
AMC 10

하프 모의고사

제 17 회

해설

정답표 • 출처 • 단계별 풀이

정답표와 출처

번호	정답	출처	영역
1	E	2013 AMC 10A 10번	대수
2	C	2000 AMC 10 11번	정수론
3	E	2019 AMC 10A 12번	대수
4	B	2008 AMC 10B 14번	기하
5	E	2002 AMC 10B 15번	정수론
6	D	2006 AMC 10A 16번	기하
7	D	2002 AMC 10A 17번	대수
8	A	2005 AMC 10A 18번	경우의 수와 확률
9	C	2015 AMC 10B 19번	기하
10	B	2016 AMC 10A 20번	경우의 수와 확률

1 대수

출처: 2013 AMC 10A 10번

어떤 꽃다발에 분홍 장미, 빨간 장미, 분홍 카네이션, 빨간 카네이션이 들어 있다. 분홍 꽃의 3분의 1은 장미이고, 빨간 꽃의 4분의 3은 카네이션이며, 전체 꽃의 10분의 6은 분홍 꽃이다. 카네이션은 전체 꽃의 몇 퍼센트인가?

- (A) 15 (B) 30 (C) 40 (D) 60 (E) 70

핵심 아이디어. 답이 백분율이므로 꽃다발에 꽃이 정확히 100송이 있다고 생각하고, 네 종류를 각각 세어 봅시다.

전체 꽃의 10분의 6이 분홍 꽃이므로 분홍 꽃은 60송이, 빨간 꽃은 $100 - 60 = 40$ 송이입니다.

분홍 꽃의 3분의 1이 장미이므로 분홍 장미는 $\frac{1}{3} \cdot 60 = 20$ 송이이고, 분홍 카네이션은 남은 $60 - 20 = 40$ 송이입니다.

빨간 꽃의 4분의 3이 카네이션이므로 빨간 카네이션은 $\frac{3}{4} \cdot 40 = 30$ 송이입니다.

모두 합하면 꽃 100송이 중 카네이션이 $40 + 30 = 70$ 송이이므로 70%입니다.

주의. 선택지 (C) 40과 (B) 30은 각각 카네이션 한 종류의 수일 뿐입니다. 문제는 분홍과 빨강을 합친 모든 카네이션을 묻고 있습니다.

정답: (E) 70

2 정수론

출처: 2000 AMC 10 11번

4와 18 사이에 있는 서로 다른 두 소수를 고른다. 두 수의 곱에서 두 수의 합을 뺄 때, 다음 중 나올 수 있는 수는?

- (A) 21 (B) 60 (C) 119 (D) 180 (E) 231

핵심 아이디어. “곱에서 합을 뺄 값”은 $xy - x - y$ 이고, 이 식은 인수분해까지 한 걸음 남았습니다. 1을 더하면 $(x - 1)(y - 1)$ 이 됩니다. 원래 식을 다루는 것보다, 이미 아는 작은 두 수의 곱인지 확인하는 편이 훨씬 쉽습니다.

1단계. 4와 18 사이의 소수는 5, 7, 11, 13, 17입니다. 고른 두 소수를 x 와 y 라 하면

$$xy - (x + y) = xy - x - y + 1 - 1 = (x - 1)(y - 1) - 1.$$

따라서 어떤 선택지의 수가 나올 수 있는 것은, 그 수에 1을 더한 값이 목록 4, 6, 10, 12, 16 ($x - 1$ 이 가질 수 있는 값)에서 고른 서로 다른 두 수의 곱일 때이고, 그때뿐입니다.

2단계. 선택지를 하나씩 확인해 봅시다.

- $21 + 1 = 22$ 이고, 인수 쌍은 $1 \cdot 22$ 와 $2 \cdot 11$ 뿐입니다. 어느 쪽도 목록의 두 수로 이루어져 있지 않습니다.

- $60 + 1 = 61$ 과 $180 + 1 = 181$ 은 홀수이지만, $(x - 1)(y - 1)$ 은 짝수끼리의 곱입니다. (다르게 말하면, 홀수 $\times$ 홀수에서 짝수를 빼면 홀수이므로 60과 180은 나올 수 없습니다.)
- $119 + 1 = 120 = 10 \cdot 12$ 이므로 $x = 11, y = 13$ 이면 됩니다. 실제로 $11 \cdot 13 - (11 + 13) = 143 - 24 = 119$ 입니다.
- $231 + 1 = 232$ 이지만, 가능한 가장 큰 곱은 $12 \cdot 16 = 192$ 이므로 231 은 너무 큼니다.

다른 풀이. 홀수인 소수끼리는 곱이 홀수이고 합이 짝수이므로 결과는 홀수입니다. 이것으로 60과 180이 제외됩니다. 가장 작은 결과는 $5 \cdot 7 - 12 = 23 > 21$ 이고 가장 큰 결과는 $13 \cdot 17 - 30 = 191 < 231$ 이므로, 119만 남습니다.

정답: (C) 119

3 대수

출처: 2019 AMC 10A 12번

멜라니는 2019년 각 달의 날짜들로 이루어진 365개의 값에 대하여 평균 μ , 중앙값 M , 최빈값들을 구한다. 즉, 멜라니의 자료는 12개의 1, 12개의 2, ..., 12개의 28, 11개의 29, 11개의 30, 7개의 31로 이루어져 있다. 최빈값들의 중앙값을 d 라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

- (A) $\mu < d < M$ (B) $M < d < \mu$ (C) $d = M = \mu$ (D) $d < M < \mu$ (E) $d < \mu < M$

핵심 아이디어. 위치를 세어 d 와 M 을 구한 다음, 어떤 값이 “빠져 있는지” 생각하여 μ 를 M 과 비교합니다. 짧은 달들은 큰 날짜만 없애므로 평균을 끌어내립니다.

1단계: 최빈값. 가장 자주 나오는 값은 12번씩 나오는 1, 2, ..., 28입니다. 이들의 중앙값은 가운데 두 수의 평균이므로 $d = \frac{14+15}{2} = 14.5$ 입니다.

2단계: 중앙값. 365개의 값을 크기순으로 늘어놓으면 중앙값은 183번째 값입니다. 날짜 1부터 15까지가 $15 \cdot 12 = 180$ 개의 자리를 채우므로, 181번째부터 192번째까지는 모두 16입니다. 따라서 $M = 16$ 입니다.

3단계: 평균. 날짜 1부터 31까지가 모두 12번씩 나온다면, 372개의 값의 평균은 정확히 16이고 합은 $372 \cdot 16 = 5952$ 입니다. 우리 자료에는 29 한 개, 30 한 개, 31 다섯 개, 모두 합하여 $29 + 30 + 5 \cdot 31 = 214$ 가 빠져 있습니다. 따라서

$$\mu = \frac{5952 - 214}{365} = \frac{5738}{365} \approx 15.72.$$

빠진 값이 모두 16보다 크므로 이 값은 16보다 작습니다. 또 $14.5 \cdot 365 = 5292.5 < 5738$ 이므로 14.5보다는 큼니다.

그러므로 $d < \mu < M$ 입니다.

주의. 중앙값은 183번째 값이고 $183 \div 12 = 15.25$ 입니다. 이것을 내림하여 “ $M = 15$ ”라고 하면 $d < M < \mu$, 즉 선택지 (D)가 됩니다. .25는 열다섯 번째 묶음을 지났다는 뜻이므로 $M = 16$ 입니다.

정답: (E) $d < \mu < M$

4 기하

출처: 2008 AMC 10B 14번

삼각형 OAB 에서 $O = (0, 0)$, $B = (5, 0)$ 이고, 점 A 는 제1사분면 위에 있다. 또한 $\angle ABO = 90^\circ$, $\angle AOB = 30^\circ$ 이다. $\overline{OA}$ 를 점 O 를 중심으로 시계 반대 방향으로 90° 만큼 회전시킬 때, 점 A 가 옮겨지는 점의 좌표는?

- (A) $\left(-\frac{10}{3}\sqrt{3}, 5\right)$ (B) $\left(-\frac{5}{3}\sqrt{3}, 5\right)$ (C) $(\sqrt{3}, 5)$ (D) $\left(\frac{5}{3}\sqrt{3}, 5\right)$ (E) $\left(\frac{10}{3}\sqrt{3}, 5\right)$

핵심 아이디어. 먼저 A 의 위치를 정확히 구합니다. B 에서의 직각 때문에 $\overline{AB}$ 는 수직선이므로, A 는 B 의 바로 위에 있습니다. 그다음, 시계 반대 방향으로 직각만큼 돌리는 회전은 좌표에 대한 간단한 규칙 $(x, y) \mapsto (-y, x)$ 로 나타냅니다.

1단계: A 구하기. $\angle ABO = 90^\circ$ 이고 $\overline{OB}$ 가 x 축 위에 있으므로 $\overline{AB}$ 는 수직선입니다. 따라서 어떤 $h > 0$ 에 대하여 $A = (5, h)$ 입니다. 직각삼각형 OAB 에서 30° 인 각의 대변은 $AB = h$ 이고 이웃한 변은 $OB = 5$ 이므로

$$h = 5 \tan 30^\circ = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

즉 $A = \left(5, \frac{5}{3}\sqrt{3}\right)$ 입니다.

2단계: 회전하기. 원점을 중심으로 점을 시계 반대 방향으로 90° 회전하면 (x, y) 는 $(-y, x)$ 로 옮겨집니다. $((1, 0)$ 으로 확인해 보면 $(0, 1)$ 로 옮겨지므로, 시계 반대 방향으로 직각만큼 돈 것이 맞습니다.) 따라서 A 가 옮겨진 점은 다음과 같습니다.

$$\left(-\frac{5}{3}\sqrt{3}, 5\right).$$

검산해 봅시다. A 는 제1사분면에 있었고 시계 반대 방향으로 직각만큼 돌렸으므로, 옮겨진 점은 제2사분면 (x 좌표는 음수, y 좌표는 양수)에 있어야 합니다. 제2사분면에 있는 것은 (A)와 (B)뿐입니다.

주의. 음의 부호를 빠뜨려 $(-y, x)$ 대신 (y, x) 로 쓰면, A 를 회전한 것이 아니라 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 것이 되어 (D)가 나옵니다.

주의. 직각을 낀 변 AB 대신 빗변 $OA = \frac{5}{\cos 30^\circ} = \frac{10}{3}\sqrt{3}$ 을 쓰면 (A)가 나옵니다. 옮겨진 점과 y 축 사이의 거리는 OA 가 아니라 AB 입니다.

정답: (B) $\left(-\frac{5}{3}\sqrt{3}, 5\right)$

5 정수론

출처: 2002 AMC 10B 15번

양의 정수 $A, B, A - B, A + B$ 가 모두 소수이다. 이 네 소수의 합은?

- (A) 짝수 (B) 3의 배수 (C) 5의 배수 (D) 7의 배수 (E) 소수

핵심 아이디어. 합과 차로 연결된 네 소수가 있으면 **홀짝**을 살펴봅시다. 짝수인 소수는 2뿐이므로, 홀짝을 따지면 수 하나는 반드시 2가 됩니다. 그다음에는 3으로 나눈 나머지를 살펴봅시다.

1단계: 하나는 2. 두 수 $A - B$ 와 $A + B$ 의 차는 $2B$ 이므로, 둘 다 짝수이거나 둘 다 홀수입니다. 짝수인 소수는 하나뿐이고 $A - B < A + B$ 이므로 둘 다 짝수일 수는 없습니다. 따라서 둘 다 홀수입니다. 즉 A, B 중 하나는 짝수이고 다른 하나는 홀수이므로, 둘 중 하나는 2입니다.

2단계: 그 수는 B . $A = 2$ 이면 어떤 소수 B 에 대해서도 $A - B = 2 - B \leq 0$ 이 되어 소수가 아닙니다. 따라서 $B = 2$ 이고, 세 수 $A - 2, A, A + 2$ 가 모두 소수입니다.

3단계: 세 수는 3, 5, 7. 간격이 2인 세 수 중 하나는 3으로 나누어떨어집니다 ($n + 4 = (n + 1) + 3$ 이므로, 세 수 $n, n + 2, n + 4$ 를 3으로 나눈 나머지는 $n, n + 2, n + 1$ 을 3으로 나눈 나머지와 같습니다. 이 셋은 연속한 세 정수이므로 그중 하나는 3의 배수입니다). 그 수도 소수이므로 3입니다. 그런데 $A - 2$ 가 소수이므로 $A - 2 \geq 2$ 이고, 따라서 A 와 $A + 2$ 는 모두 4 이상입니다. 그러므로 3인 것은 $A - 2$ 입니다. 이로부터 3, 5, 7을 얻으므로 $A = 5$ 입니다.

4단계. 네 소수는 $A = 5, B = 2, A - B = 3, A + B = 7$ 이고, 그 합은

$$5 + 2 + 3 + 7 = 17,$$

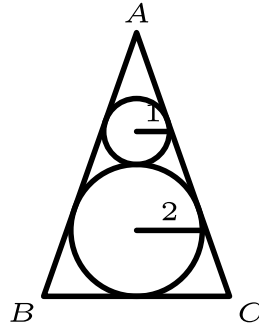
즉 소수입니다. 짝수도 아니고, 3, 5, 7 중 어느 것으로도 나누어떨어지지 않습니다.

정답: (E) 소수

6 기하

출처: 2006 AMC 10A 16번

반지름의 길이가 1인 원과 반지름의 길이가 2인 원이 서로 접한다. $\triangle ABC$ 의 변들은 그림과 같이 두 원에 접하고, 두 변 AB 와 AC 의 길이는 같다. $\triangle ABC$ 의 넓이는?



- (A) $\frac{35}{2}$ (B) $15\sqrt{2}$ (C) $\frac{64}{3}$ (D) $16\sqrt{2}$ (E) 24

핵심 아이디어. 직선이 원에 접하면 접점까지 반지름을 그어 봅시다. 반지름은 접선과 수직이므로 직각삼각형이 생깁니다. 여기서는 두 원이 모두 변 AC 에 접하고, 두 직각삼각형이 A 에서의 각을 공유하므로 서로 닮음입니다.

1단계: 대칭축. $AB = AC$ 이므로 도형은 A 에서 내린 수선에 대하여 대칭이고, 두 원의 중심은 모두 이 수선 위에 있습니다. 두 중심을 P (반지름 1)와 Q (반지름 2)라 하고, BC 의 중점을 F 라 합시다. 두 원이 접하므로 $PQ = 1 + 2 = 3$ 입니다.

2단계: 닮은 삼각형. P 와 Q 에서 AC 위의 접점 D 와 E 까지 반지름을 긁습니다. 직각삼각형 ADP 와 AEQ 는 A 에서의 각을 공유하므로 다음이 성립합니다.

$$\frac{AP}{1} = \frac{AQ}{2} = \frac{AP + 3}{2}.$$

따라서 $2AP = AP + 3$ 이므로 $AP = 3$, $AQ = 6$ 입니다.

3단계: 높이. 큰 원은 BC 에 F 에서 접하므로 $AF = AQ + QF = 6 + 2 = 8$ 입니다.

4단계: 밑변. 삼각형 ADP 에서 $AD = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ 입니다. 삼각형 AFC 는 F 에서 직각이고 A 에서의 각을 공유하므로 ADP 와 닮음입니다.

$$\frac{FC}{AF} = \frac{DP}{AD} = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad FC = \frac{8}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

따라서 $BC = 4\sqrt{2}$ 입니다.

5단계. 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot BC \cdot AF = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 8 = 16\sqrt{2}$ 입니다.

주의. 높이는 $AQ = 6$ 이 아니라 $AF = 8$ 입니다. 큰 원의 중심과 밑변 사이에 반지름 2가 더 남아 있기 때문입니다. 6에서 멈추면 넓이가 $9\sqrt{2}$ 가 되는데, 이는 선택지에 없습니다.

정답: (D) $16\sqrt{2}$

7 대수

출처: 2002 AMC 10A 17번

세라는 8온스들이 컵에 커피 4온스를 붓고, 같은 크기의 두 번째 컵에 크림 4온스를 붓는다. 그런 다음 첫 번째 컵의 커피 절반을 두 번째 컵으로 옮기고, 잘 저은 뒤 두 번째 컵에 든 액체의 절반을 다시 첫 번째 컵으로 옮긴다. 이제 첫 번째 컵에 든 액체 중 크림이 차지하는 비율은?

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{3}{8}$ (D) $\frac{2}{5}$ (E) $\frac{1}{2}$

핵심 아이디어. 액체를 섞는 문제는 결국 장부 정리와 같습니다. 한 번 부을 때마다 각 컵에 든 커피와 크림의 양(온스)을 기록해 봅시다. 핵심은 “잘 저은 뒤”라는 말입니다. 따라 낸 액체의 커피와 크림의 비가 컵 전체의 비와 같다는 뜻이기 때문입니다.

처음. 컵 1: 커피 4온스. 컵 2: 크림 4온스.

첫 번째 붓기. 커피의 절반인 2온스가 컵 2로 옮겨집니다. 컵 1: 커피 2온스. 컵 2: 커피 2온스 + 4온스의 크림 = 6온스.

두 번째 붓기. 컵 2의 절반은 3온스입니다. 컵 2는 잘 저어져 있으므로 각 재료가 절반씩, 즉 커피 1온스와 크림 2온스가 옮겨집니다. 이제 컵 1에는 커피 $2 + 1 = 3$ 온스와 크림 $0 + 2 = 2$ 온스, 합하여 5온스가 들어 있습니다.

답. 컵 1에서 크림이 차지하는 비율은 다음과 같습니다.

$$\frac{2}{3+2} = \frac{2}{5}.$$

주의. “8온스들이 컵”은 컵의 용량일 뿐, 들어 있는 액체의 양이 아닙니다. 크림 2온스를 8로 나누면 $\frac{1}{4}$, 즉 선택지 (A)가 나옵니다. 실제로 컵에는 5온스만 들어 있습니다.

정답: (D) $\frac{2}{5}$

8 경우의 수와 확률

출처: 2005 AMC 10A 18번

A팀과 B팀이 시리즈 경기를 한다. 먼저 세 경기를 이긴 팀이 시리즈에서 우승한다. 각 경기에서 두 팀이 이길 가능성은 같고, 무승부는 없으며, 각 경기의 결과는 서로 독립이다. B팀이 두 번째 경기를 이기고 A팀이 시리즈에서 우승했을 때, B팀이 첫 번째 경기를 이겼을 확률은?

- (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{2}{3}$

핵심 아이디어. 이것은 **조건부 확률**입니다. B가 두 번째 경기를 이기고 A가 시리즈에서 우승하는 모든 경우를 나열하고, 각 경우에 그 확률만큼 가중치를 준 다음, 그중 B가 첫 번째 경기를 이긴 경우가 차지하는 몫을 구합니다. 더 깔끔한 방법은 다섯 경기를 항상 모두 치른다고 생각하는 것입니다. 그러면 모든 결과가 같은 확률을 갖습니다.

1단계: 시리즈 나열하기. 두 번째 경기는 B의 승리입니다. A가 첫 번째 경기를 이기면, A는 B가 2승을 더 하기 전에 2승을 더 해야 합니다.

ABAA, ABABA, ABBAA.

B가 첫 번째 경기를 이기면 B가 2-0으로 앞서므로 A는 다음 세 경기를 모두 이겨야 합니다. 이 경우는 BBAAA 뿐입니다.

2단계: 가중치 주기. k 경기로 끝나는 시리즈의 확률은 $(\frac{1}{2})^k$ 입니다. 따라서 네 시리즈의 확률은 $\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{32}, \frac{1}{32}$ 이고, 합은 $\frac{2+1+1+1}{32} = \frac{5}{32}$ 입니다.

3단계. B가 첫 번째 경기를 이긴 시리즈는 BBAAA뿐이므로, 구하는 확률은 다음과 같습니다.

$$\frac{1/32}{5/32} = \frac{1}{5}.$$

다른 풀이. 시리즈의 승패가 결정된 뒤에도 다섯 경기를 모두 치른다고 상상해 봅시다. 우승 팀은 바뀌지 않고, 32가지 순서가 모두 같은 확률로 나타납니다. B가 두 번째 경기를 이기고 A가 세 번 이상 이기는 순서는 ABAAA, ABAAB, ABABA, ABBAA, BBAAA의 다섯 가지이고, 그중 B로 시작하는 것은 하나입니다. 따라서 답은 $\frac{1}{5}$ 입니다.

주의. 실제 시리즈 네 가지가 모두 같은 확률이라고 세면 $\frac{1}{4}$, 즉 선택지 (B)가 나옵니다. 짧은 시리즈 ABAA는 다섯 경기짜리 시리즈 각각보다 두 배 더 일어나기 쉽습니다.

주의. “각 경기는 독립이므로 첫 번째 경기는 여전히 $\frac{1}{2}$ 이다” 라고 하면 (D)가 나옵니다. 각 경기는 서로 독립이지만, 시리즈의 결과는 첫 번째 경기와 독립이 아닙니다. B가 첫 번째 경기를 이기면 A가 시리즈에서 우승하기 어려워지므로, A가 우승했다는 사실을 알면 첫 번째 경기의 확률이 달라집니다.

정답: (A) $\frac{1}{5}$

9 기하

출처: 2015 AMC 10B 19번

$\triangle ABC$ 에서 $\angle C = 90^\circ$ 이고 $AB = 12$ 이다. 삼각형의 바깥쪽에 정사각형 $ABXY$ 와 $ACWZ$ 를 그린다. 점 X, Y, Z, W 는 한 원 위에 있다. 이 삼각형의 둘레의 길이는?

- (A) $12 + 9\sqrt{3}$ (B) $18 + 6\sqrt{3}$ (C) $12 + 12\sqrt{2}$ (D) 30 (E) 32

핵심 아이디어. 두 점을 지나는 원의 중심은 두 점을 잇는 선분의 수직이등분선 위에 있습니다. $\overline{XY}$ 는 정사각형에서 $\overline{AB}$ 와 마주 보는 변이므로 $\overline{AB}$ 와 같은 수직이등분선을 가집니다. 따라서 모르는 원의 중심이 이미 알고 있는 곳에 놓이게 됩니다.

1단계: 중심 찾기. 중심은 $\overline{XY}$ 의 수직이등분선, 즉 $\overline{AB}$ 의 수직이등분선 위에 있습니다. 마찬가지로 중심은 $\overline{ZW}$ 의 수직이등분선, 즉 $\overline{AC}$ 의 수직이등분선 위에도 있습니다. 이 두 직선은 $\triangle ABC$ 의 외심에서 만나고, 직각삼각형의 외심은 빗변 $\overline{AB}$ 의 중점 O 입니다.

2단계: 좌표. $C = (0, 0)$, $A = (0, b)$, $B = (a, 0)$ 으로 놓습니다. 여기서 $a, b > 0$ 이고 $a^2 + b^2 = 144$ 입니다. 그러면 $O = (\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ 입니다. $\overline{AC}$ 위의 정사각형은 왼쪽에 있으므로 $W = (-b, 0)$, $Z = (-b, b)$ 입니다.

3단계: 같은 반지름. X 는 $\overline{AB}$ 위의 정사각형의 꼭짓점이고, O 에서 $\overline{AB}$ 방향으로 6, 그에 수직인 방향으로 12만큼 떨어져 있으므로 $OX^2 = 6^2 + 12^2 = 180$ 입니다. 또

$$OZ^2 = \left(\frac{a}{2} + b\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4} + ab + b^2 = 36 + ab + b^2.$$

$OZ^2 = 180$ 으로 놓으면 $ab + b^2 = 144 = a^2 + b^2$ 이므로 $ab = a^2$ 이고, 양변을 $a > 0$ 으로 나누면 $a = b$ 입니다.

4단계. 이 삼각형은 빗변의 길이가 12인 직각이등변삼각형이므로 $a = b = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$ 입니다. 둘레의 길이는 다음과 같습니다.

$$12 + 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 12 + 12\sqrt{2}.$$

정답: (C) $12 + 12\sqrt{2}$

10 경우의 수와 확률

출처: 2016 AMC 10A 20번

어떤 특정한 N 의 값에 대하여 $(a + b + c + d + 1)^N$ 을 전개하여 동류항끼리 정리하면, 네 문자 a, b, c, d 를 모두 포함하고 각 문자의 지수가 양수인 항이 정확히 1001개 생긴다. N 의 값은?

- (A) 9 (B) 14 (C) 16 (D) 17 (E) 19

핵심 아이디어. 동류항을 정리하고 나면 각 항은 지수들로 결정되므로, “항의 개수 세기”는 “지수 목록의 개수 세기”와 같습니다. 합이 일정한 지수들을 세는 것이 바로 별과 막대 방법이 하는 일이고, 밑에 있는 “+1”은 보이지 않는 다섯 번째 지수를 만듭니다.

1단계: 항의 모양. 전개식의 모든 항은 $a^v b^w c^x d^y 1^z$ 에 상수를 곱한 꼴이고, 지수는 다음을 만족합니다.

$$v + w + x + y + z = N,$$

여기서 $z \geq 0$ 은 1이 선택된 횟수입니다. 서로 다른 목록 (v, w, x, y) 는 서로 다른 항을 만들고, $v + w + x + y \leq N$ 인 목록은 모두 실제로 나타납니다.

2단계: 세기. $v, w, x, y \geq 1$ 이고 $z \geq 0$ 이어야 합니다. $v = v' + 1$ 과 같이 놓으면 (나머지도 마찬가지로)

$$v' + w' + x' + y' + z = N - 4$$

이고, 다섯 미지수는 모두 ≥ 0 을 만족합니다. 별과 막대 방법(별 $N - 4$ 개, 막대 4개)에 의해 해의 개수는 다음과 같습니다.

$$\binom{(N-4)+4}{4} = \binom{N}{4}.$$

3단계: 풀기. $\binom{N}{4} = 1001$ 이어야 합니다. 선택지를 대입해 보면 $\binom{14}{4} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{24} = \frac{24024}{24} = 1001$ 입니다. 따라서 $N = 14$ 입니다. (나머지는 $\binom{9}{4} = 126$, $\binom{16}{4} = 1820$, $\binom{17}{4} = 2380$, $\binom{19}{4} = 3876$ 입니다.)

주의. 1^z 인수를 빠뜨리면 $v + w + x + y = N$ 인 경우만 세게 되어 $\binom{N-1}{3}$ 이 나옵니다. $\binom{19}{3} = 969$, $\binom{20}{3} = 1140$ 이므로 이 값을 1001로 만드는 N 은 없습니다. 따라서 z 를 빠뜨린 풀이는 막히고 맙니다.

정답: (B) 14