
AMC 10

실전 모의고사

제 1 회

해설

정답표 • 출처 • 단계별 풀이

정답표와 출처

번호	정답	출처	영역
1	C	2006 AMC 10B 1번	대수
2	C	2016 AMC 10A 2번	대수
3	B	2003 AMC 10B 3번	대수
4	B	2015 AMC 10A 4번	대수
5	D	2019 AMC 10A 5번	정수론
6	D	2018 AMC 10B 6번	경우의 수와 확률
7	B	2005 AMC 10B 7번	기하
8	B	2017 AMC 10A 8번	경우의 수와 확률
9	C	2014 AMC 10A 9번	기하
10	C	2002 AMC 10B 10번	대수
11	C	2007 AMC 10A 11번	경우의 수와 확률
12	A	2004 AMC 10B 12번	기하
13	A	2011 AMC 10A 13번	경우의 수와 확률
14	D	2014 AMC 10B 14번	정수론
15	E	2009 AMC 10A 15번	대수
16	A	2017 AMC 10B 16번	정수론
17	A	2010 AMC 10A 17번	기하
18	B	2008 AMC 10B 18번	대수
19	C	2013 AMC 10A 19번	정수론
20	A	2012 AMC 10A 20번	경우의 수와 확률
21	A	2008 AMC 10A 21번	기하
22	B	2007 AMC 10B 22번	경우의 수와 확률
23	D	2018 AMC 10A 23번	기하
24	B	2011 AMC 10B 24번	기하
25	B	2010 AMC 10B 25번	대수

1 대수

출처: 2006 AMC 10B 1번

$(-1)^1 + (-1)^2 + \cdots + (-1)^{2006}$ 의 값은?

- (A) -2006 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 2006

핵심 아이디어. -1 의 거듭제곱은 단순히 번갈아 나타납니다. 지수가 홀수이면 -1 , 짝수이면 $+1$ 입니다. 그러니 항을 두 개씩 짝지어 봅시다.

각 항은 $-1, +1, -1, +1, \dots$ 이고, 마지막 항은 $(-1)^{2006} = +1$ 입니다. 연속한 두 항씩 묶으면 다음과 같습니다.

$$(-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots + (-1 + 1).$$

각 묶음의 합은 0 입니다. 항은 모두 2006 개이고 2006 은 짝수이므로, 남는 항 없이 정확히 1003 개의 묶음이 됩니다. 따라서 합은 $1003 \cdot 0 = 0$ 입니다.

정답: (C) 0

2 대수

출처: 2016 AMC 10A 2번

다음 등식을 만족시키는 x 의 값은 얼마인가

$$10^x \cdot 100^{2x} = 1000^5?$$

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

핵심 아이디어. 모든 수를 같은 밑 10 의 거듭제곱으로 나타내 봅시다. 그러면 지수끼리 같아야 합니다.

1단계. $100 = 10^2$ 이므로 $100^{2x} = (10^2)^{2x} = 10^{4x}$ 입니다. 따라서 좌변은 다음과 같습니다.

$$10^x \cdot 10^{4x} = 10^{x+4x} = 10^{5x}.$$

2단계. $1000 = 10^3$ 이므로 우변은 $1000^5 = (10^3)^5 = 10^{15}$ 입니다.

3단계. 이제 $10^{5x} = 10^{15}$ 이므로 $5x = 15$ 이고 $x = 3$ 입니다.

확인: $10^3 \cdot 100^6 = 10^3 \cdot 10^{12} = 10^{15} = 1000^5$ 입니다.

주의. 밑 100 을 바꾸는 것을 잊고 100^{2x} 을 10^{2x} 으로 취급하면 $10^{3x} = 10^{15}$ 이 되어 $x = 5$, 즉 선택지 (E)가 나옵니다. 거듭제곱의 거듭제곱은 지수를 곱해야 합니다. $(10^2)^{2x} = 10^{4x}$ 입니다.

정답: (C) 3

3 대수

출처: 2003 AMC 10B 3번

연속하는 짝수 5개의 합은 홀수인 자연수를 작은 것부터 차례로 8개 더한 합보다 4만큼 작다. 이 짝수 중 가장 작은 수는?

- (A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) 14

핵심 아이디어. 먼저 목표하는 합을 구한 다음, 다섯 짝수를 가장 작은 수에 대한 식으로 나타내 보시다.

1단계. 처음 8개의 홀수인 자연수는 $1, 3, 5, \dots, 15$ 이고, 그 합은 다음과 같습니다.

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 64.$$

(처음 n 개의 홀수의 합은 항상 n^2 이고, $8^2 = 64$ 입니다.)

2단계. 다섯 짝수의 합은 이보다 4만큼 작으므로 $64 - 4 = 60$ 입니다.

3단계. 가장 작은 수를 n 이라 하면 다섯 수는 $n, n + 2, n + 4, n + 6, n + 8$ 이고, 그 합은 $5n + 20$ 입니다. 따라서 $5n + 20 = 60$ 에서 $5n = 40, n = 8$ 입니다.

확인: $8 + 10 + 12 + 14 + 16 = 60$ 입니다.

주의. 60을 5로 나누면 12가 나오는데, 이것은 다섯 수의 **평균**, 즉 가운데 수이지 가장 작은 수가 아닙니다. 여기서 멈추면 선택지 (D)를 고르게 됩니다.

정답: (B) 8

4 대수

출처: 2015 AMC 10A 4번

파블로, 소피아, 미아는 파티에서 사탕 달걀을 몇 개씩 받았다. 파블로가 가진 달걀의 개수는 소피아의 세 배이고, 소피아가 가진 달걀의 개수는 미아의 두 배이다. 파블로는 세 사람이 모두 같은 개수의 달걀을 갖도록 자신의 달걀 중 일부를 소피아와 미아에게 주기로 하였다. 파블로가 소피아에게 주어야 하는 달걀은 파블로가 가진 달걀의 몇 분의 몇인가?

- (A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{1}{2}$

핵심 아이디어. 가장 적게 가진 미아의 달걀 수를 m 이라 하면, 나머지 사람의 달걀 수는 모두 m 의 배수입니다. 그다음 공평한 몫을 구해 보시다.

1단계. 미아는 m 개, 소피아는 그 두 배인 $2m$ 개, 파블로는 소피아의 세 배인 $6m$ 개를 가지고 있습니다.

2단계. 전체는 $m + 2m + 6m = 9m$ 개이므로, 세 사람이 같아지려면 각자 $9m \div 3 = 3m$ 개를 가져야 합니다.

3단계. 소피아는 $3m - 2m = m$ 개가 더 필요하고, 이것은 모두 파블로에게서 옵니다. 이를 파블로의 달걀에 대한 비율로 나타내면 다음과 같습니다.

$$\frac{m}{6m} = \frac{1}{6}.$$

(미아는 $2m$ 개를 받고 파블로에게는 $6m - m - 2m = 3m$ 개가 남으므로 모두 맞습니다.)

주의. 문제는 파블로의 달걀 중 소피아에게 가는 비율을 묻습니다. 미아의 몫을 쓰면 $\frac{2m}{6m} = \frac{1}{3}$, 즉 선택지 (D)가 되고, 파블로가 주는 달걀 전체를 쓰면 $\frac{3m}{6m} = \frac{1}{2}$, 즉 선택지 (E)가 됩니다.

정답: (B) $\frac{1}{6}$

5 정수론

출처: 2019 AMC 10A 5번

합이 45인 연속하는 정수의 개수의 최댓값은?

- (A) 9 (B) 25 (C) 45 (D) 90 (E) 120

핵심 아이디어. “정수”에는 음수도 포함됩니다. 길게 이어진 음수들이 짝이 맞는 양수들과 상쇄될 수 있으므로, 대부분이 상쇄되는 연속한 수들을 찾아봅시다.

1단계 (조건을 만족하는 예). $-44, -43, \dots, -1, 0, 1, \dots, 44, 45$ 를 생각합시다. -44 부터 44 까지는 $(-44$ 와 44 처럼 둘씩 짝지으면, 그리고 0 까지) 모두 상쇄되어 45 만 남습니다. 이 수들은 모두 $44 + 1 + 45 = 90$ 개입니다.

2단계 (더 긴 것은 불가능). a 부터 시작하는 연속하는 정수 k 개를 생각합시다. 그 합은 항의 개수와, 첫째 항과 마지막 항의 평균을 곱한 것이므로 다음과 같습니다.

$$\frac{k(2a + k - 1)}{2} = 45, \quad \text{따라서} \quad k(2a + k - 1) = 90.$$

$2a + k - 1$ 은 정수이므로 k 는 90 의 약수여야 합니다. 따라서 $k \leq 90$ 이고, 120 은 불가능합니다.

주의. 양의 정수만 생각하면 가장 긴 것은 $1 + 2 + \dots + 9 = 45$ 로 9 개, 즉 선택지 (A)입니다. 음수를 허용하면 상황이 완전히 달라집니다.

정답: (D) 90

6 경우의 수와 확률

출처: 2018 AMC 10B 6번

상자 안에 1, 2, 3, 4, 5가 하나씩 적힌 칩 5개가 들어 있다. 칩을 임의로 한 번에 하나씩 꺼내되 꺼낸 칩은 다시 넣지 않으며, 꺼낸 칩에 적힌 수의 합이 4보다 커질 때까지 계속 꺼낸다. 칩을 3번 꺼내야 할 확률은?

- (A) $\frac{1}{15}$ (B) $\frac{1}{10}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{5}$ (E) $\frac{1}{4}$

핵심 아이디어. 정확히 3번 꺼내야 하는 것은 처음 두 칩의 합이 4 이하일 때뿐입니다. 그러니 처음 두 칩의 순서쌍을 세어 봅시다.

1단계. 처음 두 칩의 합을 4 이하로 만드는 것은 무엇일까요? $\{1, 2\}$ (합 3)와 $\{1, 3\}$ (합 4)뿐입니다. 이때 첫 칩 하나만으로도, 처음 두 칩으로도 합이 5에 이르지 못하고, 남은 칩은 모두 2 이상이므로 세 번째 칩을 꺼내면 합이 6 이상이 됩니다. 즉 정확히 3번입니다.

2단계. 다섯 칩의 순서 전체를 미리 섞어 두었다고 생각해 봅시다. 처음 두 칩은 같은 가능성을 갖는 $5 \cdot 4 = 20$ 가지 순서쌍 중 하나가 됩니다(실제로는 칩 하나만 꺼내고 멈추는 경우에도 마찬가지입니다). 조건을 만족하는 순서쌍은 다음과 같이

$$(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1),$$

모두 4개입니다.

3단계. 확률은 $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ 입니다.

주의. 순서를 고려한 개수와 고려하지 않은 개수를 섞으면 안 됩니다. 순서를 고려하지 않은 2개의 쌍 $\{1, 2\}, \{1, 3\}$ 을 20개의 순서쌍으로 나누면 $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$, 즉 선택지 (B)가 됩니다. 같은 방식으로 세어야 합니다. 순서를 고려하지 않은 쌍 $\binom{5}{2} = 10$ 개 중 2개로 세어도 $\frac{1}{5}$ 가 나옵니다.

정답: (D) $\frac{1}{5}$

7 기하

출처: 2005 AMC 10B 7번

정사각형에 원이 내접하고, 이 원에 정사각형이 내접하며, 마지막으로 이 정사각형에 원이 내접한다. 큰 정사각형의 넓이에 대한 작은 원의 넓이의 비는?

- (A) $\frac{\pi}{16}$ (B) $\frac{\pi}{8}$ (C) $\frac{3\pi}{16}$ (D) $\frac{\pi}{4}$ (E) $\frac{\pi}{2}$

핵심 아이디어. 가장 안쪽 도형의 반지름을 r 로 놓고 한 단계씩 바깥으로 나아가 봅시다. 핵심 연결 고리는 원에 내접하는 정사각형의 대각선이 그 원의 지름이라는 사실입니다.

1단계. 작은 원의 반지름을 r 이라 하면 그 넓이는 πr^2 입니다. 이 원은 작은 정사각형에 내접하므로 그 정사각형의 한 변의 길이는 $2r$ 입니다.

2단계. 작은 정사각형은 큰 원에 내접하므로 그 대각선 $2r\sqrt{2}$ 는 큰 원의 지름입니다. 따라서 큰 원의 반지름은 $r\sqrt{2}$ 입니다.

3단계. 큰 원은 큰 정사각형에 내접하므로 그 정사각형의 한 변의 길이는 $2r\sqrt{2}$ 이고, 넓이는 $(2r\sqrt{2})^2 = 8r^2$ 입니다.

4단계. 구하는 비는 $\frac{\pi r^2}{8r^2} = \frac{\pi}{8}$ 입니다.

주의. 작은 원을 작은 정사각형과 비교하면 $\frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{\pi}{4}$, 즉 선택지 (D)가 나옵니다. 문제는 큰 정사각형과의 비를 묻고 있습니다.

정답: (B) $\frac{\pi}{8}$

8 경우의 수와 확률

출처: 2017 AMC 10A 8번

30명이 모인 자리에 서로 모두 아는 사람 20명과 아무도 모르는 사람 10명이 있다. 서로 아는 사람끼리는 포옹을 하고, 서로 모르는 사람끼리는 악수를 한다. 악수는 모두 몇 번 하게 되는가?

- (A) 240 (B) 245 (C) 290 (D) 480 (E) 490

핵심 아이디어. 어느 두 사람이든 포옹하거나 악수합니다. 악수하는 쌍은 아무도 모르는 10명 중 적어도 한 명이 포함된 쌍뿐이므로, 이런 쌍을 두 종류로 나누어 봅시다. (아래에서는 이들을 ‘낮선 사람’이라 부릅니다.)

1단계 (낮선 사람과 20명 중 한 명). 10명의 낮선 사람은 각각 20명 모두와 악수합니다. $10 \cdot 20 = 200$ 번입니다.

2단계 (낮선 사람 두 명). 10명의 낮선 사람은 아무도 모르므로, 이들 중 어느 두 명이든 악수합니다. $\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ 번입니다.

3단계. 합계는 $200 + 45 = 245$ 번입니다.

다른 풀이. 전체 쌍의 수에서 포옹하는 쌍의 수를 빼도 됩니다. $\binom{30}{2} - \binom{20}{2} = 435 - 190 = 245$ 입니다.

주의. “낮선 사람 각각이 다른 낮선 사람 9명과 악수한다”고 보고 $10 \cdot 9 = 90$ 으로 세면, 낮선 사람끼리의 악수를 모두 두 번씩 세게 되어 $200 + 90 = 290$, 즉 선택지 (C)가 나옵니다.

정답: (B) 245

9 기하

출처: 2014 AMC 10A 9번

직각삼각형에서 빗변이 아닌 두 변은 높이이기도 하며, 그 길이는 각각 $2\sqrt{3}$, 6이다. 이 삼각형의 나머지 한 높이의 길이는?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

핵심 아이디어. 세 번째 높이는 빗변에 내린 높이입니다. 넓이를 두 가지 방법으로 계산해 봅시다. 한 변은 빗변이 아닌 두 변을 밑변과 높이로, 또 한 번은 빗변을 밑변으로 삼습니다.

1단계. 빗변이 아닌 두 변을 쓰면 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 6 = 6\sqrt{3}$ 입니다.

2단계. 피타고라스 정리에 의해 빗변의 길이는 다음과 같습니다.

$$\sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 6^2} = \sqrt{12 + 36} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}.$$

3단계. 빗변에 내린 높이를 h 라 하면 $\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot h = 6\sqrt{3}$ 이므로 $2\sqrt{3}h = 6\sqrt{3}$ 이고, $h = 3$ 입니다.

(빠른 방법: 빗변에 내린 높이는 $\frac{(\text{빗변이 아닌 변}) \cdot (\text{빗변이 아닌 변})}{\text{빗변}} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 6}{4\sqrt{3}} = 3$ 입니다.)

정답: (C) 3

10 대수

출처: 2002 AMC 10B 10번

a 와 b 는 0이 아닌 실수이고, 방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 해가 a 와 b 이다. 순서쌍 (a, b) 는?

- (A) $(-2, 1)$ (B) $(-1, 2)$ (C) $(1, -2)$ (D) $(2, -1)$ (E) $(4, 4)$

핵심 아이디어. 이차방정식의 근이 주어진다면 근과 계수의 관계(비에트의 공식)로 식을 세울 수 있습니다. $x^2 + px + q = 0$ 의 두 근의 합은 $-p$, 곱은 q 입니다.

1단계. $x^2 + ax + b = 0$ 의 근이 a 와 b 이므로 다음이 성립합니다.

$$a + b = -a \quad \text{그리고} \quad ab = b.$$

2단계. $ab = b$ 에서 $b(a - 1) = 0$ 입니다. $b \neq 0$ 이므로 $a = 1$ 입니다.

3단계. 그러면 $a + b = -a$ 는 $1 + b = -1$ 이 되므로 $b = -2$ 입니다.

확인: $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$ 이고, 그 근은 1과 -2 로, 정확히 a 와 b 입니다.

다른 풀이. 선택지를 대입해 봅시다. 각 쌍은 a 와 b 가 모두 근이 되게 해야 합니다. $(1, -2)$ 의 경우 $1^2 + 1 \cdot 1 - 2 = 0$ 이고 $(-2)^2 + 1 \cdot (-2) - 2 = 0$ 입니다. $(-2, 1)$ 의 경우 $x = -2$ 를 대입하면 $4 + 4 + 1 = 9 \neq 0$ 입니다. 나머지 선택지도 같은 방식으로 성립하지 않습니다.

정답: (C) $(1, -2)$

11 경우의 수와 확률

출처: 2007 AMC 10A 11번

정육면체의 꼭짓점에 1부터 8까지의 수를 놓되, 각 면에 있는 네 수의 합이 모두 같도록 놓았다. 이 같은 합의 값은?

- (A) 14 (B) 16 (C) 18 (D) 20 (E) 24

핵심 아이디어. 수를 어떻게 놓았는지는 주어지지 않았고, 면의 합이 모두 같다는 사실만 주어졌습니다. 이것은 모든 면의 합을 한꺼번에 더하고 각 수가 몇 번씩 쓰이는지 세어 보라는 신호입니다.

1단계. 공통인 면의 합을 S 라 합시다. 여섯 면의 합을 모두 더하면 $6S$ 입니다.

2단계. 이제 같은 총합을 꼭짓점별로 세어 봅시다. 정육면체의 각 꼭짓점은 정확히 3개의 면 위에 있으므로 1, 2, ..., 8 각각은 3번씩 세어집니다.

$$6S = 3(1 + 2 + \cdots + 8) = 3 \cdot 36 = 108.$$

3단계. 따라서 $S = 108 \div 6 = 18$ 입니다.

이런 배치는 실제로 존재합니다. 예를 들어 아랫면에 1, 4, 6, 7을 놓고(합 18), 윗면에는 8, 5, 3, 2를 각각 1, 4, 6, 7의 바로 위에 놓습니다. 그러면 각 옆면은 아랫면의 한 모서리와 그 바로 위 윗면의 모서리로 이루어지고, $1 + 4 + 8 + 5$, $4 + 6 + 5 + 3$, $6 + 7 + 3 + 2$, $7 + 1 + 2 + 8$ 은 모두 18입니다.

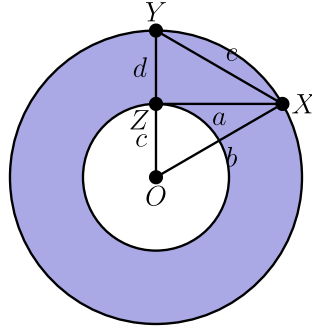
다른 풀이. 마주 보는 두 면, 예를 들어 윗면과 아랫면만 봅시다. 두 면에는 8개의 꼭짓점이 모두 정확히 한 번씩 들어 있으므로 $2S = 1 + 2 + \cdots + 8 = 36$ 이고 $S = 18$ 입니다.

정답: (C) 18

12 기하

출처: 2004 AMC 10B 12번

원환은 두 동심원 사이의 영역이다. 그림의 두 동심원의 반지름은 b 와 c 이고, $b > c$ 이다. $\overline{OX}$ 는 큰 원의 반지름이고, $\overline{XZ}$ 는 점 Z 에서 작은 원에 접하며, $\overline{OY}$ 는 Z 를 포함하는 큰 원의 반지름이다. $a = XZ$, $d = YZ$, $e = XY$ 라 할 때, 원환의 넓이는?



(A) πa^2

(B) πb^2

(C) πc^2

(D) πd^2

(E) πe^2

핵심 아이디어. 원환의 넓이는 큰 원의 넓이에서 작은 원의 넓이를 뺀 $\pi b^2 - \pi c^2 = \pi(b^2 - c^2)$ 입니다. 따라서 제곱이 $b^2 - c^2$ 인 길이를 찾으면 됩니다. 그리고 두 제곱의 차는 바로 피타고라스 정리가 만들어 내는 것입니다.

1단계. 접선은 접점에 그은 반지름과 수직입니다. 따라서 $\overline{XZ} \perp \overline{OZ}$ 이고, 삼각형 OZX 는 Z 에서 직각입니다.

2단계. 이 직각삼각형에서 빗변은 $OX = b$ (큰 원의 반지름)이고, 빗변이 아닌 두 변은 $OZ = c$ (작은 원의 반지름)와 $XZ = a$ 입니다. 피타고라스 정리에 의해 다음이 성립합니다.

$$a^2 + c^2 = b^2, \quad \text{따라서} \quad b^2 - c^2 = a^2.$$

3단계. 원환의 넓이는 $\pi(b^2 - c^2) = \pi a^2$ 입니다.

d 와 e 는 전혀 필요하지 않았다는 점에 주목합시다. 그림에 이 둘이 표시된 것은 여러분을 헷갈리게 하려는 것일 뿐입니다.

주의. πb^2 은 구멍까지 포함한 큰 원 전체의 넓이입니다. 또 $d = b - c$ 는 고리의 폭이지만, $\pi d^2 = \pi(b - c)^2$ 은 $\pi(b^2 - c^2)$ 이 아닙니다. $b = 5$, $c = 3$ 으로 놓아 보면 고리의 넓이는 16π 이지만 $\pi d^2 = 4\pi$ 입니다.

정답: (A) πa^2

13 경우의 수와 확률

출처: 2011 AMC 10A 13번

200과 700 사이의 짝수 중에서 각 자리의 숫자가 모두 다르고, 그 숫자들이 모두 다음 집합의 원소인 것은 몇 개인가

$$\{1, 2, 5, 7, 8, 9\}?$$

- (A) 12 (B) 20 (C) 72 (D) 120 (E) 200

핵심 아이디어. 제한이 있는 자리부터 채워 봅시다. 백의 자리(범위 때문에)와 일의 자리(짝수이므로)를 먼저 정하고, 제한이 없는 십의 자리는 마지막에 정합니다.

1단계 (백의 자리). 200과 700 사이의 세 자리 수의 백의 자리 숫자는 2, 3, 4, 5 또는 6입니다. 이 중 집합에 있는 것은 2와 5뿐입니다.

2단계 (일의 자리). 짝수이므로 일의 자리 숫자는 집합에 있는 짝수인 2 또는 8이어야 합니다. 또 백의 자리 숫자와 달라야 합니다.

- 백의 자리 숫자가 2인 경우: 일의 자리에 2를 다시 쓸 수 없으므로 8이어야 합니다. 1가지입니다.
- 백의 자리 숫자가 5인 경우: 일의 자리는 2 또는 8이 될 수 있습니다. 2가지입니다.

3단계 (십의 자리). 여섯 숫자 중 두 개는 이미 쓰였으므로, 어느 경우든 십의 자리 숫자는 4가지입니다.

4단계. 모두 $1 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = 4 + 8 = 12$ 개입니다.

참고로 열두 개의 수는 218, 258, 278, 298, 512, 518, 528, 572, 578, 582, 592, 598입니다.

정답: (A) 12

14 정수론

출처: 2014 AMC 10B 14번

다니카는 새 차를 몰고 여행을 하었는데, 운전한 시간은 정수 시간이었고 평균 속력은 시속 55마일이었다. 여행을 시작할 때 주행 거리계에는 abc 마일이 표시되어 있었다. 여기서 abc 는 $a \geq 1$ 이고 $a + b + c \leq 7$ 인 3자리 수이다. 여행이 끝났을 때 주행 거리계에는 cba 마일이 표시되어 있었다. $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값은?

- (A) 26 (B) 27 (C) 36 (D) 37 (E) 41

핵심 아이디어. 어떤 수와 그 수의 자릿수를 거꾸로 쓴 수의 차는, 가운데 자리 숫자가 상쇄되므로 항상 99의 배수입니다. 이동 거리는 55의 배수이기도 하므로, 두 사실이 함께 무엇을 강제하는지 살펴봅시다.

1단계 (이동 거리를 자릿수로). 이동 거리는 다음과 같습니다.

$$cba - abc = (100c + 10b + a) - (100a + 10b + c) = 99c - 99a = 99(c - a).$$

주행 거리계의 수가 커졌으므로 $c > a$ 입니다.

2단계 (55를 이용). 여행은 시속 55마일로 정수 k 시간 동안 계속되었으므로 $99(c - a) = 55k$ 입니다. 양변을 11로 나누면 $9(c - a) = 5k$ 입니다. 5와 9는 서로소이므로 $c - a$ 는 5의 배수여야 합니다.

3단계 (자릿수 결정). $a \geq 1$ 이고 $c \leq 9$ 이므로 $1 \leq c - a \leq 8$ 이고, 이 범위에서 5의 배수는 $c - a = 5$ 뿐입니다. 그러면 $c = a + 5$ 이고, $a + b + c \leq 7$ 에서 $2a + 5 + b \leq 7$, 즉 $2a + b \leq 2$ 입니다. $a \geq 1$ 이므로 $a = 1, b = 0$ 이고, 따라서 $c = 6$ 입니다.

4단계. 확인: 주행 거리계는 106에서 601로 바뀌었고, 이동 거리는 $495 = 55 \cdot 9$ 마일이므로 여행은 9시간 걸렸습니다. 마지막으로 다음을 얻습니다.

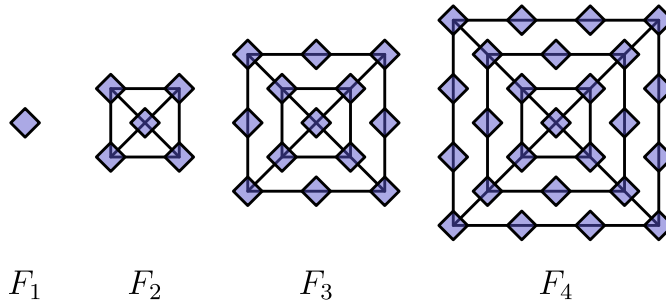
$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 + 0 + 36 = 37.$$

정답: (D) 37

15 대수

출처: 2009 AMC 10A 15번

그림의 도형 F_1, F_2, F_3, F_4 는 어떤 도형의 열에서 처음 몇 개의 도형이다. $n \geq 3$ 일 때, F_n 은 F_{n-1} 을 정사각형으로 둘러싸고, 새 정사각형의 각 변에 F_{n-1} 의 바깥 정사각형의 각 변에 있던 다이아몬드보다 하나 더 많은 다이아몬드를 놓아서 만든다. 예를 들어 도형 F_3 에는 다이아몬드가 13개 있다. 도형 F_{20} 에 있는 다이아몬드는 몇 개인가?



- (A) 401 (B) 485 (C) 585 (D) 626 (E) 761

핵심 아이디어. 도형 스무 개를 모두 그리기는 너무 많으므로, 각 새 층이 다이아몬드를 몇 개 더하는지 구한 다음 층들을 모두 더해 봅시다. 정사각형 둘레의 다이아몬드는 모퉁이를 조심해서 세면 가장 쉽게 셀 수 있습니다.

1단계 (한 층). F_n 에서 바깥 정사각형의 각 변에는 모퉁이를 포함하여 n 개의 다이아몬드가 있습니다(그림에서 F_2 는 2개, F_3 은 3개, F_4 는 4개). n 개씩 4개의 변을 더하면 4개의 모퉁이가 각각 두 번씩 세어지므로, 바깥 정사각형에 있는 다이아몬드의 개수는 다음과 같습니다.

$$4n - 4 = 4(n - 1) \text{ 개.}$$

확인: $F_3 = F_2 + 4 \cdot 2 = 5 + 8 = 13$ 으로, 문제에 주어진 것과 같습니다.

2단계 (층을 모두 더하기). F_1 의 다이아몬드 한 개에서 시작하여 $n = 2, 3, \dots, 20$ 에 대한 정사각형들을 더하면 다음과 같습니다.

$$F_{20} = 1 + 4(1 + 2 + \dots + 19) = 1 + 4 \cdot \frac{19 \cdot 20}{2} = 1 + 4 \cdot 190 = 761.$$

3단계 (일반화, 선택). 같은 계산으로 $F_n = 1 + 2n(n - 1)$ 을 얻으며, 이는 $F_1 = 1, F_2 = 5, F_3 = 13, F_4 = 25$ 와 일치합니다.

다른 풀이. $1 + 2n(n - 1) = n^2 + (n - 1)^2$ 임에 주목합시다. 개수 1, 5, 13, 25, ...는 차례로 $1^2 + 0^2, 2^2 + 1^2, 3^2 + 2^2, 4^2 + 3^2$ 입니다. 따라서 $F_{20} = 20^2 + 19^2 = 400 + 361 = 761$ 입니다.

주의. 모퉁이가 두 번에 공유된다는 것을 잊고 새 정사각형에 다이아몬드가 $4n$ 개 있다고 세면 $F_3 = 5 + 12 = 17$ 이 되어, 주어진 13과 별써 모순입니다. 층에 대한 공식은 항상 문제에서 주어진 예로 검사해 봅시다.

정답: (E) 761

16 정수론

출처: 2017 AMC 10B 16번

2017 이하의 양의 정수를 십진법으로 나타낼 때, 숫자 0을 포함하는 것은 몇 개인가?

- (A) 469 (B) 471 (C) 475 (D) 478 (E) 481

핵심 아이디어. “0을 포함한다”를 직접 세기는 번거롭지만, “0을 포함하지 않는다”는 쉽습니다. 각 자리 숫자가 그냥 9가지씩이기 때문입니다. 그러니 자릿수에 따라 수를 나누고, 각 묶음에서 여사건을 세어 봅시다.

1단계. 한 자리와 두 자리 수(1–99). 한 자리 수는 0을 포함하지 않습니다. 두 자리 수는 마지막 자리에만 0을 포함할 수 있으므로 10, 20, ..., 90 중 하나이며, 9개입니다.

2단계. 세 자리 수(100–999). 이런 수는 $999 - 100 + 1 = 900$ 개입니다. 0이 없는 수는 세 자리 숫자를 모두 1–9에서 고르므로 $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ 개입니다. 따라서 $900 - 729 = 171$ 개가 0을 포함합니다.

3단계. 1000부터 1999까지. 이런 수는 1000개입니다. 첫째 자리는 1이고, 0이 없으려면 나머지 세 자리가 각각 9가지이므로 729개입니다. 따라서 $1000 - 729 = 271$ 개가 0을 포함합니다.

4단계. 2000부터 2017까지. 이 수들은 모두 둘째 자리가 0이며, 모두 $2017 - 2000 + 1 = 18$ 개입니다.

5단계. 모든 묶음을 더하면 $9 + 171 + 271 + 18 = 469$ 입니다.

주의. 0의 개수가 아니라 수의 개수를 세야 합니다. 100이나 2000처럼 0이 여러 개 들어 있는 수도 한 번만 세어야 합니다. 여사건을 이용하면 이 점이 저절로 처리되지만, “십의 자리에 있는 0, 일의 자리에 있는 0, ...”처럼 따로따로 세면 중복해서 세게 됩니다.

정답: (A) 469

17 기하

출처: 2010 AMC 10A 17번

한 변의 길이가 3인치인 속이 짝 찬 정육면체가 있다. 각 면의 중앙에 가로 2인치, 세로 2인치인 정사각형 구멍을 뚫는다. 각 구멍의 가장자리는 정육면체의 모서리와 평행하고, 각 구멍은 정육면체를 완전히 관통한다. 남은 입체의 부피는 몇 세제곱인치인가?

- (A) 7 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) 15

핵심 아이디어. 마주 보는 두 면은 같은 구멍을 공유하므로, 실제로는 각 축 방향으로 하나씩 세 개의 터널만 있습니다. 이 터널들은 가운데에서 겹치므로, 제거된 부피는 **포함배제의 원리**로 구하라는 신호입니다. 더 간단하게는 남은 부분을 직접 살펴볼 수도 있습니다.

1단계. 각 터널은 $2 \times 2 \times 3$ 직육면체이고 부피는 12입니다. 세 터널을 더하면 $3 \cdot 12 = 36$ 이지만, 이는 겹친 부분을 여러 번 센 것입니다.

2단계. 어느 두 터널(예를 들어 위아래 방향 터널과 앞뒤 방향 터널)이든 정확히 가운데의 $2 \times 2 \times 2$ 정육면체에서 만나고, 그 부피는 8입니다. 세 터널 모두도 바로 그 가운데 정육면체에서 만납니다.

3단계. 포함배제의 원리에 의해 제거된 부피는 다음과 같습니다.

$$36 - 3 \cdot 8 + 8 = 20.$$

4단계. 남은 부피는 $3^3 - 20 = 27 - 20 = 7$ 입니다.

주의. 두 터널씩 겹친 세 부분을 빼고 나서 가운데 정육면체를 다시 더하는 것을 잊으면, 제거된 부피가 $36 - 24 = 12$, 남은 부피가 $27 - 12 = 15$ 로 선택지 (E)가 나옵니다. 가운데 정육면체는 세 터널 모두에 속하므로 3번 더해지고 3번 빼졌습니다. 따라서 한 번 더 더해야 합니다.

다른 풀이. 2인치 구멍은 각 면의 양쪽에 폭 $\frac{1}{2}$ 인치의 테두리를 남깁니다. 어떤 점이 남는 것은 세 좌표 중 가운데 2인치 구간에 있는 것이 많아야 하나일 때입니다. 따라서 남는 것은 정육면체의 모서리로 이루어진 뼈대입니다. 한 변이 $\frac{1}{2}$ 인 모퉁이 정육면체 8개(부피의 합 $8 \cdot \frac{1}{8} = 1$)와 이들을 잇는 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2$ 막대 12개(부피의 합 $12 \cdot \frac{1}{2} = 6$)로 이루어집니다. 전체 부피는 $1 + 6 = 7$ 입니다.

정답: (A) 7

18 대수

출처: 2008 AMC 10B 18번

벽돌공 브렌다는 혼자서 굴뚝 하나를 쌓는 데 9시간이 걸리고, 벽돌공 브랜던은 혼자서 그 굴뚝을 쌓는 데 10시간이 걸린다. 두 사람이 함께 일하면 이야기를 많이 해서, 두 사람이 합쳐서 쌓는 양이 시간당 벽돌 10개만큼 줄어든다. 두 사람이 함께 일하여 굴뚝을 5시간 만에 쌓았다. 굴뚝에 들어간 벽돌은 몇 개인가?

- (A) 500 (B) 900 (C) 950 (D) 1000 (E) 1900

핵심 아이디어. 감소량은 작업 전체에 대한 비율이 아니라 시간당 벽돌 수로 주어지므로, 흔히 쓰는 “시간당 굴뚝의 몇 분의 몇” 방법으로는 이를 처리할 수 없습니다. 벽돌의 개수를 n 이라 하고 모든 속도를 시간당 벽돌 수로 나타내 봅시다.

1단계. 브렌다는 9시간에 굴뚝 전체를 쌓으므로 속도는 시간당 $\frac{n}{9}$ 개입니다. 브랜던의 속도는 시간당 $\frac{n}{10}$ 개입니다.

2단계. 이야기 때문에 줄어드는 양까지 포함하면, 두 사람이 함께 쌓는 속도는 시간당 $\frac{n}{9} + \frac{n}{10} - 10$ 개입니다. 5시간 동안 n 개를 모두 쌓으므로 다음이 성립합니다.

$$5 \left(\frac{n}{9} + \frac{n}{10} - 10 \right) = n.$$

3단계. $\frac{n}{9} + \frac{n}{10} = \frac{10n+9n}{90} = \frac{19n}{90}$ 이므로 방정식은 $\frac{95n}{90} - 50 = n$ 이 됩니다. 양변에서 $n = \frac{90n}{90}$ 을 빼면 $\frac{5n}{90} = 50$, 즉 $\frac{n}{18} = 50$ 이므로 $n = 900$ 입니다.

검산. 브렌다는 시간당 $900/9 = 100$ 개, 브랜던은 $900/10 = 90$ 개를 쌓습니다. 합하면 190 개이고, 이야기 때문에 10 개를 빼면 시간당 180 개이므로 $5 \cdot 180 = 900$ 입니다. ✓

주의. “시간당 벽돌 10개만큼 줄어든다” 는 속도로 읽어야 합니다. 전체에서 벽돌 10 개를 한 번만 빼서 $5 \cdot \frac{19n}{90} - 10 = n$ 으로 놓으면 $n = 180$ 이 나오는데, 이는 선택지에 없습니다.

정답: (B) 900

19 정수론

출처: 2013 AMC 10A 19번

10진법에서 수 2013은 숫자 3으로 끝난다. 한편 9진법에서는 같은 수를 $(2676)_9$ 로 나타내며, 이는 숫자 6으로 끝난다. 2013을 b 진법으로 나타낸 것이 숫자 3으로 끝나도록 하는 양의 정수 b 는 몇 개인가?

- (A) 6 (B) 9 (C) 13 (D) 16 (E) 18

핵심 아이디어. b 진법에서 수의 마지막 자리 숫자는 그 수를 b 로 나눈 나머지입니다. 2013의 십진법 마지막 자리 숫자가 10으로 나눈 나머지인 것과 마찬가지로입니다. 따라서 “3으로 끝난다”는 나누어떨어짐에 대한 조건이 되고, 밑의 개수를 세는 것은 약수의 개수를 세는 것이 됩니다.

1단계. $2013 = (\dots d_1 d_0)_b$ 로 쓴다는 것은 $2013 = b \cdot (\text{어떤 수}) + d_0$, $0 \leq d_0 \leq b - 1$ 이라는 뜻입니다. 따라서 마지막 자리 숫자 d_0 은 2013을 b 로 나눈 나머지입니다. (예로 확인해 봅시다. $2013 = 9 \cdot 223 + 6$ 이고, $(2676)_9$ 는 6으로 끝납니다.)

2단계. 나머지가 3이어야 하므로 b 는 $2013 - 3 = 2010$ 의 약수입니다. 또 b 진법에 숫자 3이 있어야 하므로 $b \geq 4$ 입니다. 거꾸로 $b \mid 2010$ 이고 $b \geq 4$ 이면 $2013 = 2010 + 3$ 이므로 나머지가 3이 되어 조건을 만족합니다.

3단계. 소인수분해하면 $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$ 입니다. 네 소수 각각은 약수에 포함되거나 포함되지 않으므로, 2010의 약수는 $2^4 = 16$ 개입니다.

4단계. 4보다 작은 약수는 1, 2, 3입니다. 이들을 빼면 다음 $16 - 3 = 13$ 개의 밑이 남습니다.

5, 6, 10, 15, 30, 67, 134, 201, 335, 402, 670, 1005, 2010.

예를 들어 $2013 = 1 \cdot 2010 + 3$ 이므로 2010진법에서 이 수는 두 숫자 1과 3으로 이루어지고, 실제로 3으로 끝납니다.

주의. 2010의 약수 16개를 모두 세면 선택지 (D)가 됩니다. 밑 1, 2, 3도 2010의 약수이지만 이런 진법에는 숫자 3이 없습니다. 2013을 2나 3으로 나누면 나머지는 3이 아니라 1 또는 0입니다.

정답: (C) 13

20 경우의 수와 확률

출처: 2012 AMC 10A 20번

3×3 정사각형이 9개의 단위정사각형으로 나누어져 있다. 각 단위정사각형을 흰색 또는 검은색으로 칠하는데, 두 색이 나올 가능성은 같고 각 칸의 색은 서로 독립적으로 임의로 정해진다.

이제 이 정사각형을 그 중심을 기준으로 시계 방향으로 90° 회전시킨 다음, 이전에 검은색 정사각형이 있던 자리에 놓인 흰색 정사각형을 모두 검은색으로 칠한다. 나머지 정사각형의 색은 바꾸지 않는다. 이때 격자 전체가 검은색이 될 확률은?

- (A) $\frac{49}{512}$ (B) $\frac{7}{64}$ (C) $\frac{121}{1024}$ (D) $\frac{81}{512}$ (E) $\frac{9}{32}$

핵심 아이디어. 90° 회전은 모퉁이 칸과 변 칸을 절대 섞지 않습니다. 중앙 칸은 제자리에 있고, 네 모퉁이 칸은 자기들끼리 돌아가며, 네 변 칸도 마찬가지로입니다. 따라서 격자는 서로 독립인 세 부분으로 나뉘고, 각 부분은 어떤 자리가 정확히 언제 흰색으로 남는지를 따져서 분석할 수 있습니다.

1단계. 어떤 자리가 흰색으로 남는 것은 언제일까요? 회전한 뒤 각 자리에는 그 자리로 옮겨 온 칸이 놓입니다. 그 칸이 검은색이면 그 자리는 검은색입니다. 그 칸이 흰색이면, 그 자리가 **이전에도** 흰색이었던 경우가 아닌 한 검은색으로 다시 칠해집니다. 따라서 어떤 자리가 흰색으로 남는 것은 그 자리로 옮겨 온 칸과 원래 그 자리에 있던 칸이 모두 흰색일 때뿐입니다.

2단계. 중앙 칸. 중앙 칸은 회전해도 제자리에 오므로, 처음에 흰색이었으면 흰색으로 남고 검은색이었으면 검은색으로 남습니다. 따라서 처음부터 검은색이어야 하고, 그 확률은 $\frac{1}{2}$ 입니다.

3단계. 모퉁이 칸. 시계 방향으로 각 모퉁이 칸은 다음 모퉁이의 자리로 옮겨 갑니다. 1단계에 의해 모퉁이가 모두 검은색이 되는 것은 이 순환에서 **이웃한** 두 모퉁이가 모두 흰색인 경우가 없을 때뿐입니다. 순환은 한 바퀴 돌아오므로 마지막 모퉁이와 첫 모퉁이도 이웃입니다. $2^4 = 16$ 가지 색칠 중 조건을 만족하는 것은 다음과 같습니다.

- 흰색이 없는 경우: 1가지
- 흰색이 하나인 경우: 4가지
- 흰색이 둘이고 대각선으로 마주 보는 경우(순환에서 이웃하지 않음): 2가지

흰색이 셋 이상이면 항상 이웃한 두 칸이 생깁니다. 모두 $1 + 4 + 2 = 7$ 가지이므로 확률은 $\frac{7}{16}$ 입니다.

4단계. 변 칸도 독립적으로 같은 종류의 순환(길이 4)을 이루므로, 확률은 역시 $\frac{7}{16}$ 입니다.

5단계. 서로 독립인 세 부분의 확률을 곱하면 다음과 같습니다.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{16} \cdot \frac{7}{16} = \frac{49}{512}.$$

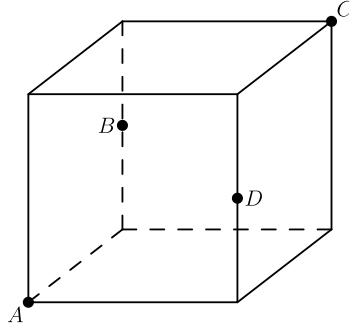
주의. 순환은 한 바퀴 돌아옵니다. 마지막으로 옮겨 가는 모퉁이 칸은 첫 번째 칸이 있던 자리에 놓입니다. 네 모퉁이를 원이 아니라 일렬로 취급하면 “양 끝”의 두 칸이 모두 흰색인 경우를 잘못 허용하게 됩니다. 중앙 칸을 아예 잊으면 $\frac{49}{256}$ 가 나오는데, 이는 선택지에 없습니다.

정답: (A) $\frac{49}{512}$

21 기하

출처: 2008 AMC 10A 21번

한 변의 길이가 1인 정육면체를, 그림과 같이 대각선 방향으로 마주 보는 두 꼭짓점 A, C 와 A 나 C 를 포함하지 않는 마주 보는 두 모서리의 중점 B, D 를 지나는 평면으로 자른다. 사각형 $ABCD$ 의 넓이는?



- (A) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (B) $\frac{5}{4}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\frac{3}{2}$ (E) $\sqrt{3}$

핵심 아이디어. $ABCD$ 의 네 변은 모두 비슷해 보입니다. 각 변은 정육면체의 한 꼭짓점에서 한 모서리의 중점까지 한 면을 가로질러 갑니다. 네 변의 길이가 같으면 $ABCD$ 는 마름모이고, 마름모의 넓이 공식에는 두 대각선의 길이만 필요합니다. 그리고 두 대각선 모두 정육면체에서 쉽게 구할 수 있는 길이입니다.

1단계. $A = (0, 0, 0)$, $C = (1, 1, 1)$ 이 되도록 정육면체를 좌표공간에 놓고, x 축은 오른쪽, y 축은 뒤쪽, z 축은 위쪽을 향하게 합시다. 그림을 보면 B 는 왼쪽 뒤 세로 모서리의 중점이고, D 는 오른쪽 앞 세로 모서리의 중점입니다.

$$B = (0, 1, \frac{1}{2}), \quad D = (1, 0, \frac{1}{2}).$$

2단계. 각 변은 정육면체의 한 면 위에 있고, 빗변이 아닌 두 변의 길이가 1과 $\frac{1}{2}$ 인 직각삼각형의 빗변입니다. 예를 들어 AB 는 왼쪽 면 위에 있고 뒤로 1, 위로 $\frac{1}{2}$ 만큼 갑니다. 마찬가지로 BC 는 뒷면, CD 는 오른쪽 면, DA 는 앞면 위에 있습니다. 따라서 모든 변의 길이는

$$\sqrt{1^2 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

이고, $ABCD$ 는 네 변의 길이가 같은 평면 사각형이므로 마름모입니다.

3단계. 대각선 AC 는 정육면체의 공간 대각선이므로 $AC = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ 입니다. 대각선 BD 는 높이 $\frac{1}{2}$ 에서 수평이고 xy 방향으로 $(0, 1)$ 에서 $(1, 0)$ 까지 가므로, 길이는 면의 대각선과 같습니다. 즉 $BD = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ 입니다.

4단계. 마름모의 두 대각선은 서로 수직이고 마름모를 합동인 직각삼각형 네 개로 나누므로, 넓이는 두 대각선의 길이의 곱의 절반입니다.

$$\text{넓이 } ABCD = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

주의. $ABCD$ 를 정사각형으로 보고 한 변의 길이를 제공하고 싶어집니다. 그러면 $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$, 즉 선택지 (B)가 나옵니다. 하지만 두 대각선 $\sqrt{3}$ 과 $\sqrt{2}$ 의 길이가 다르므로 정사각형이 아니며, 넓이는 (한 변의 길이)²보다 작습니다.

정답: (A) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

22 경우의 수와 확률

출처: 2007 AMC 10B 22번

한 참가자가 1부터 4까지의 수 중 하나를 고른다. 수를 고른 뒤, 각 면에 1부터 4까지의 수가 적힌 정사면체 모양의 주사위 두 개를 던진다. 고른 수가 정확히 한 주사위의 바닥 면에 나오면 참가자는 \$1를 받는다. 고른 수가 두 주사위 모두의 바닥 면에 나오면 참가자는 \$2를 받는다. 고른 수가 어느 주사위의 바닥 면에도 나오지 않으면 참가자는 \$1를 잃는다. 주사위를 한 번 던질 때, 참가자가 받는 금액의 기댓값은 몇 달러인가?

- (A) $-\frac{1}{8}$ (B) $-\frac{1}{16}$ (C) 0 (D) $\frac{1}{16}$ (E) $\frac{1}{8}$

핵심 아이디어. “기댓값”이란 각 결과에 대해 받는 금액에 그 확률을 곱하여 모두 더한 것입니다. 중요한 것은 두 주사위 중 고른 수가 나온 주사위가 몇 개인지(0, 1, 2개)뿐이므로, 이 세 확률을 구하고 그 합이 1인지 확인해 봅시다.

1단계. 참가자가 어떤 수를 고르든, 각 주사위의 바닥 면에 그 수가 나올 확률은 $\frac{1}{4}$, 나오지 않을 확률은 $\frac{3}{4}$ 입니다. 두 주사위는 독립이고, 같은 가능성을 갖는 결과는 $4 \cdot 4 = 16$ 가지입니다.

2단계. 세 가지 경우는 다음과 같습니다.

- 두 주사위 모두 나오지 않음: $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$
- 정확히 한 주사위에서 나옴: 첫째 주사위에서 나오고 둘째에서 나오지 않거나 그 반대이므로 $2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{16}$
- 두 주사위 모두 나옴: $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

확인: $\frac{9}{16} + \frac{6}{16} + \frac{1}{16} = 1$ 입니다.

3단계. 받는 금액의 기댓값을 달러 단위로 구하면 다음과 같습니다.

$$(-1) \cdot \frac{9}{16} + 1 \cdot \frac{6}{16} + 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{-9 + 6 + 2}{16} = -\frac{1}{16}.$$

주의. “정확히 한 주사위”의 확률을 $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{8}{16}$ 로 계산하면 **다른** 주사위에서는 나오지 않아야 한다는 조건을 빠뜨린 것이어서, 두 주사위 모두 나오는 경우가 여기에도 세어집니다. 그러면 $\frac{-9+8+2}{16} = \frac{1}{16}$, 즉 선택지 (D)가 나옵니다. 경고 신호는 $\frac{9}{16} + \frac{8}{16} + \frac{1}{16}$ 이 1보다 크다는 것입니다.

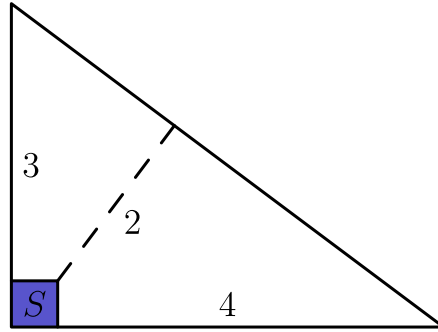
다른 풀이. 확률을 곱하는 대신 결과의 개수를 세어 봅시다. 참가자가 1을 골랐다고 합시다(대칭성에 의해 어떤 수를 고르든 상관없습니다). 같은 가능성을 갖는 16가지 결과 중 두 주사위 모두 1이 아닌 경우는 $3 \cdot 3 = 9$ 가지, 둘 다 1인 경우는 단 1가지이므로, 정확히 하나만 1인 경우는 나머지 $16 - 9 - 1 = 6$ 가지입니다. 16가지 결과 전체에서 참가자가 받는 금액의 합은 $9 \cdot (-1) + 6 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = -1$ 달러이므로, 한 번 던질 때 평균 $-\frac{1}{16}$ 달러입니다.

정답: (B) $-\frac{1}{16}$

23 기하

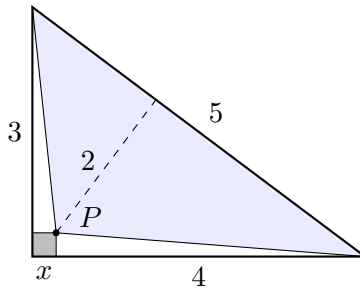
출처: 2018 AMC 10A 23번

농부 피타고라스는 직각삼각형 모양의 밭을 가지고 있다. 이 직각삼각형에서 빗변이 아닌 두 변의 길이는 3과 4이다. 그는 두 변이 직각으로 만나는 모퉁이에 작은 정사각형 S 를 심지 않고 남겨 두어, 하늘에서 보면 직각 표시처럼 보이게 하였다. 밭의 나머지 부분에는 작물을 심었다. S 에서 빗변까지의 최단 거리는 2이다. 작물을 심은 부분은 밭 전체의 몇 분의 몇인가?



- (A) $\frac{25}{27}$ (B) $\frac{26}{27}$ (C) $\frac{73}{75}$ (D) $\frac{145}{147}$ (E) $\frac{74}{75}$

핵심 아이디어. 직선까지의 거리는 **높이**입니다. 주어진 “2”는 빗변(길이 5)을 밑변으로 하고 정사각형의 바깥 꼭짓점 P 를 꼭대기로 하는 삼각형의 높이입니다. P 와 꼭짓점들을 이으면 밭이 여러 조각으로 나뉘는데, 각 조각의 넓이는 정사각형의 한 변의 길이 x 로 쉽게 나타낼 수 있고, 조각들의 넓이를 모두 더하면 전체 넓이 6이 되어야 합니다.



1단계. 정사각형의 한 변의 길이를 x 라 하고, 직각인 꼭짓점을 원점에, 길이가 4인 변을 아래쪽에, 길이가 3인 변을 왼쪽 세로로 놓읍시다. S 에서 빗변에 가장 가까운 점은 바깥 꼭짓점 $P = (x, x)$ 입니다. 빗변은 정사각형 위쪽에서 오른쪽 아래로 기울어져 있으므로, P 에서 왼쪽이나 아래쪽으로 움직이면 빗변에서 멀어지기만 하기 때문입니다. 따라서 P 에서 빗변까지의 점선의 길이는 2입니다.

2단계. P 에서 두 예각의 꼭짓점 $(0, 3)$ 과 $(4, 0)$ 으로 선분을 그림시다. 이 선분들과 S 에 의해 밭은 네 조각으로 나뉩니다.

- 정사각형 S : 넓이 x^2
- 왼쪽 변 위의 가느다란 삼각형: 밑변 $3 - x$ ($(0, x)$ 에서 $(0, 3)$ 까지), 높이 x , 넓이 $\frac{x(3-x)}{2}$

- 아래쪽 변 위의 가느다란 삼각형: 밑변 $4 - x$, 높이 x , 넓이 $\frac{x(4-x)}{2}$
- 빗변 위의 색칠된 삼각형: 밑변 5, 높이 2, 넓이 $\frac{5 \cdot 2}{2} = 5$

3단계. 밭 전체의 넓이는 $\frac{3 \cdot 4}{2} = 6$ 이므로 다음이 성립합니다.

$$x^2 + \frac{3x - x^2}{2} + \frac{4x - x^2}{2} + 5 = 6.$$

x^2 항은 소거됩니다. $x^2 + \frac{7x - 2x^2}{2} = \frac{7x}{2}$ 이기 때문입니다. 따라서 $\frac{7x}{2} = 1$ 이고 $x = \frac{2}{7}$ 입니다.

4단계. 정사각형의 넓이는 $\frac{4}{49}$ 이므로, 작물을 심은 부분의 비율은 다음과 같습니다.

$$\frac{6 - \frac{4}{49}}{6} = 1 - \frac{4}{294} = 1 - \frac{2}{147} = \frac{145}{147}.$$

주의. 점선은 직각인 꼭짓점에서 내린 높이와 **평행**하지만, 그 높이의 일부는 아닙니다. 그 높이는 $\frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}$ 이고, 여기서 2를 뺀 $\frac{12}{5} - 2 = \frac{2}{5}$ 를 구한 뒤 이 $\frac{2}{5}$ 를 S 의 한 변의 길이로 쓰면 $\frac{6 - 4/25}{6} = \frac{73}{75}$, 즉 선택지 (C)가 나옵니다.

다른 풀이. 같은 좌표에서 빗변은 직선 $3X + 4Y = 12$ 이고, (x, x) 에서 이 직선까지의 거리는 $\frac{12 - 3x - 4x}{5} = \frac{12 - 7x}{5}$ 입니다. 이것을 2와 같다고 놓으면 $7x = 2$ 이므로 다시 $x = \frac{2}{7}$ 을 얻습니다.

정답: (D) $\frac{145}{147}$

24 기하

출처: 2011 AMC 10B 24번

xy 좌표평면에서 격자점은 x 와 y 가 모두 정수인 점 (x, y) 이다. $\frac{1}{2} < m < a$ 인 모든 m 에 대하여 $y = mx + 2$ 의 그래프는 $0 < x \leq 100$ 인 격자점을 하나도 지나지 않는다. a 의 최댓값은?

- (A) $\frac{51}{101}$ (B) $\frac{50}{99}$ (C) $\frac{51}{100}$ (D) $\frac{52}{101}$ (E) $\frac{13}{25}$

핵심 아이디어. “+2”는 미끼입니다. 2가 정수이므로 $mx + 2$ 가 정수인 것은 mx 가 정수일 때와 정확히 같습니다. 따라서 직선이 x 에서 격자점을 지나는 것은 어떤 정수 k 에 대하여 $m = \frac{k}{x}$ 일 때와 정확히 같습니다. 그러면 문제는 **분모가 100 이하인 분수 중 $\frac{1}{2}$ 보다 크면서 가장 가까운 것은 무엇인가?**가 됩니다. 선택지가 모두 분모가 100 근처이고 $\frac{1}{2}$ 보다 조금 큰 분수라는 점도 같은 방향을 가리킵니다.

1단계. $1 \leq x \leq 100$ 인 정수 x 에 대하여 점 $(x, mx + 2)$ 가 격자점인 것은 mx 가 정수 k 일 때, 즉 $m = \frac{k}{x}$ 일 때와 정확히 같습니다. 따라서 나쁜 기울기는 정확히 $1 \leq x \leq 100$ 인 분수 $\frac{k}{x}$ 들이고, a 는 이런 분수 중 $\frac{1}{2}$ 보다 큰 가장 작은 것이어야 합니다.

2단계. x 를 고정하고 $\frac{k}{x} > \frac{1}{2}$ 인 가장 작은 값, 즉 $2k > x$ 인 가장 작은 정수 k 를 찾아봅시다.

- x 가 짝수, $x = 2j$ 인 경우: $k > j$ 이어야 하므로 $k \geq j + 1$ 이고 $\frac{k}{x} \geq \frac{j+1}{2j} = \frac{1}{2} + \frac{1}{x}$ 입니다. $x \leq 100$ 에서 이 값 중 가장 작은 것은 $\frac{1}{2} + \frac{1}{100} = \frac{51}{100}$ 입니다.

- x 가 홀수, $x = 2j + 1$ 인 경우: $k > j + \frac{1}{2}$ 이어야 하므로 $k \geq j + 1$ 이고 $\frac{k}{x} \geq \frac{j+1}{2j+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2x}$ 입니다. 홀수 $x \leq 99$ 에서 이 값 중 가장 작은 것은 $\frac{1}{2} + \frac{1}{198} = \frac{50}{99}$ 입니다.

$\frac{1}{198} < \frac{1}{100}$ 이므로 $\frac{1}{2}$ 보다 큰 가장 작은 나쁜 기울기는 $\frac{50}{99}$ 입니다.

3단계. $a = \frac{50}{99}$ 은 조건을 만족합니다. $\frac{1}{2}$ 과 $\frac{50}{99}$ 사이(양 끝 제외)에는 나쁜 기울기가 없으므로, 그 사이의 모든 m 에 대하여 직선은 $0 < x \leq 100$ 인 격자점을 하나도 지나지 않습니다.

더 큰 a 는 조건을 만족하지 않습니다. $a > \frac{50}{99}$ 이면 $m = \frac{50}{99}$ 이 허용되는데, 이 직선은 격자점 $(99, 50 + 2) = (99, 52)$ 를 지납니다.

따라서 최댓값은 $a = \frac{50}{99}$ 입니다.

주의. 분모가 가장 큰 100일 때 $\frac{1}{2}$ 에 가장 가까운 분수가 나온다고 생각하기 쉽고, 그러면 $\frac{51}{100}$, 즉 선택지 (C)를 고르게 됩니다. 하지만 짝수 분모로는 $\frac{1}{2}$ 에 $\frac{1}{x}$ 이내로만 다가갈 수 있는 반면 홀수 분모로는 $\frac{1}{2x}$ 이내까지 다가갈 수 있으므로, $\frac{50}{99} \approx 0.50505$ 가 $\frac{51}{100} = 0.51$ 보다 가깝습니다. 선택지 (A)의 $\frac{51}{101}$ 은 $\frac{50}{99}$ 보다 작습니다. 조건을 만족하는 a 의 값이기는 하지만 가장 큰 값은 아닙니다.

정답: (B) $\frac{50}{99}$

25 대수

출처: 2010 AMC 10B 25번

$a > 0$ 이고, $P(x)$ 는 정수 계수 다항식으로서 다음 두 조건을 만족시킨다.

$$P(1) = P(3) = P(5) = P(7) = a,$$

그리고

$$P(2) = P(4) = P(6) = P(8) = -a.$$

a 의 최솟값은?

- (A) 105 (B) 315 (C) 945 (D) 7! (E) 8!

핵심 아이디어. 다항식이 여러 점에서 같은 값을 가지면 그 값을 빼 봅시다. $P(x) - a$ 는 $x = 1, 3, 5, 7$ 을 근으로 가지므로 인수분해됩니다. “정수 계수”와 “ a 의 최솟값”은 나누어떨어짐을 이용하라는 신호입니다. $x = 2, 4, 6, 8$ 을 대입하면 a 가 어떤 수의 배수여야 함을 알게 됩니다. 그다음 그 배수가 실제로 가능함을 보여야 합니다.

1단계. $R(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 5)(x - 7)$ 이라 하고, $P(x) - a$ 를 $R(x)$ 로 나눕시다. R 은 최고차항의 계수가 1이고 계수가 모두 정수이므로, 나눗셈 과정에서 분수가 생기지 않습니다. 따라서

$$P(x) - a = R(x)Q(x) + T(x)$$

이고, 여기서 Q 와 T 는 정수 계수 다항식이며 T 의 차수는 3 이하입니다. $P(x) - a$ 와 $R(x)$ 는 모두 1, 3, 5, 7을 근으로 가지므로 T 도 그렇습니다. 차수가 3 이하인 다항식이 근을 네 개 가지면 그 다항식은 0입니다. 따라서 $P(x) = a + R(x)Q(x)$ 입니다.

2단계. 짝수 점에서 R 의 값을 구하면 다음과 같습니다.

$$R(2) = (1)(-1)(-3)(-5) = -15, \quad R(4) = (3)(1)(-1)(-3) = 9,$$

$$R(6) = (5)(3)(1)(-1) = -15, \quad R(8) = (7)(5)(3)(1) = 105.$$

3단계. 각 짝수 점에서 $P = -a$ 이므로 $R(k)Q(k) = -2a$ 입니다.

$$-15Q(2) = 9Q(4) = -15Q(6) = 105Q(8) = -2a.$$

각 $Q(k)$ 는 정수이므로 $9 \mid 2a$ 이고 $105 \mid 2a$ 입니다($15 \mid 2a$ 도 성립합니다). 9와 105는 홀수이므로 $9 \mid a$ 이고, $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ 은 a 의 약수입니다. 따라서 a 는 $\text{lcm}(9, 105) = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 315$ 의 배수이고, $a \geq 315$ 입니다.

4단계. $a = 315$ 가 실제로 가능합니다. 다음을 만족시키는 정수 계수 다항식 Q 가 필요합니다.

$$Q(2) = \frac{2a}{15} = 42, \quad Q(4) = -\frac{2a}{9} = -70, \quad Q(6) = 42, \quad Q(8) = -\frac{2a}{105} = -6.$$

$Q(2) = Q(6) = 42$ 이므로 L 이 일차식일 때 $Q(x) = 42 + (x-2)(x-6)L(x)$ 로 놓아 봅시다. $x = 4$ 에서 $42 + (2)(-2)L(4) = -70$ 이므로 $L(4) = 28$ 입니다. $x = 8$ 에서 $42 + (6)(2)L(8) = -6$ 이므로 $L(8) = -4$ 입니다. 이 두 점을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{-4-28}{4} = -8$ 이므로 $L(x) = 60 - 8x$ 입니다. 따라서 다항식

$$P(x) = 315 + (x-1)(x-3)(x-5)(x-7)(42 + (x-2)(x-6)(60-8x))$$

은 정수 계수를 가지고, 1, 3, 5, 7에서 315, 2, 4, 6, 8에서 -315 의 값을 가집니다.

주의. $x = 2, 6, 8$ 만 이용하면 $\text{lcm}(15, 105) = 105$, 즉 선택지 (A)가 나옵니다. $R(4) = 9$ 인 $x = 4$ 에서 얻는 조건이 3의 인수를 하나 더 추가합니다. 최소공배수를 구하는 대신 $9 \cdot 105 = 945$ 처럼 곱하면 선택지 (C)가 나오지만, 315는 이미 두 수로 모두 나누어떨어집니다.

정답: (B) 315