
AMC 10

하프 모의고사

제 20 회

해설

정답표 • 출처 • 단계별 풀이

정답표와 출처

번호	정답	출처	영역
1	C	2013 AMC 10B 10번	대수
2	C	2004 AMC 10A 11번	기하
3	A	2012 AMC 10A 12번	정수론
4	B	2014 AMC 10B 13번	기하
5	B	2011 AMC 10A 14번	경우의 수와 확률
6	A	2004 AMC 10B 15번	대수
7	E	2013 AMC 10A 16번	기하
8	C	2018 AMC 10A 17번	정수론
9	C	2006 AMC 10A 18번	경우의 수와 확률
10	C	2005 AMC 10B 20번	대수

1 대수

출처: 2013 AMC 10B 10번

어느 농구팀 선수들은 2점슛의 50%, 3점슛의 40%를 성공시켜 54점을 얻었다. 이 팀은 3점슛보다 2점슛을 50% 더 많이 시도하였다. 이 팀이 시도한 3점슛은 몇 개인가?

- (A) 10 (B) 15 (C) 20 (D) 25 (E) 30

핵심 아이디어. 3점슛 시도 횟수를 한 문자로 놓고, 나머지 모든 양을 그 문자로 나타내 봅시다.

3점슛 시도 횟수를 t 라 합시다. 그러면 2점슛 시도 횟수는 $1.5t$ 입니다.

3점슛: t 개 중 40%가 들어가므로 성공은 $0.4t$ 개이고, 점수는 $3 \cdot 0.4t = 1.2t$ 점입니다.

2점슛: $1.5t$ 개 중 50%가 들어가므로 성공은 $0.75t$ 개이고, 점수는 $2 \cdot 0.75t = 1.5t$ 점입니다.

합계는 $1.2t + 1.5t = 2.7t = 54$ 이므로 $t = 20$ 입니다.

확인해 봅시다. 3점슛 20개를 시도하면 8개가 성공하고(24점), 2점슛 30개를 시도하면 15개가 성공하며(30점), $24 + 30 = 54$ 입니다.

주의. 문제는 **3점슛** 시도 횟수를 묻고 있습니다. 2점슛 시도 횟수는 $1.5 \cdot 20 = 30$ 으로, 선택지 (E)입니다.

정답: (C) 20

2 기하

출처: 2004 AMC 10A 11번

어느 회사는 원기둥 모양의 병에 땅콩버터를 담아 판다. 시장 조사에 따르면 폭이 더 넓은 병을 사용하면 판매량이 늘어날 것이라고 한다. 부피를 바꾸지 않고 병의 지름을 25% 늘린다면, 높이는 몇 퍼센트 줄어야 하는가?

- (A) 10 (B) 25 (C) 36 (D) 50 (E) 60

핵심 아이디어. 원기둥의 부피 $V = \pi r^2 h$ 는 반지름의 제곱에 따라 달라집니다. 퍼센트 변화는 곱하는 수로 다루는 것이 가장 쉽습니다. 반지름에 어떤 수를 곱했을 때, V 가 그대로이려면 h 에 어떤 수를 곱해야 하는지 생각해 봅시다.

1단계. 지름을 25% 늘리면 지름에 $1.25 = \frac{5}{4}$ 가 곱해집니다. 반지름은 지름의 절반이므로 반지름에도 $\frac{5}{4}$ 가 곱해집니다.

2단계. 그러면 r^2 에는 $(\frac{5}{4})^2 = \frac{25}{16}$ 가 곱해집니다. $\pi r^2 h$ 가 그대로이려면 h 에는 그 역수를 곱해야 합니다.

$$\frac{16}{25} = 0.64.$$

3단계. 새 높이는 원래 높이의 64%이므로, 높이는 $100\% - 64\% = 36\%$ 줄어들었습니다.

수로 확인해 봅시다. $r = 4$, $h = 25$ 로 두면 $V = \pi \cdot 16 \cdot 25 = 400\pi$ 입니다. 새 반지름은 5이고, 새 높이를 16으로 하면 $\pi \cdot 25 \cdot 16 = 400\pi$ 로 부피가 같습니다. 높이는 25에서 16으로 9만큼 줄었고, $\frac{9}{25} = 36\%$ 입니다.

주의. “지름이 25% 늘어나니 높이는 25% 줄어든다”고 말하고 싶어지는데, 이것이 선택지 (B)입니다. 이는 제곱을 무시한 것입니다. 폭이 25% 넓은 병은 밑면의 넓이가 1.25배가 아니라 $\frac{25}{16}$ 배입니다. “높이가 $\frac{1}{1.25} = 0.8$ 배로 줄어든다”고 해도 제곱을 잊은 것이며, 이렇게 하면 20% 감소가 되는데 이는 선택지에 없습니다.

정답: (C) 36

3 정수론

출처: 2012 AMC 10A 12번

연도가 400으로 나누어떨어지거나(예: 2000), 4로는 나누어떨어지지만 100으로는 나누어떨어지지 않을 때(예: 2012), 그리고 그때에만 그 해는 윤년이다. 소설가 찰스 디킨스의 탄생 200주년 기념 행사는 화요일인 2012년 2월 7일에 열렸다. 디킨스가 태어난 날은 무슨 요일인가?

- (A) 금요일 (B) 토요일 (C) 일요일 (D) 월요일 (E) 화요일

핵심 아이디어. 중요한 것은 날수를 7로 나눈 나머지만입니다. $365 = 52 \cdot 7 + 1$ 이므로 평년이 지나면 요일이 1만큼, 윤년이 지나면 2만큼 밀립니다. 따라서 할 일은 두 날짜 사이에 있는 2월 29일의 개수를 세는 것뿐입니다. 문제에 윤년 규칙이 자세히 나와 있다는 것은 끝자리가 00인 해가 중요하다는 힌트입니다.

1단계. 1812년 2월 7일부터 2012년 2월 7일까지는 200년입니다. 각 해는 365일씩이고, 그 사이에 있는 2월 29일마다 하루가 더해집니다.

2단계. 2월 29일이 두 날짜 사이에 있는 것은 그 해가 1812년부터 2008년까지의 윤년일 때, 그리고 그때뿐입니다. (1812년 2월 29일은 1812년 2월 7일보다 뒤이므로 셈에 넣고, 2012년 2월 29일은 2012년 2월 7일보다 뒤이므로 넣지 않습니다.) 1812년부터 2008까지 4의 배수의 개수는

$$\frac{2008 - 1812}{4} + 1 = 50.$$

이 중 1900은 100으로 나누어떨어지지만 400으로는 나누어떨어지지 않으므로 윤년이 아닙니다. 따라서 2월 29일은 49번 있습니다.

3단계. 요일이 밀리는 양은 $200 + 49 = 249$ 일이고, $249 = 35 \cdot 7 + 4$ 이므로 요일은 4일만큼 밀립니다.

4단계. 디킨스의 생일에서 시간 순으로 4일만큼 요일을 옮기면 화요일이 되므로, 생일의 요일은 화요일에서 4일 거슬러 올라간 요일입니다. 월요일, 일요일, 토요일, 금요일. 디킨스는 금요일에 태어났습니다.

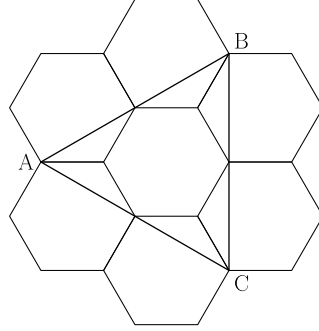
주의. 우리는 시간을 거슬러 올라가고 있습니다. 화요일에서 4일 뒤를 세면 토요일이 되어 선택지 (B)가 됩니다.

정답: (A) 금요일

4 기하

출처: 2014 AMC 10B 13번

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육각형을 정육각형 여섯 개가 둘러싸고 있다. $\triangle ABC$ 의 넓이는?



- (A) $2\sqrt{3}$ (B) $3\sqrt{3}$ (C) $1 + 3\sqrt{2}$ (D) $2 + 2\sqrt{3}$ (E) $3 + 2\sqrt{3}$

핵심 아이디어. 이 그림은 가운데 정육각형의 중심 O 를 중심으로 120° 회전해도 똑같아 보이고, 이 회전은 A 를 B 로, 다시 C 로 옮깁니다. 따라서 $\triangle ABC$ 는 정삼각형이고, 모든 것은 하나의 길이, 즉 O 에서 A 까지의 거리로부터 나옵니다.

1단계: OA 구하기. 세 정육각형이 만나는 곳인 가운데 정육각형의 왼쪽 꼭짓점 V 를 봅시다. 각 정육각형은 그곳에서 120° 의 각을 가지므로, V 에 모인 세 변은 120° 씩 벌어져 있습니다. 가운데 정육각형의 두 변은 직선 OV 에 대하여 대칭이므로, 세 번째 변, 즉 왼쪽의 두 정육각형이 공유하는 변은 직선 OV 를 따라 곧장 바깥쪽을 향합니다. 이 변의 다른 끝점이 A 입니다. 따라서 O, V, A 는 한 직선 위에 있고

$$OA = OV + VA = 1 + 1 = 2.$$

2단계: 좌표. O 를 원점에 두고 $A = (-2, 0)$ 이라 합시다. A 를 O 를 중심으로 $\pm 120^\circ$ 회전하면, 거리가 2이고 방향이 60° 와 -60° 인 점이 나옵니다.

$$B = (1, \sqrt{3}), \quad C = (1, -\sqrt{3}).$$

그림에서처럼 이 점들은 위쪽 정육각형과 오른쪽 위 정육각형이 공유하는 변, 그리고 아래쪽 정육각형과 오른쪽 아래 정육각형이 공유하는 변의 바깥쪽 끝점입니다.

3단계: 한 변의 길이와 넓이. $BC = 2\sqrt{3}$ 입니다. 또 $AB = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ 으로, 대칭성에서 예상한 대로입니다. 한 변의 길이가 s 인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}s^2$ 이므로

$$[ABC] = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 12 = 3\sqrt{3}.$$

다른 풀이. $\triangle ABC$ 를 O 에서 합동인 세 삼각형 OAB, OBC, OCA 로 나눕니다. 각 삼각형은 길이가 2인 두 변과 그 사이의 각 120° 를 가집니다. 각각의 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin 120^\circ = \sqrt{3}$ 이므로, 전체 넓이는 $3\sqrt{3}$ 입니다.

정답: (B) $3\sqrt{3}$

5 경우의 수와 확률

출처: 2011 AMC 10A 14번

표준적인 6면 주사위 두 개를 한 번 던진다. 나온 두 눈의 수의 합을 원의 지름으로 정한다. 이 원의 넓이의 수치가 원주의 수치보다 작을 확률은?

- (A) $\frac{1}{36}$ (B) $\frac{1}{12}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{4}$ (E) $\frac{5}{18}$

핵심 아이디어. 먼저 기하적인 조건을 지름에 대한 간단한 부등식으로 바꿔 봅시다. 넓이는 크기의 제곱에 비례하여 커지고 원주는 일차적으로만 커지므로, 이 조건은 **작은** 원에서만 성립할 수 있습니다. 조건에 맞는 주사위 눈의 합은 아주 적을 것입니다.

1단계. 지름을 d 라 하면 반지름은 $\frac{d}{2}$ 입니다. 넓이는 $\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi d^2}{4}$ 이고 원주는 πd 입니다. 구하는 조건은

$$\frac{\pi d^2}{4} < \pi d.$$

$d > 0$ 이므로 양변을 πd 로 나누면 $\frac{d}{4} < 1$, 즉 $d < 4$ 입니다.

2단계. 주사위 두 개의 눈의 합은 적어도 2이므로, 조건에 맞는 합은 $d = 2$ 와 $d = 3$ 입니다. 확인해 보면, $d = 3$ 일 때 넓이 $= 2.25\pi$, 원주 $= 3\pi$ 이므로 성립합니다.

3단계. 일어날 가능성이 같은 순서쌍 36가지 중 합이 2인 것은 (1, 1), 합이 3인 것은 (1, 2)와 (2, 1)로, 모두 세 가지입니다. 따라서 확률은

$$\frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

주의. $d = 4$ 이면 넓이와 원주가 **같으므로** (둘 다 4π) $d = 4$ 는 포함되지 않습니다. 이것을 포함하면 세 가지 경우 (1, 3), (2, 2), (3, 1)이 더해져 $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, 즉 선택지 (C)가 됩니다.

정답: (B) $\frac{1}{12}$

6 대수

출처: 2004 AMC 10B 15번

패티는 니켈(5센트)과 다임(10센트)으로 이루어진 동전 20개를 가지고 있다. 패티의 니켈이 다임이고 다임이 니켈이라면, 패티는 70센트를 더 가지게 된다. 패티가 가진 동전의 가치는 모두 얼마인가?

- (A) \$1.15 (B) \$1.20 (C) \$1.25 (D) \$1.30 (E) \$1.35

핵심 아이디어. 문제는 니켈과 다임이 각각 몇 개인지 알려 주지 않고, 둘을 서로 바꾸었을 때 무슨 일이 일어나는지만 알려 줍니다. 그러니 바꾸기가 동전 하나하나에 어떤 영향을 주는지 살펴봅시다. 다임이 되는 니켈은 하나마다 5센트씩 늘고, 니켈이 되는 다임은 하나마다 5센트씩 줄어듭니다. 따라서 70센트가 늘었다는 것은 니켈이 다임보다 몇 개 더 많은지를 알려 줍니다.

1단계. 패티가 니켈 n 개와 다임 d 개를 가지고 있다고 하면 $n + d = 20$ 입니다. 바꾸었을 때 달라지는 금액은

$$5n - 5d = 5(n - d) \text{ 센트.}$$

이 값이 70이므로 $5(n - d) = 70$ 이고, $n - d = \frac{70}{5} = 14$ 입니다. 금액이 늘었으므로 니켈이 다임보다 많습니다.

2단계. $n + d = 20$ 과 $n - d = 14$ 를 더하면 $2n = 34$ 이므로 $n = 17$ 이고, $d = 20 - 17 = 3$ 입니다.

3단계. 패티의 동전은 $17 \cdot 5 + 3 \cdot 10 = 85 + 30 = 115$ 센트, 즉 \$1.15입니다.

확인해 봅시다. 바꾼 뒤에는 다임 17개와 니켈 3개가 되어 $170 + 15 = 185$ 센트이고, 이는 실제로 115보다 70센트 많습니다.

다른 풀이. 동전은 모두 적어도 5센트이므로, 동전 20개의 가치는 100센트에 다임 하나마다 5센트를 더한 값, 즉 $100 + 5d$ 입니다. 바꾼 뒤에는 $100 + 5n$ 입니다. 선택지 \$1.15, \$1.20, ..., \$1.35는 각각 $d = 3, 4, 5, 6, 7$ 에 해당합니다. 이 중 $5n - 5d = 85 - 15 = 70$ 을 만족시키는 것은 $d = 3$ (따라서 $n = 17$)뿐입니다.

주의. “니켈 하나마다 5센트씩 늘어나니 $\frac{70}{5} = 14$ 개가 니켈”이라고 생각하면, 그와 동시에 다임은 하나마다 5센트씩 줄어든다는 점을 잊은 것입니다. 니켈 14개와 다임 6개라면 동전의 가치는 $70 + 60 = 130$ 센트로 선택지 (D)가 되지만, 이를 바꾸면 $140 + 30 = 170$ 센트로 40센트만 늘어납니다.

정답: (A) \$1.15

7 기하

출처: 2013 AMC 10A 16번

꼭짓점이 $(6, 5)$, $(8, -3)$, $(9, 1)$ 인 삼각형을 직선 $x = 8$ 에 대하여 대칭이동하여 두 번째 삼각형을 만든다. 두 삼각형의 합집합의 넓이는?

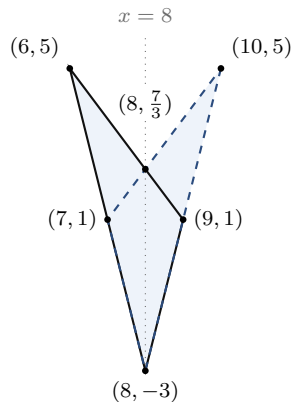
- (A) 9 (B) $\frac{28}{3}$ (C) 10 (D) $\frac{31}{3}$ (E) $\frac{32}{3}$

핵심 아이디어. 그림을 그려 봅시다. 합집합은 $x = 8$ 에 대하여 대칭이므로, 이 직선의 한쪽에 무엇이 있는지만 알아내면 됩니다. 물어야 할 것은 대칭이동한 삼각형이 원래 삼각형 바깥으로 빠져나오는가 하는 점이고, $(9, 1)$ 이 대칭이동하여 어디로 가는지 확인하면 이 문제가 해결됩니다.

1단계: 대칭이동. $x = 8$ 에 대하여 대칭이동하면 (x, y) 는 $(16 - x, y)$ 로 옮겨집니다. 따라서 두 번째 삼각형의 꼭짓점은 $(10, 5)$, $(8, -3)$, $(7, 1)$ 입니다.

2단계: 원래 삼각형이 $x = 8$ 과 만나는 곳. $(6, 5)$ 에서 $(9, 1)$ 까지의 변의 기울기는 $\frac{1-5}{9-6} = -\frac{4}{3}$ 입니다. $x = 8$ 에서 이 변의 높이는 $y = 5 - \frac{4}{3} \cdot 2 = \frac{7}{3}$ 입니다. 따라서 직선 $x = 8$ 은 원래 삼각형을 꼭짓점이 $(6, 5)$, $(8, -3)$, $(8, \frac{7}{3})$ 인 왼쪽 조각과 꼭짓점이 $(8, -3)$, $(9, 1)$, $(8, \frac{7}{3})$ 인 오른쪽 조각으로 나눕니다.

3단계: 대칭이동한 조각은 안에 숨는다. $(6, 5)$ 에서 $(8, -3)$ 까지의 변은 $(7, 1)$ 을 지납니다. 가로로 2만큼 갈 때 8만큼 내려가므로, 가로로 1만큼 가면 높이가 $5 - 4 = 1$ 이 되기 때문입니다. 따라서 오른쪽 조각을 대칭이동한 삼각형, 즉 꼭짓점이 $(8, -3)$, $(7, 1)$, $(8, \frac{7}{3})$ 인 삼각형은 왼쪽 조각 안에 놓입니다. $x = 8$ 의 왼쪽에서 합집합은 왼쪽 조각 그 자체입니다.



4단계: 넓이. 왼쪽 조각은 $(8, -3)$ 에서 $(8, \frac{7}{3})$ 까지 세로로 놓인 변을 가지며, 그 길이는 $\frac{7}{3} + 3 = \frac{16}{3}$ 입니다. 마주 보는 꼭짓점 $(6, 5)$ 는 이 변에서 가로로 2만큼 떨어져 있습니다. 따라서 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot \frac{16}{3} \cdot 2 = \frac{16}{3}$ 입니다. 대칭성에 의해 오른쪽도 같은 넓이를 가지므로, 합집합의 넓이는 $2 \cdot \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$ 입니다.

다른 풀이. 합집합은 꼭짓점이 $(6, 5)$, $(8, -3)$, $(10, 5)$, $(8, \frac{7}{3})$ 인 색칠한 “화살촉” 모양입니다. 이것은 꼭짓점이 $(6, 5)$, $(8, -3)$, $(10, 5)$ 인 큰 삼각형(밑변 4, 높이 8, 넓이 16)에서 꼭짓점이 $(6, 5)$, $(8, \frac{7}{3})$, $(10, 5)$ 인 홈

부분의 삼각형(밑변 4, 높이 $5 - \frac{7}{3} = \frac{8}{3}$, 넓이 $\frac{16}{3}$)을 뺀 것입니다. 따라서 넓이는 $16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$ 입니다.

정답: (E) $\frac{32}{3}$

8 정수론

출처: 2018 AMC 10A 17번

S 는 $\{1, 2, \dots, 12\}$ 에서 택한 6개의 정수로 이루어진 집합이고, a 와 b 가 S 의 원소이고 $a < b$ 이면 b 는 a 의 배수가 아니라는 성질을 가진다. S 의 원소의 값으로 가능한 가장 작은 값은?

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 7

핵심 아이디어. 1부터 12까지의 수를 홀수 부분에 따라 “두 배 사슬”로 묶어 봅시다. 모든 수는 홀수와 2의 거듭제곱의 곱입니다. 한 사슬 안에서는 각 수가 그 뒤의 수들의 약수이므로, S 는 사슬 하나에서 많아야 한 수만 택할 수 있습니다. 12 이하의 홀수는 정확히 여섯 개이므로 사슬도 여섯 개이고, 원소가 6개인 S 는 각 사슬에서 **정확히** 하나씩 택해야 합니다. 이 빈틈없는 구조 덕분에 문제를 풀 수 있습니다.

1단계: 사슬.

$\{1, 2, 4, 8\}, \{3, 6, 12\}, \{5, 10\}, \{7\}, \{9\}, \{11\}.$

따라서 7, 9, 11은 항상 S 에 들어 있고, 여기에 앞의 세 사슬에서 하나씩 수가 더해집니다.

2단계: 사슬 $\{3, 6, 12\}$. $9 \in S$ 이고 9는 3의 배수이므로 3은 택할 수 없습니다. 따라서 S 에는 6 또는 12가 들어 있습니다.

3단계: 사슬 $\{1, 2, 4, 8\}$. 6과 12는 모두 1과 2의 배수이므로, 1도 2도 S 에 들어갈 수 없습니다. 이 사슬에서 택하는 수는 4 또는 8입니다.

4단계: 가장 작은 원소. 이제 S 의 모든 원소는 4 이상입니다. 첫 번째 사슬에서는 4 또는 8, 나머지 사슬에서는 $\{6, 12\}, \{5, 10\}$ 에 속한 수와 7, 9, 11이 나오기 때문입니다. 따라서 4보다 작은 원소는 없습니다.

5단계: 4가 실제로 가능하다. $S = \{4, 5, 6, 7, 9, 11\}$ 로 잡아 봅시다. 모든 쌍을 확인하면, 4는 5, 6, 7, 9, 11 중 어느 것의 약수도 아니고, 5는 6, 7, 9, 11 중 어느 것의 약수도 아니며, 6은 7, 9, 11 중 어느 것의 약수도 아닙니다. 또 7, 9, 11은 S 에 있는 더 큰 수의 약수가 아닙니다. 따라서 가능한 가장 작은 값은 4입니다.

주의. 처음 떠올리기 쉬운 것은 2와 홀수 3, 5, 7, 9, 11을 함께 택하는 것입니다. 여섯 개의 수이고 가장 작은 수가 2이므로 선택지 (A)가 됩니다. 그러나 9는 3의 배수이므로 이 집합은 조건을 만족시키지 않습니다. 사실 2단계에서 보았듯이 3은 아예 쓸 수 없습니다.

정답: (C) 4

9 경우의 수와 확률

출처: 2006 AMC 10A 18번

어떤 주의 자동차 번호판은 숫자 4개와 문자 2개로 이루어진다. 숫자끼리는 서로 같아도 되고, 문자끼리도 서로 같아도 된다. 이 여섯 개의 기호는 어떤 순서로 나타나도 되지만, 두 문자는 반드시 서로 이웃해야 한다. 만들 수 있는 서로 다른 번호판의 개수는?

- (A) $10^4 \cdot 26^2$ (B) $10^3 \cdot 26^3$ (C) $5 \cdot 10^4 \cdot 26^2$ (D) $10^2 \cdot 26^4$ (E) $5 \cdot 10^3 \cdot 26^3$

핵심 아이디어. “반드시 서로 이웃해야 한다”는 말이 신호입니다. 함께 붙어 있어야 하는 것들은 하나의 묶음으로 붙여서 생각합니다. 그다음 두 단계로 나누어 셉니다. 문자가 **어디에** 오는지, 그리고 각 자리를 **무엇으로** 채우는지입니다.

1단계: 배치 모양. 두 문자를 하나의 묶음 LL 로 붙입니다. 그러면 번호판은 묶음 하나와 숫자 네 개, 모두 5개의 대상을 한 줄로 늘어놓은 것이 됩니다. 묶음은 첫째, 둘째, 셋째, 넷째, 다섯째 중 어느 자리에나 올 수 있으므로, 배치 모양은 5가지입니다.

$$LLDDDD, DLLDDD, DDLDD, DDDLLD, DDDDLL.$$

(같은 말로, 첫 번째 문자는 여섯 자리 중 1번부터 5번까지 어느 자리에나 올 수 있고, 두 번째 문자는 그 바로 다음 자리에 옵니다.)

2단계: 배치 모양 채우기. 배치 모양이 무엇이든 숫자 자리는 네 개이고 각각 10가지, 문자 자리는 두 개이고 각각 26가지입니다. 같은 것이 반복되어도 되기 때문입니다. 따라서 채우는 방법은 $10^4 \cdot 26^2$ 가지입니다.

3단계: 합치기. 배치 모양이 다르면 번호판도 다르므로(문자의 위치가 다릅니다), 두 번 세는 것은 없습니다. 따라서 전체 개수는

$$5 \cdot 10^4 \cdot 26^2.$$

주의. 문자 묶음이 움직일 수 있다는 점을 잊으면 $10^4 \cdot 26^2$ 로 선택지 (A)가 됩니다. 이것은 다섯 가지 배치 모양 중 하나만 센 것입니다.

정답: (C) $5 \cdot 10^4 \cdot 26^2$

10 대수

출처: 2005 AMC 10B 20번

숫자 1, 3, 5, 7, 8을 각각 정확히 한 번씩 사용하여 만들 수 있는 모든 5자리 수의 평균(산술평균)은?

- (A) 48000 (B) 49999.5 (C) 53332.8 (D) 55555 (E) 56432.8

핵심 아이디어. 120개의 수를 모두 나열하지 맙시다. **자리별로** 평균을 구합니다. 대칭성에 의해 각 숫자는 각 자리에 똑같은 횟수만큼 나타나므로, 모든 자리에서 숫자의 평균이 같습니다. 모든 배열의 평균을 구해야 할 때는 “평균적인 수는 각 자리에 어떤 숫자를 가질까?”라고 묻는 것이 핵심입니다.

1단계: 개수 세기. 만들 수 있는 수는 $5! = 120$ 개입니다. 한 자리, 예를 들어 천의 자리를 고정해 봅시다. 다섯 숫자 각각은 정확히 $4! = 24$ 개의 수에서 그 자리에 옵니다. 그 자리의 숫자를 정하면 나머지 네 숫자를 24가지로 배열할 수 있기 때문입니다.

2단계: 자리별 숫자의 평균. 각 숫자가 모든 자리에 똑같은 횟수만큼 나타나므로, 각 자리의 숫자의 평균은 다섯 숫자의 평균과 같습니다.

$$\frac{1 + 3 + 5 + 7 + 8}{5} = \frac{24}{5} = 4.8.$$

3단계: 합치기. 한 수는 (만의 자리 숫자)·10000 + ... + (일의 자리 숫자)·1 이고, 합의 평균은 평균의 합이므로 평균적인 수는

$$4.8(10000 + 1000 + 100 + 10 + 1) = 4.8 \cdot 11111 = 53332.8.$$

마지막 곱셈을 확인해 봅시다. $11111 \cdot 4.8 = 44444 + 8888.8 = 53332.8$ 입니다.

다른 풀이. 120개의 수를 모두 더해 봅시다. 각 자리에서 모든 숫자가 24번씩 나타나므로, 그 자리의 숫자들의 합은 $24 \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 8) = 24 \cdot 24 = 576$ 입니다. 따라서 각 자리는 자릿값의 576배만큼 기여합니다. 전체 합은 $576 \cdot 11111 = 6399936$ 이고, $6399936 \div 120 = 53332.8$ 입니다.

주의. 가운데 숫자는 5이지만, 숫자의 **평균**은 4.8입니다. 모든 자리에 5를 쓰면 $5 \cdot 11111 = 55555$ 로 선택지 (D)가 됩니다.

정답: (C) 53332.8