 초록 4개): $\frac{40,320}{2 \cdot 2 \cdot 24} = \frac{40,320}{96} = 420$.
- 초록 정육면체가 남는 경우(빨강 2개, 파랑 3개, 초록 3개): $\frac{40,320}{2 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{40,320}{72} = 560$.

3단계. 서로 다른 경우에서 나온 탑은 색깔별 개수가 다르므로 두 번 세어지는 탑은 없습니다. 따라서 전체는 $280 + 420 + 560 = 1260$ 가지입니다.

주의. $8! = 40,320$ 을 그대로 쓰면 두 빨간 정육면체(파란 것끼리, 초록인 것끼리도)를 서로 다른 것으로 보는 셈입니다. 같은 색깔의 정육면체는 서로 구별되지 않으므로 (E)는 중복해서 센 것입니다.

다른 풀이. 남는 정육면체를 탑의 맨 위에 올려 봅시다. 그러면 높이가 8인 탑 하나하나가 정육면체 9개 전체의 배열 하나에 대응하고, 맨 위의 정육면체를 빼면 원래대로 돌아갑니다. 따라서 정육면체 9개 전체로 쌓은 탑의 수만 세면 됩니다. $\frac{9!}{2!3!4!} = \frac{362,880}{288} = 1260$.

정답: (D) 1,260

8 정수론

출처: 2018 AMC 10A 18번

다음 꼴로 나타낼 수 있는 음이 아닌 정수는 몇 개인가?

$$\begin{aligned} & a_7 \cdot 3^7 + a_6 \cdot 3^6 + a_5 \cdot 3^5 \\ & + a_4 \cdot 3^4 + a_3 \cdot 3^3 + a_2 \cdot 3^2 \\ & + a_1 \cdot 3^1 + a_0 \cdot 3^0, \end{aligned}$$

(단, $0 \leq i \leq 7$ 에 대하여 $a_i \in \{-1, 0, 1\}$ 이다.)

- (A) 512 (B) 729 (C) 1094 (D) 3281 (E) 59,048

핵심 아이디어. 계수 $-1, 0, 1$ 은 3진법의 숫자 $0, 1, 2$ 를 1씩 내린 것일 뿐입니다. 모든 계수에 1을 더하면 낮은 합이 평범한 3진법 수로 바뀌고, 3진법 수는 세기 쉽습니다.

이 합의 값을 N 이라 합시다.

1단계. 계수 옮기기. $d_i = a_i + 1$ 로 놓으면 각 d_i 는 $0, 1, 2$ 중 하나입니다. 그러면

$$d_7 \cdot 3^7 + \cdots + d_0 \cdot 3^0 = N + (3^7 + 3^6 + \cdots + 3^0) = N + 3280,$$

입니다. 왜냐하면 $1 + 3 + \cdots + 3^7 = \frac{3^8-1}{2} = \frac{6561-1}{2} = 3280$ 이기 때문입니다.

2단계. 3진법으로 읽기. 좌변은 3진법으로 $d_7 d_6 \dots d_0$ 이라고 쓴 수입니다(맨 앞자리에 0이 와도 됩니다). 0부터 $3^8 - 1 = 6560$ 까지의 모든 정수는 이러한 8자리 3진법 표현을 정확히 하나씩 가지며, 그 밖의 수는 이런 표현을 갖지 않습니다. 따라서 $N + 3280$ 은 $0, 1, \dots, 6560$ 의 각 값을 정확히 한 번씩 가지고, N 자체는 -3280 부터 3280 까지의 각 정수를 정확히 한 번씩 가집니다.

3단계. 세기. 음이 아닌 값은 $0, 1, 2, \dots, 3280$ 이므로 3281개의 정수입니다.

주의. 계수는 a_0 부터 a_7 까지 여덟 개입니다. 일곱 개로 계산하면 값의 범위가 -1093 부터 1093 까지가 되어 음이 아닌 값이 1094개, 즉 선택지 (C)가 나옵니다.

다른 풀이. 2단계에서 보았듯이 계수를 고르는 $3^8 = 6561$ 가지 방법은 서로 다른 6561개의 값을 줍니다. 모든 1과 -1 을 서로 바꾸면 값의 부호가 바뀌므로, 양수인 값과 음수인 값은 짝을 이룹니다. 값이 0인 경우는 정확히 하나이므로 $\frac{6561-1}{2} = 3280$ 개가 양수이고, 0을 더하면 3281개입니다.

정답: (D) 3281

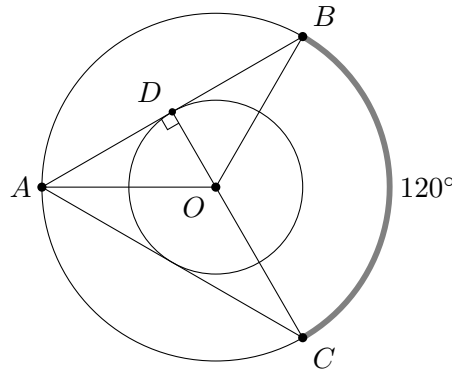
9 경우의 수와 확률

출처: 2014 AMC 10B 19번

반지름이 1과 2인 두 동심원이 있다. 바깥쪽 원 위에서 두 점을 각각 독립적으로, 균일하게 임의로 택한다. 두 점을 잇는 현이 안쪽 원과 만날 확률은?

- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{1}{2}$

핵심 아이디어. 대칭성에 의해 첫 번째 점에 대한 두 번째 점의 상대적인 위치만 중요하므로, 첫 번째 점 A 를 고정해 봅시다. 그다음 경계가 되는 현, 즉 A 에서 그은 현 중 안쪽 원에 딱 접하는 현을 찾습니다. 직각삼각형에 반지름 1과 2가 함께 나오면 30-60-90 삼각형을 떠올리면 됩니다.



1단계. 접하는 현. 안쪽 원에 점 D 에서 접하는 현 AB 를 그립니다. 그러면 $OD \perp AB$ 이고, $OD = 1$, $OA = 2$ 입니다. 한 변의 길이가 빗변의 길이의 절반인 직각삼각형에서 그 변의 대각은 30° 이므로 $\angle OAD = 30^\circ$ 입니다.

2단계. 호 BC 구하기. 삼각형 OAB 는 이등변삼각형($OA = OB = 2$)이므로 $\angle OBA = 30^\circ$ 이고, $\angle AOB = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$ 입니다. 반대쪽으로 접하는 다른 현 AC 에 대해서도 $\angle AOC = 120^\circ$ 입니다. 따라서 A 를 포함하지 않는 호 BC 의 중심각은 $360^\circ - 120^\circ - 120^\circ = 120^\circ$ 입니다(굵게 표시한 부분).

3단계. 어떤 현이 안쪽 원과 만나는가? 임의의 현 AP 에 대하여, O 에서 내린 수선의 발은 그 현의 중점이므로 피타고라스 정리에 의해 다음이 성립합니다. 여기서 (거리 $O-AP$)는 O 에서 현 AP 까지의 거리를 뜻합니다.

$$(\text{거리 } O-AP)^2 = 2^2 - \left(\frac{1}{2}AP\right)^2.$$

즉 현이 길수록 O 에 더 가깝게 지나갑니다. 접하는 현 AB 와 AC 는 정확히 거리 1만큼 떨어져 지나갑니다. 점 P 가 A 에서 출발하여 A 의 맞은편 점까지 움직이는 동안 현 AP 는 계속 길어지지만 합니다. 따라서 AP 가 O 로부터 1보다 가깝게 지나가는 것(즉 안쪽 원과 만나는 것)은 AP 가 AB 보다 길 때, 곧 P 가 굵게 표시한 호 BC 위에 있을 때이고, 그때뿐입니다.

4단계. 두 번째 점은 원 위에서 균일하게 택해지므로 구하는 확률은 $\frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{3}$ 입니다.

주의. 이 문제의 답은 넓이의 비가 아닙니다. 안쪽 원의 넓이는 바깥쪽 원의 넓이의 $\frac{1}{4}$ 이지만, 이 값으로 고르면 틀린 선택지 (B)가 됩니다. 임의의 점은 원 위에 있으므로 호의 길이로 재야 합니다.

정답: (D) $\frac{1}{3}$

10 기하

출처: 2010 AMC 10A 20번

한 모서리의 길이가 1미터인 정육면체 모양의 상자 안에 갇힌 파리가 지루함을 달래려고 상자의 각 꼭짓점을 방문하기로 한다. 파리는 같은 꼭짓점에서 출발하여 그 꼭짓점으로 돌아오며, 나머지 꼭짓점은 각각 정확히 한 번씩 방문한다. 한 꼭짓점에서 다른 어떤 꼭짓점으로 갈 때에도 파리는 날아가거나 기어서 직선으로 이동한다. 파리가 이동한 경로의 길이(미터)의 최댓값은?

- (A) $4 + 4\sqrt{2}$ (B) $2 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ (C) $2 + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$
(D) $4\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$ (E) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$

핵심 아이디어. 두 꼭짓점 사이의 거리는 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 의 세 가지뿐입니다. 경로를 길게 하려면 $\sqrt{3}$ 인 이동을 많이 써야 하므로, 그런 이동이 애초에 몇 개나 있는지 세어 봅시다. 최댓값을 구하려면 두 가지가 필요합니다. 상한을 보이는 것과, 그 상한에 실제로 도달하는 경로를 찾는 것입니다.

1단계. 가능한 이동. 정육면체를 좌표 0과 1에 놓으면 각 꼭짓점은 (0, 1, 1)과 같은 순서쌍이 됩니다. 좌표가 k 개 다른 두 꼭짓점 사이의 거리는 $\sqrt{k}$ 이므로, 거리는 1(모서리), $\sqrt{2}$ (면의 대각선), $\sqrt{3}$ (공간 대각선) 중 하나입니다. 경로는 8개의 꼭짓점을 방문하고 출발점으로 돌아오므로 이동은 모두 8번입니다.

2단계. 상한. 각 꼭짓점의 맞은편 꼭짓점은 정확히 하나이므로, 정육면체의 공간 대각선은 4개뿐입니다. 경로는 각 꼭짓점을 한 번씩만 방문하므로 같은 이동을 되풀이하지 않습니다. 따라서 8번의 이동 중 길이가 $\sqrt{3}$ 인 것은 많아야 4번이고, 나머지 이동은 모두 길이가 $\sqrt{2}$ 이하입니다. 경로가 공간 대각선을 $k \leq 4$ 개 쓴다면, $\sqrt{3} > \sqrt{2}$ 이므로 그 길이는 많아야 $k\sqrt{3} + (8 - k)\sqrt{2} \leq 4\sqrt{3} + 4\sqrt{2}$ 입니다.

3단계. 상한에 도달하는 경로. “세 좌표를 모두 바꾸기”와 “두 좌표 바꾸기”를 번갈아 하면 됩니다.

$$(0, 0, 0) \rightarrow (1, 1, 1) \rightarrow (0, 0, 1) \rightarrow (1, 1, 0) \rightarrow (0, 1, 1) \\ \rightarrow (1, 0, 0) \rightarrow (0, 1, 0) \rightarrow (1, 0, 1) \rightarrow (0, 0, 0).$$

8개의 꼭짓점이 모두 한 번씩 나타나고, 이동의 길이는 $\sqrt{3}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{2}, \dots$ 로 번갈아 나오며 각각 네 번씩입니다.

따라서 최댓값은 $4\sqrt{2} + 4\sqrt{3} \approx 12.59$ 미터입니다.

주의. 선택지 (E)의 $3\sqrt{2} + 5\sqrt{3} \approx 12.90$ 이 더 크지만, 이 값을 얻으려면 공간 대각선이 다섯 개 필요합니다. 정육면체의 공간 대각선은 네 개뿐입니다.

정답: (D) $4\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$