

---

# AMC 10

# 제 2 회

실전 모의고사

---

## 해설

---

정답표 • 출처 • 단계별 풀이

## 정답표와 출처

| 번호 | 정답 | 출처               | 영역        |
|----|----|------------------|-----------|
| 1  | C  | 2017 AMC 10A 1번  | 대수        |
| 2  | E  | 2014 AMC 10B 2번  | 대수        |
| 3  | D  | 2015 AMC 10A 3번  | 대수        |
| 4  | C  | 2008 AMC 10B 4번  | 대수        |
| 5  | D  | 2016 AMC 10A 5번  | 정수론       |
| 6  | C  | 2011 AMC 10A 6번  | 경우의 수와 확률 |
| 7  | B  | 2013 AMC 10B 7번  | 기하        |
| 8  | B  | 2004 AMC 10A 8번  | 경우의 수와 확률 |
| 9  | A  | 2009 AMC 10B 9번  | 기하        |
| 10 | B  | 2011 AMC 10B 10번 | 대수        |
| 11 | B  | 2015 AMC 10B 11번 | 경우의 수와 확률 |
| 12 | A  | 2017 AMC 10B 12번 | 대수        |
| 13 | A  | 2010 AMC 10A 13번 | 대수        |
| 14 | D  | 2016 AMC 10B 14번 | 기하        |
| 15 | D  | 2008 AMC 10A 15번 | 대수        |
| 16 | D  | 2009 AMC 10A 16번 | 대수        |
| 17 | C  | 2012 AMC 10A 17번 | 정수론       |
| 18 | E  | 2010 AMC 10B 18번 | 경우의 수와 확률 |
| 19 | C  | 2003 AMC 10A 19번 | 기하        |
| 20 | E  | 2006 AMC 10B 20번 | 기하        |
| 21 | C  | 2007 AMC 10A 21번 | 기하        |
| 22 | D  | 2005 AMC 10A 22번 | 정수론       |
| 23 | B  | 2006 AMC 10A 23번 | 기하        |
| 24 | B  | 2019 AMC 10A 24번 | 대수        |
| 25 | B  | 2014 AMC 10A 25번 | 정수론       |

## 1 대수

출처: 2017 AMC 10A 1번

다음 식의 값은

$$2(2(2(2(2(2+1)+1)+1)+1)+1)+1?$$

- (A) 70                      (B) 97                      (C) 127                      (D) 159                      (E) 729

**핵심 아이디어.** 안쪽에서 바깥쪽으로 계산해 봅시다. 모든 괄호에서 하는 일은 같습니다. 안에 있는 값을 두 배 한 다음 1을 더합니다.

가장 안쪽 괄호는  $2+1=3$ 입니다. 이제 남은 괄호마다 한 번씩 “두 배 하고 1 더하기”를 적용합니다.

$$2 \cdot 3 + 1 = 7, \quad 2 \cdot 7 + 1 = 15, \quad 2 \cdot 15 + 1 = 31, \quad 2 \cdot 31 + 1 = 63, \quad 2 \cdot 63 + 1 = 127.$$

바깥쪽 괄호 다섯 개를 모두 썼으므로 값은 127입니다.

규칙을 눈여겨봅시다. 3, 7, 15, 31, 63, 127은 각각 2의 거듭제곱보다 하나 작은 수입니다( $4-1$ ,  $8-1$ , ...,  $128-1$ ). 이 규칙을 알아차리면 계산을 검산하기 좋습니다.

**주의.** 괄호의 개수를 정확히 세어야 합니다. 한 겹 일찍 멈추면 63, 한 겹 더 가면 255가 나오는데, 둘 다 선택지에 없습니다. 괄호를 잘못 썼다는 신호입니다.

정답: (C) 127

## 2 대수

출처: 2014 AMC 10B 2번

$\frac{2^3 + 2^3}{2^{-3} + 2^{-3}}$ 의 값은?

- (A) 16                      (B) 24                      (C) 32                      (D) 48                      (E) 64

**핵심 아이디어.** 분자와 분모 모두 “어떤 수에 자기 자신을 더한 것”이므로, 2를 묶어 내고 약분합니다.

분자는  $2^3 + 2^3 = 2 \cdot 2^3$ 이고 분모는  $2^{-3} + 2^{-3} = 2 \cdot 2^{-3}$ 입니다. 인수 2를 약분하면 다음과 같습니다.

$$\frac{2 \cdot 2^3}{2 \cdot 2^{-3}} = \frac{2^3}{2^{-3}} = 2^{3-(-3)} = 2^6 = 64.$$

보통의 수로 확인해 봅시다. 분자는  $8+8=16$ , 분모는  $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ 이고,  $16 \div \frac{1}{4} = 16 \cdot 4 = 64$ 입니다.

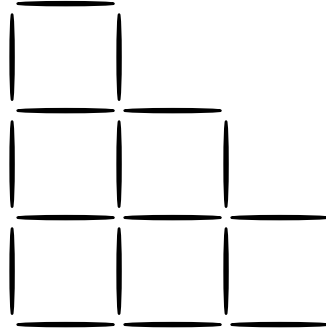
**주의.** 거듭제곱끼리 나눌 때는 지수를 뺍니다. 그리고  $-3$ 을 빼는 것은 3을 더하는 것입니다.  $2^{3-3} = 2^0 = 1$ 로 쓰는 것이 대표적인 실수입니다.

정답: (E) 64

## 3 대수

출처: 2015 AMC 10A 3번

앤은 그림과 같이 이쭈시개 18개를 사용하여 3단 계단을 만들었다. 5단 계단을 완성하려면 이쭈시개를 몇 개 더 추가해야 하는가?



(A) 9

(B) 18

(C) 20

(D) 22

(E) 24

**핵심 아이디어.** 계단을 한 단씩 쌓으면서 각 단계에 필요한 새 이쭈시개만 세어 봅시다.

새로 쌓는 단계는 바로 위의 줄보다 정사각형이 하나 더 많은 새 맨 아랫줄입니다.  $k$ 번째 줄에 필요한 이쭈시개를 세어 봅시다.

- 아랫변을 따라 놓는 가로 이쭈시개  $k$ 개
- 세로 이쭈시개  $k + 1$ 개(정사각형의 개수보다 하나 많습니다)
- 마지막 정사각형의 윗변에 놓는 가로 이쭈시개 1개. 위의 줄은 정사각형이 하나 적어서 처음  $k - 1$ 개의 윗변만 덮기 때문입니다.

따라서  $k$ 번째 줄에는 이쭈시개  $k + (k + 1) + 1 = 2k + 2$ 개가 추가됩니다.

그림과 맞는지 확인해 봅시다. 1, 2, 3번째 줄은 각각 4, 6, 8개를 추가하고,  $4 + 6 + 8 = 18$ 입니다. 맞습니다.

3단에서 5단으로 가려면 앤은 4번째 줄과 5번째 줄을 추가합니다.  $(2 \cdot 4 + 2) + (2 \cdot 5 + 2) = 10 + 12 = 22$ 입니다.

**주의.** 새 줄의 마지막 정사각형 위에 놓이는 이쭈시개 하나를 빠뜨리기 쉽습니다. 그러면 각 줄이  $2k + 1$ 개만 추가하는 것처럼 보여  $9 + 11 = 20$ , 즉 (C)가 나옵니다.

**정답: (D) 22**

## 4 대수

출처: 2008 AMC 10B 4번

어느 세미프로 야구 리그의 각 팀은 선수 21 명으로 이루어져 있다. 리그 규정에 따르면 선수 한 명은 적어도 \$15,000를 받아야 하고, 각 팀의 전체 선수 연봉의 합은 \$700,000를 넘을 수 없다. 선수 한 명이 받을 수 있는 연봉의 최댓값은 몇 달러인가?

- (A) 270,000      (B) 385,000      (C) 400,000      (D) 430,000      (E) 700,000

**핵심 아이디어.** 한 사람의 연봉을 최대한 크게 하려면 나머지 모든 사람의 연봉을 최대한 작게 해야 합니다.

다른 선수들은 모두 적어도 \$15,000를 받아야 하므로, 나머지 20명에게 정확히 그만큼씩 줍니다. 이들의 연봉을 모두 합하면 다음과 같습니다.

$$20 \cdot \$15,000 = \$300,000.$$

그러면 스타 선수에게 남는 금액은 최대  $\$700,000 - \$300,000 = \$400,000$ 입니다.

이 값은 실제로 가능합니다. \$15,000짜리 연봉 20개와 \$400,000짜리 연봉 하나를 더하면 정확히 \$700,000가 되고, 모든 선수가 최소 금액 이상을 받습니다. 따라서 최댓값은 400,000입니다.

**주의.** 스타 선수도 21명 중 한 명입니다. 21명 모두의 최소 금액을 빼면  $700,000 - 315,000 = 385,000$ , 즉 (B)가 나옵니다.

정답: (C) 400,000

## 5 정수론

출처: 2016 AMC 10A 5번

직육면체 모양의 상자의 세 모서리의 길이는 정수이고, 그 비는 1 : 3 : 4이다. 다음 중 이 상자의 부피가 될 수 있는 것은?

- (A) 48      (B) 56      (C) 64      (D) 96      (E) 144

**핵심 아이디어.** 가장 짧은 모서리의 길이를  $s$ 라 합시다. 그러면 가능한 부피는 모두  $12s^3$  꼴입니다.

가장 짧은 모서리가  $s$ 이면 세 모서리는  $s, 3s, 4s$ 이고,  $s$ 는 양의 정수입니다. 부피는 다음과 같습니다.

$$s \cdot 3s \cdot 4s = 12s^3.$$

따라서 부피는 12에 완전제곱수를 곱한 값이어야 합니다. 가능한 값을 작은 것부터 쓰면 다음과 같습니다.

$$12 \cdot 1^3 = 12, \quad 12 \cdot 2^3 = 96, \quad 12 \cdot 3^3 = 324.$$

선택지에 있는 것은 96뿐이며, 이것은 세 모서리가 2, 6, 8인 상자입니다.

**주의.** 12의 배수라는 것만으로는 부족합니다.  $48 = 12 \cdot 4$ 와  $144 = 12 \cdot 12$ 는 12의 배수이지만 4와 12는 세제곱수가 아니므로, 이런 부피를 갖는 상자는 없습니다.

**정답: (D) 96**

## 6 경우의 수와 확률

출처: 2011 AMC 10A 6번

집합  $A$ 의 원소는 20개이고, 집합  $B$ 의 원소는 15개이다.  $A$ 와  $B$ 의 합집합  $A \cup B$ 의 원소의 개수의 최솟값은?

- (A) 5                      (B) 15                      (C) 20                      (D) 35                      (E) 300

**핵심 아이디어.** 두 집합이 최대한 많이 겹칠 때 합집합이 가장 작아집니다.

합집합  $A \cup B$ 는  $A$ 의 원소를 모두 포함하므로,  $B$ 가 무엇이든 원소가 적어도 20개입니다.

정확히 20개일 수 있을까요? 그렇습니다.  $B$ 를  $A$ 의 원소 20개 중 15개로 고르면 됩니다. 그러면  $B$ 는 새로운 원소를 하나도 보태지 않으므로  $A \cup B = A$ 가 되고, 그 원소는 20개입니다.

따라서 가능한 가장 작은 원소의 개수는 20입니다. (일반적으로  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 35 - |A \cap B|$ 이고, 겹치는 부분  $|A \cap B|$ 는 최대 15입니다.)

**주의.** (D)의 35는 가능한 합집합 중 가장 큰 경우(겹치는 부분이 없을 때)입니다. 그리고 (A)의  $5 = 20 - 15$ 는 불가능합니다. 합집합은  $A$  자신보다 작을 수 없습니다.

**정답: (C) 20**

## 7 기하

출처: 2013 AMC 10B 7번

반지름이 1인 원 위에 여섯 개의 점이 같은 간격으로 놓여 있다. 이 중 세 점은 정삼각형도 이등변삼각형도 아닌 삼각형의 꼭짓점이다. 이 삼각형의 넓이는?

- (A)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       (B)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       (C) 1      (D)  $\sqrt{2}$       (E) 2

**핵심 아이디어.** 여섯 개의 점은 정육각형을 이룹니다. 가능한 삼각형을 꼭짓점끼리 원을 따라 몇 칸씩 떨어져 있는지에 따라 분류해 봅시다.

**1단계.** 원을 따라 한 바퀴 돌면, 세 꼭짓점은 여섯 칸을 합이 6인 세 간격으로 나눕니다. 가능한 경우는  $1 + 1 + 4$ ,  $2 + 2 + 2$ ,  $1 + 2 + 3$  뿐입니다.

**2단계.** 1칸 간격은 길이 1인 변(정육각형의 변)을, 2칸 또는 4칸 간격은 길이  $\sqrt{3}$ 인 변을 만들고, 3칸 간격은 지름이므로 길이가 2입니다. 따라서  $1 + 1 + 4$ 는 세 변이 1, 1,  $\sqrt{3}$ 인 이등변삼각형이고  $2 + 2 + 2$ 는 정삼각형입니다. 구하는 삼각형은  $1 + 2 + 3$ 이며, 세 변의 길이는 1,  $\sqrt{3}$ , 2입니다.

**3단계.** 길이가 2인 변은 지름이므로 그 대각은 직각입니다. 확인하면  $1^2 + (\sqrt{3})^2 = 4 = 2^2$ 입니다. 직각을 낀 두 변이 1과  $\sqrt{3}$ 이므로 넓이는 다음과 같습니다.

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**주의.** 직각을 낀 두 변은 **짧은** 두 변입니다. 1과 지름 2를 “밑변과 높이”로 쓰면  $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$ , 즉 (C)가 나옵니다.

**정답: (B)**  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

## 8 경우의 수와 확률

출처: 2004 AMC 10A 8번

토큰을 가지고 다음 규칙에 따라 게임을 한다. 각 라운드에서 토큰을 가장 많이 가진 참가자는 나머지 참가자들에게 토큰을 한 개씩 주고, 버리는 더미에도 토큰 한 개를 놓는다. 어떤 참가자의 토큰이 다 떨어지면 게임이 끝난다. 참가자  $A, B, C$ 는 처음에 각각 15개, 14개, 13개의 토큰을 가지고 시작한다. 이 게임은 모두 몇 라운드 동안 진행되는가?

- (A) 36                      (B) 37                      (C) 38                      (D) 39                      (E) 40

**핵심 아이디어.** 몇 라운드를 직접 진행해 보고 반복되는 주기를 찾아봅시다.

**1단계.** 토큰의 개수를  $(A, B, C)$ 로 나타냅니다. 각 라운드에서 선두는 토큰을 실제로 3개 잃고(2개는 나누어 주고 1개는 버림), 나머지 두 사람은 1개씩 얻습니다.

$$(15, 14, 13) \rightarrow (12, 15, 14) \rightarrow (13, 12, 15) \rightarrow (14, 13, 12).$$

3라운드가 지나면 모든 참가자의 토큰이 정확히 하나씩 줄고, 같은 순서가 다시 나타납니다.

**2단계.** 따라서 3라운드마다  $(n+2, n+1, n)$ 이  $(n+1, n, n-1)$ 이 됩니다.  $n = 13$ 에서 시작하면  $3 \cdot 12 = 36$ 라운드 후 토큰의 개수는  $(3, 2, 1)$ 이고, 아직 아무도 토큰이 떨어지지 않았습니다.

**3단계.** 37번째 라운드에서는  $A$ 의 토큰이 가장 많으므로 3개를 내놓아야 하고, 토큰의 개수는  $(0, 3, 2)$ 가 됩니다. 참가자  $A$ 의 토큰이 다 떨어졌으므로 게임은 37라운드 만에 끝납니다.

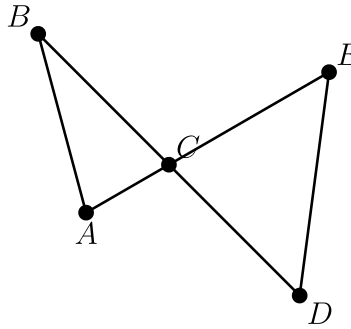
**주의.** “ $C$ 는 3라운드마다 토큰을 하나씩 잃으니  $C$ 는  $13 \cdot 3 = 39$ 라운드를 버틴다”고 생각하면 (D)를 고르게 됩니다. 이는 선두의 토큰이 한 번에 3개씩 줄어 먼저 0이 될 수 있다는 점을 놓친 것입니다.

**정답: (B) 37**

9 기하

출처: 2009 AMC 10B 9번

그림과 같이 선분  $BD$ 와  $AE$ 가 점  $C$ 에서 만나고,  $AB = BC = CD = CE$ ,  $\angle A = \frac{5}{2}\angle B$ 이다.  $\angle D$ 의 크기는 몇 도인가?



- (A) 52.5      (B) 55      (C) 57.5      (D) 60      (E) 62.5

**핵심 아이디어.** 이 그림은 두 이등변삼각형이  $C$ 에서 맞붙은 모양입니다. 왼쪽 삼각형을 먼저 풀고,  $C$ 에서의 각을 맞꼭지각을 이용해 반대쪽으로 옮깁니다.

**1단계.**  $\triangle ABC$ 에서  $AB = BC$ 이므로, 길이가 같은 두 변의 대각끼리 크기가 같습니다. 즉  $\angle A = \angle ACB$ 입니다.  $\angle B = x$ 라 하면  $\angle A = \angle ACB = \frac{5}{2}x$ 이므로 다음이 성립합니다.

$$\frac{5}{2}x + x + \frac{5}{2}x = 180^\circ \implies 6x = 180^\circ \implies x = 30^\circ.$$

따라서  $\angle ACB = \frac{5}{2} \cdot 30^\circ = 75^\circ$ 입니다.

**2단계.**  $\angle DCE$ 와  $\angle ACB$ 는 맞꼭지각이므로  $\angle DCE = 75^\circ$ 입니다.

**3단계.**  $\triangle CDE$ 에서  $CD = CE$ 이므로  $\angle D = \angle E$ 입니다. 따라서  $2\angle D + 75^\circ = 180^\circ$ 이고,  $\angle D = 52.5^\circ$ 입니다.

**주의.** 크기가 같은 각은 길이가 같은 변의 **맞은편**에 있습니다.  $AB = BC$ 이므로 크기가 같은 각은  $B$ 가 아니라  $A$ 와  $C$ 에 있는 각입니다.  $\angle B = \angle C$ 로 잘못 놓으면  $\angle D = 70^\circ$ 가 나오는데, 이것은 선택지에 없습니다.

정답: (A) 52.5

## 10 대수

출처: 2011 AMC 10B 10번

수의 집합  $\{1, 10, 10^2, 10^3, \dots, 10^{10}\}$ 을 생각하자. 이 집합에서 나머지 열 개의 원소의 합에 대한 가장 큰 원소의 비는 다음 중 어느 정수에 가장 가까운가?

- (A) 1                      (B) 9                      (C) 10                      (D) 11                      (E) 101

**핵심 아이디어.** 10의 작은 거듭제곱들의 합을 1이 늘어선 수로 쓰면 비를 쉽게 어림할 수 있습니다.

나머지 열 개의 원소는  $1, 10, 10^2, \dots, 10^9$ 이고, 그 합은 다음과 같습니다.

$$S = 1 + 10 + 100 + \dots + 1,000,000,000 = 1,111,111,111.$$

이제  $10^{10} = 10,000,000,000$ 과 비교해 봅시다.  $9 \cdot 1,111,111,111 = 9,999,999,999$ 는  $10^{10}$ 보다 겨우 1 작으므로

$$\frac{10^{10}}{S} = \frac{9,999,999,999 + 1}{1,111,111,111} = 9 + \frac{1}{1,111,111,111},$$

이고, 이는 9보다 아주 조금 큰 값입니다. 가장 가까운 정수는 9입니다.

**주의.**  $10^{10}$ 을 그다음으로 큰 원소  $10^9$ 하고만 비교하면 10, 즉 (C)가 나옵니다. 더 작은 항들이 합을 약 11% 늘려 주기 때문에 비가 9로 내려갑니다.

**정답: (B) 9**

## 11 경우의 수와 확률

출처: 2015 AMC 10B 11번

100보다 작은 양의 정수 중 각 자리의 숫자가 모두 소수인 수들 가운데에서 하나를 임의로 고른다. 고른 수가 소수일 확률은?

- (A)  $\frac{8}{99}$                       (B)  $\frac{2}{5}$                       (C)  $\frac{9}{20}$                       (D)  $\frac{1}{2}$                       (E)  $\frac{9}{16}$

**핵심 아이디어.** 수는 모든 자리의 숫자가 소수인 정수들 중에서만 고르므로, 먼저 그 (작은) 표본공간을 나열한 다음 그 안에서 소수를 셉니다. “각 자리의 숫자가 모두 소수”라는 조건이 후보를 크게 줄여 줍니다. 소수인 숫자는 네 개뿐이기 때문입니다.

**1단계: 표본공간.** 소수인 숫자는 2, 3, 5, 7입니다. 100보다 작은 수는 한 자리 수이거나 두 자리 수입니다.

- 한 자리 수: 2, 3, 5, 7로 4개입니다.
- 두 자리 수: 십의 자리 숫자로 4가지, 일의 자리 숫자로 4가지를 고를 수 있으므로  $4 \cdot 4 = 16$ 개입니다.

모두  $4 + 16 = 20$ 개이며, 각각이 뽑힐 가능성은 같습니다.

**2단계: 소수 찾기.** 한 자리 수 2, 3, 5, 7은 네 개 모두 소수입니다.

일의 자리 숫자가 2인 두 자리 수는 짝수이고, 5인 수는 5의 배수이므로 둘 다 소수가 아닙니다. 남은 것은 일의 자리 숫자가 3 또는 7인 여덟 개의 수입니다.

$$23, 33, 53, 73, \quad 27, 37, 57, 77.$$

이 중  $33 = 3 \cdot 11$ ,  $27 = 3 \cdot 9$ ,  $57 = 3 \cdot 19$ ,  $77 = 7 \cdot 11$ 은 합성수이고, 23, 53, 73, 37은 소수입니다.

**3단계.** 따라서 20개 중  $4 + 4 = 8$ 개가 소수이고, 확률은 다음과 같습니다.

$$\frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$$

**주의.** 수를 1, ..., 99 전체에서 고르는 것이 아닙니다. 소수 8개를 99로 나누면  $\frac{8}{99}$ , 즉 (A)가 나옵니다.

**주의.** 57은 소수처럼 보이지만  $3 \cdot 19$ 입니다. 이것을 소수로 세면  $\frac{9}{20}$ , 즉 (C)가 나옵니다.

**정답: (B)**  $\frac{2}{5}$

## 12 대수

출처: 2017 AMC 10B 12번

엘머의 새 차는 예전 차보다 연비(리터당 킬로미터로 켄 값)가 50% 더 좋다. 그러나 새 차는 디젤 연료를 쓰는데, 디젤은 예전 차가 쓰는 휘발유보다 리터당 가격이 20% 더 비싸다. 엘머가 장거리 여행에서 예전 차 대신 새 차를 이용하면 비용을 몇 퍼센트 절약하게 되는가?

- (A) 20%                      (B)  $26\frac{2}{3}\%$                       (C)  $27\frac{7}{9}\%$                       (D)  $33\frac{1}{3}\%$                       (E)  $41\frac{2}{3}\%$

**핵심 아이디어.** 이런 퍼센트 변화는 더해지는 것이 아니라 곱해집니다. 실제 수치가 주어지지 않았으므로 편리한 값을 정하고, 두 차로 같은 거리를 여행할 때의 비용을 계산해 봅시다.

**1단계: 수치 정하기.** 예전 차가 리터당 10 km를 가고 휘발유가 리터당 \$1라고 합시다. 그러면 새 차는 50% 더 가서 리터당 15 km를 가고, 디젤은 20% 더 비싸서 리터당 \$1.20입니다. 여행 거리는 나누어떨어지도록 150 km로 잡습니다.

**2단계: 각 차의 비용.** 예전 차:  $150 \div 10 = 15$  리터가 필요하고, 비용은  $15 \cdot \$1 = \$15$ 입니다. 새 차:  $150 \div 15 = 10$  리터가 필요하고, 비용은  $10 \cdot \$1.20 = \$12$ 입니다.

**3단계.** 엘머는 \$15 중  $\$15 - \$12 = \$3$ 를 절약하므로, 절약하는 비율은  $\frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 20\%$ 입니다.

일반적으로, 새 차는 연료를  $\frac{1}{1.5} = \frac{2}{3}$ 만큼만 쓰고 가격은 1.2배이므로 비용은  $\frac{2}{3} \cdot 1.2 = 0.8$ 배가 됩니다. 여행 거리나 가격을 어떻게 정하든 20% 절약입니다.

**주의.** 디젤이 더 비싸다는 점을 잊으면, 새 차는 연료를  $\frac{2}{3}$ 만 쓰므로  $33\frac{1}{3}\%$  절약, 즉 (D)가 나옵니다.

**주의.** “50% 더 좋고 20% 더 비싸니 30%”는 퍼센트를 결합하는 올바른 방법이 아닙니다(게다가 30%는 선택지에 없습니다).

**정답: (A)** 20%

### 13 대수

출처: 2010 AMC 10A 13번

앤젤리나는 평균 시속 80 km로 운전한 뒤 주유를 위해 20분 동안 멈췄다. 멈춘 뒤에는 평균 시속 100 km로 운전하였다. 정차 시간을 포함한 전체 여행 시간 3시간 동안 그녀가 운전한 거리는 모두 250 km이다. 정차하기 전에 운전한 시간  $t$ (단위: 시간)를 구하는 데 쓸 수 있는 방정식은?

- (A)  $80t + 100\left(\frac{8}{3} - t\right) = 250$       (B)  $80t = 250$       (C)  $100t = 250$   
 (D)  $90t = 250$       (E)  $80\left(\frac{8}{3} - t\right) + 100t = 250$

**핵심 아이디어.** 여행의 각 구간마다 거리 = 속력  $\times$  시간이고, 두 구간의 거리의 합은 250입니다. 유일하게 조심할 점은 3시간 안에 운전하지 **않은** 20분이 포함되어 있다는 것입니다.

**1단계: 운전 시간.** 정차 시간은 20분 =  $\frac{1}{3}$  시간입니다. 따라서 실제로 운전한 시간은 모두 다음과 같습니다.

$$3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3} \text{ 시간.}$$

**2단계: 각 구간.** 정차 전에는 시속 80 km로  $t$ 시간 동안 운전하여  $80t$  km를 갑니다. 정차 후에는 남은 운전 시간인  $\frac{8}{3} - t$ 시간 동안 시속 100 km로 운전하여  $100\left(\frac{8}{3} - t\right)$  km를 갑니다.

**3단계.** 두 구간의 거리를 합하면 250 km입니다.

$$80t + 100\left(\frac{8}{3} - t\right) = 250.$$

이것이 (A)입니다. (이 식을 풀면  $80t + \frac{800}{3} - 100t = 250$  이므로  $20t = \frac{50}{3}$  이고  $t = \frac{5}{6}$  시간, 즉 50분입니다. 확인:  $80 \cdot \frac{5}{6} + 100 \cdot \frac{11}{6} = \frac{400}{6} + \frac{1100}{6} = 250$ .)

**주의.** (E)는 두 속력이 뒤바뀌어 있습니다. 정차 **후**의 시간에 시속 80 km를 배정한 것입니다. 어느 속력이  $t$ 와 짝을 이루는지 잘 읽어야 합니다.  $t$ 는 정차 **전**의 시간입니다.

**주의.** 20분의 정차 시간을 빼는 것을 잊으면  $80t + 100(3 - t) = 250$  이 되는데, 이 식은 선택지에 없습니다. 이렇게 썼다면  $\frac{8}{3}$ 을 찾아봅시다.

**정답: (A)**  $80t + 100\left(\frac{8}{3} - t\right) = 250$

## 14 기하

출처: 2016 AMC 10B 14번

변이 좌표축에 평행하고 꼭짓점의 좌표가 모두 정수인 정사각형 중에서, 직선  $y = \pi x$ , 직선  $y = -0.1$ , 직선  $x = 5.1$ 로 둘러싸인 영역 안에 완전히 들어가는 것은 몇 개인가?

- (A) 30                      (B) 41                      (C) 45                      (D) 50                      (E) 57

**핵심 아이디어.** 정사각형을 한 변의 길이별로 나누어 하나씩 세어 봅시다. 이상해 보이는 수  $-0.1$ ,  $5.1$ ,  $\pi$ 는 어떤 격자점이 허용되는지 정확히 알려 주기 위한 것입니다. 즉  $y \geq 0$ ,  $x \leq 5$ 이고,  $\pi \approx 3.14$  이므로 직선 아래에서  $x = a$ 일 때의 높이는 최대  $3a$ 입니다.

**1단계: 중요한 꼭짓점.** 영역은 삼각형입니다.  $y = -0.1$ 의 위쪽,  $x = 5.1$ 의 왼쪽, 그리고 오른쪽 위로 올라가는 직선  $y = \pi x$ 의 아래쪽입니다. 왼쪽 아래 꼭짓점이  $(a, b)$ 이고 한 변의 길이가  $s$ 인 정사각형은 네 꼭짓점이 모두 영역 안에 있어야 합니다.

- 아랫변을 위해서는  $b \geq 0$ 이어야 합니다.
- 오른쪽 변을 위해서는  $a + s \leq 5$ 여야 합니다.
- 직선이 오른쪽 위로 올라가므로, 직선에 가장 가까운 꼭짓점은 **왼쪽 위** 꼭짓점  $(a, b + s)$ 입니다. 이 점은  $b + s < \pi a$ 를 만족해야 합니다.

**2단계: 정수  $x$ 에서의 직선.**  $x = 1, 2, 3, 4$ 에서 직선의 높이는  $\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi \approx 3.14, 6.28, 9.42, 12.57$ 입니다. 각 값은  $3a$ 와  $3a + 1$  사이에 있으므로, 높이가 정수일 때 조건  $b + s < \pi a$ 는 정확히  $b + s \leq 3a$ 와 같습니다. ( $a = 0$ 에서는 직선의 높이가 0이므로, 왼쪽 변이  $y$ 축 위에 있는 정사각형은 있을 수 없습니다.)

**3단계: 세기.** 왼쪽 변의 위치  $a$ 마다 아랫변의 높이  $b$ 는  $0, 1, \dots, 3a - s$ 가 될 수 있으므로  $3a - s + 1$  가지입니다.

- $s = 1, a = 1, 2, 3, 4$ :  $3 + 6 + 9 + 12 = 30$ .
- $s = 2, a = 1, 2, 3$ :  $2 + 5 + 8 = 15$ .
- $s = 3, a = 1, 2$ :  $1 + 4 = 5$ .
- $s = 4$ : 가로 방향으로  $a = 1$ 만 들어갈 수 있지만, 그러면 윗변의 높이가  $4 > 3$ 으로 너무 높습니다. 없습니다.

모두 합하면  $30 + 15 + 5 = 50$ 입니다.

**주의.** 단위 정사각형만 세면 30, 즉 (A)가 나옵니다. 문제는 모든 크기의 정사각형을 묻고 있습니다.

**정답: (D) 50**

## 15 대수

출처: 2008 AMC 10A 15번

어제 한은 이언보다 1시간 더 오래, 이언보다 평균 시속 5마일 더 빠르게 운전하였다. 잰은 이언보다 2시간 더 오래, 이언보다 평균 시속 10마일 더 빠르게 운전하였다. 한은 이언보다 70마일 더 운전하였다. 잰은 이언보다 몇 마일 더 운전하였는가?

- (A) 120                      (B) 130                      (C) 140                      (D) 150                      (E) 160

**핵심 아이디어.** 모든 것이 이언을 기준으로 주어져 있으므로, 이언의 속력을  $r$ , 시간을  $t$ 라 합시다. 미지수는 두 개인데 식은 하나뿐입니다. 이는  $r$ 과  $t$ 를 각각 구할 필요 없이 둘을 조합한 값만 있으면 된다는 신호입니다.

**1단계: 한.** 이언은  $rt$ 마일을 운전했습니다. 한은 시속  $r+5$ 마일로  $t+1$ 시간 동안 운전했으므로, 더 운전한 거리는 다음과 같습니다.

$$(r+5)(t+1) - rt = rt + r + 5t + 5 - rt = r + 5t + 5.$$

이 값이 70이므로  $r + 5t = 65$ 입니다.

**2단계: 잰.** 잰은 시속  $r+10$ 마일로  $t+2$ 시간 동안 운전했으므로, 더 운전한 거리는 다음과 같습니다.

$$(r+10)(t+2) - rt = 2r + 10t + 20 = 2(r+5t) + 20.$$

**3단계.**  $r + 5t = 65$ 를 대입하면, 잰은 이언보다  $2 \cdot 65 + 20 = 150$ 마일 더 운전했습니다.

수치로 확인해 봅시다. 이언이 시속 40마일로 5시간 동안 운전했다면(200마일), 한은 시속 45마일로 6시간(270마일, 70마일 더), 잰은 시속 50마일로 7시간(350마일, 150마일 더) 운전한 것입니다.

**주의.** “잭의 추가분은 한의 두 배이니 70의 두 배”라고 하면 140, 즉 (C)가 나옵니다. 추가 시간과 추가 속력을 모두 두 배로 하면 “추가분  $\times$  추가분” 항은  $10 \cdot 2 = 20$ 이 되어, 한의  $5 \cdot 1 = 5$ 의 두 배가 아니라 네 배가 됩니다.

**정답: (D) 150**

## 16 대수

출처: 2009 AMC 10A 16번

실수  $a, b, c, d$ 가  $|a - b| = 2$ ,  $|b - c| = 3$ ,  $|c - d| = 4$ 를 만족한다.  $|a - d|$ 의 값이 될 수 있는 모든 수의 합은?

- (A) 9                      (B) 12                      (C) 15                      (D) 18                      (E) 24

**핵심 아이디어.** 주어진 세 차는 사슬처럼 이어집니다. 가운데 문자들이 지워지므로  $a - b, b - c, c - d$ 를 더하면  $a - d$ 가 됩니다. 각 절댓값은 부호 하나를 감추고 있을 뿐이므로, 부호를 고르는 경우를 나열해 봅시다.

**1단계.** 다음과 같이 씁니다.

$$a - d = (a - b) + (b - c) + (c - d).$$

조건에서  $a - b = \pm 2$ ,  $b - c = \pm 3$ ,  $c - d = \pm 4$ 이고, 각 부호는 자유롭게 고를 수 있습니다(아무  $a$ 나 잡은 뒤  $b, c, d$ 를 차례로 정하면 됩니다). 따라서  $a - d = \pm 2 \pm 3 \pm 4$ 입니다.

**2단계.** 세 부호를 모두 바꾸면  $a - d$ 의 부호만 바뀌므로  $|a - d|$ 는 변하지 않습니다. 따라서 4에는  $+$ 를 붙인 채로 두고, 2와 3의 부호 네 가지를 시도해 봅시다.

$$2 + 3 + 4 = 9, \quad -2 + 3 + 4 = 5, \quad 2 - 3 + 4 = 3, \quad -2 - 3 + 4 = -1.$$

$|a - d|$ 의 가능한 값은 9, 5, 3, 1입니다.

**3단계.** 이들의 합은  $9 + 5 + 3 + 1 = 18$ 입니다.

예를 들어  $a = 0, b = 2, c = -1, d = 3$ 은 세 조건을 모두 만족하며  $|a - d| = 3$ 입니다. 비슷하게 고르면 나머지 세 값도 나옵니다.

**주의.** “가능한 모든 값”을 “가장 큰 값”으로 잘못 읽으면  $2 + 3 + 4 = 9$ , 즉 (A)를 답하게 됩니다. 문제는 단계들이 부분적으로 상쇄되는 작은 값까지 포함하여, 나올 수 있는 모든 값을 묻고 있습니다.

**정답: (D) 18**

## 17 정수론

출처: 2012 AMC 10A 17번

서로소인 두 양의 정수  $a, b$ 가  $a > b > 0$ 이고 다음 식을 만족한다.

$$\frac{a^3 - b^3}{(a - b)^3} = \frac{73}{3}.$$

$a - b$ 의 값은?

- (A) 1                      (B) 2                      (C) 3                      (D) 4                      (E) 5

**핵심 아이디어.** 분자  $a^3 - b^3$ 은 인수  $a - b$ 를 가지고, 이를 약분하고 남는  $a^2 + ab + b^2$ 을  $(a - b)^2$ 과 비교해야 합니다. 문제가  $a - b$  자체를 묻고 있으므로 모든 것을  $a - b$ 와  $ab$ 로 나타내 봅시다.

**1단계.** 세제곱의 차를 인수분해하면  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ 입니다. 인수  $a - b$  하나를 약분하면 ( $a > b$ 이므로 가능합니다) 다음을 얻습니다.

$$\frac{a^2 + ab + b^2}{(a - b)^2} = \frac{73}{3}.$$

**2단계.**  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 이므로 분자는  $a^2 + ab + b^2 = (a - b)^2 + 3ab$ 입니다. 이를 대입하면 다음과 같습니다.

$$1 + \frac{3ab}{(a - b)^2} = \frac{73}{3}, \quad \text{이므로} \quad \frac{3ab}{(a - b)^2} = \frac{70}{3},$$

즉  $9ab = 70(a - b)^2$ 입니다.

**3단계.** 이제 “서로소” 조건을 이용합니다. 어떤 소수  $p$ 가  $a - b$ 와  $ab$ 를 모두 나눈다면, 그 소수는  $a$ 나  $b$ 를 나누고,  $(a - b)$ 를 통해 나머지 하나도 나누게 되는데, 이는 불가능합니다. 따라서  $(a - b)^2$ 과  $ab$ 는 공통인 인수가 없고, 이것이  $9ab$ 를 나누므로 9를 나누어야 합니다. 그러므로  $a - b = 1$  또는  $a - b = 3$ 입니다.

**4단계.**  $a - b = 1$ 이면  $9ab = 70$ 이 되어 정수해가 없습니다.  $a - b = 3$ 이면  $9ab = 630$ 이므로  $ab = 70$ 입니다.  $a = b + 3$ 을 대입하면  $b^2 + 3b - 70 = 0$ , 즉  $(b + 10)(b - 7) = 0$ 이므로  $b = 7$ ,  $a = 10$ 입니다.

확인:  $a^2 + ab + b^2 = 100 + 70 + 49 = 219$ ,  $(a - b)^2 = 9$ 이고  $\frac{219}{9} = \frac{73}{3}$ 입니다. 따라서  $a - b = 3$ 입니다.

**다른 풀이.** 양변을 교차하여 곱하면  $3(a^2 + ab + b^2) = 73(a^2 - 2ab + b^2)$ 에서  $70a^2 - 149ab + 70b^2 = 0$ 이고, 이 식은  $(10a - 7b)(7a - 10b) = 0$ 으로 인수분해됩니다.  $a > b$ 이므로  $\frac{a}{b} = \frac{10}{7}$ 이고, 서로소 조건에 의해  $a = 10$ ,  $b = 7$ 입니다.

**정답: (C) 3**

## 18 경우의 수와 확률

출처: 2010 AMC 10B 18번

집합  $\{1, 2, 3, \dots, 2010\}$  에서 양의 정수  $a, b, c$  를 중복을 허락하여 서로 독립적으로 임의로 고른다.

$abc + ab + a$  가 3으로 나누어떨어질 확률은?

- (A)  $\frac{1}{3}$                       (B)  $\frac{29}{81}$                       (C)  $\frac{31}{81}$                       (D)  $\frac{11}{27}$                       (E)  $\frac{13}{27}$

**핵심 아이디어.** 3으로 나누어떨어지는지는 3으로 나눈 나머지에만 달려 있고,  $2010 = 3 \cdot 670$  이므로 집합은 세 나머지 부류로 똑같이 나뉩니다. 모든 항에  $a$  가 들어 있으므로 이를 묶어 내고, “ $a$  가 3의 배수인 경우”와 “그렇지 않은 경우”로 나누어 봅시다.

**1단계.** 2010은 3의 배수이므로, 집합에서 나머지가 0, 1, 2인 수는 각각 정확히 670개입니다. 따라서  $a, b, c$  의 나머지는 서로 독립이고, 각각  $\frac{1}{3}$ 의 확률로 0, 1, 2 중 하나입니다.

**2단계.** 인수분해하면  $abc + ab + a = a(bc + b + 1)$  입니다. 3은 소수이므로, 이 곱은  $3 \mid a$  또는  $3 \mid bc + b + 1$  일 때, 그리고 그때에만 3으로 나누어떨어집니다.

**3단계.**  $3 \mid a$  인 경우: 확률은  $\frac{1}{3}$  이고, 이때 식은  $b$ 와  $c$ 가 무엇이든 3으로 나누어떨어집니다.

**4단계.**  $3 \nmid a$  인 경우(확률  $\frac{2}{3}$ ):  $bc + b + 1 = b(c + 1) + 1 \equiv 0$ , 즉  $b(c + 1) \equiv 2 \pmod{3}$  이어야 합니다. 나머지끼리의 곱이 2가 되는 것은  $1 \cdot 2$  또는  $2 \cdot 1$  뿐입니다.

- $b \equiv 1$  이고  $c + 1 \equiv 2$ , 즉  $c \equiv 1$ ;
- $b \equiv 2$  이고  $c + 1 \equiv 1$ , 즉  $c \equiv 0$ .

나머지의 각 쌍이 나올 확률은  $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$  이므로, 이 경우에 조건을 만족할 확률은  $\frac{2}{9}$  입니다.

**5단계.** 두 경우를 합치면 다음과 같습니다.

$$\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{9} = \frac{9}{27} + \frac{4}{27} = \frac{13}{27}.$$

나머지의 순서쌍  $(a, b, c)$  27가지를 모두 직접 확인해 보면 정확히 13가지가 조건을 만족합니다.

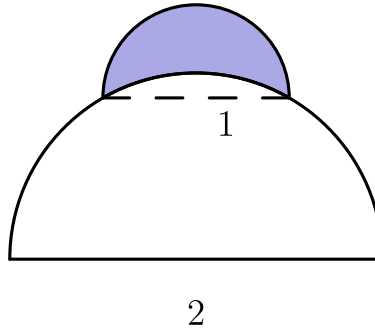
**주의.** 당연한 경우인 “ $a$ 가 3의 배수”에서 멈추면  $\frac{1}{3}$ , 즉 (A)가 나옵니다.  $a$ 가 그렇지 않을 때에도 인수  $bc + b + 1$ 이 3의 배수가 될 수 있습니다.

정답: (E)  $\frac{13}{27}$

19 기하

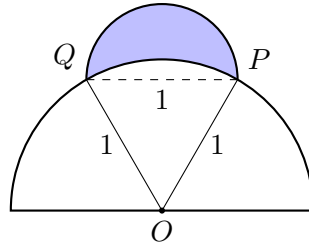
출처: 2003 AMC 10A 19번

그림과 같이 지름이 1인 반원이 지름이 2인 반원의 위쪽에 놓여 있다. 작은 반원의 내부이면서 큰 반원의 외부인 색칠된 부분을 초승달꼴이라 한다. 이 초승달꼴의 넓이를 구하시오.



- (A)  $\frac{1}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}$       (B)  $\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{12}\pi$       (C)  $\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{24}\pi$       (D)  $\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{24}\pi$       (E)  $\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{12}\pi$

**핵심 아이디어.** 초승달꼴은 두 호로 둘러싸여 있으므로, 그 넓이는 둥근 도형들의 넓이의 차로 구합니다. 작은 반원 전체에서, 큰 원이 그 안으로 비집고 들어온 얇은 조각을 빼 봅시다. 그 조각은 활꼴이고, 활꼴의 넓이는 “부채꼴 빼기 삼각형”으로 구합니다. 그러니 현의 양 끝을 큰 원의 중심과 이어 봅시다.



**1단계.** 큰 반원(반지름 1)의 중심을  $O$ 라 하고, 작은 반원의 지름의 양 끝을  $P, Q$ 라 하면  $PQ = 1$ 입니다.  $P$ 와  $Q$ 는 모두 큰 원 위에 있으므로  $OP = OQ = 1$ 입니다. 따라서 삼각형  $OPQ$ 는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이고, 넓이는  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 이며  $\angle POQ = 60^\circ$ 입니다.

**2단계.** 큰 원의 내부 중 현  $PQ$ 의 위쪽 부분은 활꼴입니다.

$$\text{활꼴} = \text{부채꼴 } POQ - \triangle OPQ = \frac{60}{360}\pi(1)^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

**3단계.** 작은 반원의 반지름은  $\frac{1}{2}$  이므로 넓이는  $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8}$ 입니다. 초승달꼴은 이 반원에서 활꼴을 뺀 것입니다.

$$\frac{\pi}{8} - \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\pi}{24} - \frac{4\pi}{24} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{24}\pi.$$

이 값은 약 0.302로, 넓이가  $\frac{\pi}{8} \approx 0.393$ 인 반원 안의 얇은 조각으로서 적절한 크기입니다.

**주의.** 반원 대신 지름이 1인 원 전체의 넓이  $\frac{\pi}{4}$ 를 쓰면  $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{12}\pi$ , 즉 (E)가 나옵니다. 그림에는 그 원의 절반만 그려져 있습니다.

**정답: (C)**  $\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{24}\pi$

## 20 기하

출처: 2006 AMC 10B 20번

직사각형  $ABCD$ 에서  $A = (6, -22)$ ,  $B = (2006, 178)$  이고, 어떤 정수  $y$ 에 대하여  $D = (8, y)$  이다. 직사각형  $ABCD$ 의 넓이는?

- (A) 4000                      (B) 4040                      (C) 4400                      (D) 40,000                      (E) 40,400

**핵심 아이디어.** 직사각형의 한 꼭짓점에서 만나는 두 변은 서로 수직입니다.  $A$ 와  $B$ 는 알고 있고  $D$ 는 좌표 하나만 모르며,  $AB$ 와  $AD$ 는  $A$ 에서 만납니다. 따라서  $A$ 에서의 직각이 바로  $y$ 를 구하는 데 필요한 식 하나가 됩니다. 그다음 넓이 =  $AB \cdot AD$ 입니다.

**1단계.**  $\overline{AB}$ 의 기울기는 다음과 같습니다.

$$\frac{178 - (-22)}{2006 - 6} = \frac{200}{2000} = \frac{1}{10}.$$

$\overline{AD} \perp \overline{AB}$ 이므로  $\overline{AD}$ 의 기울기는 이 값의 역수에 음의 부호를 붙인  $-10$ 입니다.

**2단계.**  $A = (6, -22)$ 와  $D = (8, y)$ 를 이용하면 다음과 같습니다.

$$\frac{y - (-22)}{8 - 6} = -10 \implies y + 22 = -20 \implies y = -42.$$

따라서  $D = (8, -42)$ 입니다.

**3단계.** 두 점 사이의 거리 공식으로 두 변의 길이를 구합니다.

$$AB = \sqrt{2000^2 + 200^2} = \sqrt{200^2(10^2 + 1)} = 200\sqrt{101},$$

$$AD = \sqrt{2^2 + (-20)^2} = \sqrt{404} = \sqrt{2^2 \cdot 101} = 2\sqrt{101}.$$

**4단계.** 넓이 =  $AB \cdot AD = 200\sqrt{101} \cdot 2\sqrt{101} = 400 \cdot 101 = 40,400$ 입니다.

**주의.** 직사각형이 아주 조금만 기울어져 있으므로 두 변을 “약 2000”과 “약 20”으로 보고  $2000 \cdot 20 = 40,000$ , 즉 (D)라고 답하고 싶어집니다. 정확한 길이는  $200\sqrt{101}$ 과  $2\sqrt{101}$ 이므로 넓이는  $400 \cdot 101$ 이 아니라  $400 \cdot 101$ 입니다.

**다른 풀이.**  $A$ 에서 나가는 두 변을 벡터로 나타냅니다.  $\overrightarrow{AB} = (2000, 200)$ ,  $\overrightarrow{AD} = (2, y + 22)$ 입니다. 두 벡터가 수직이므로 내적이 0입니다. 즉  $4000 + 200(y + 22) = 0$ 이므로  $y + 22 = -20$ 입니다.  $(2000, 200)$ 과

$(2, -20)$ 이 만드는 평행사변형(여기서는 직사각형)의 넓이는  $|2000 \cdot (-20) - 200 \cdot 2| = |-40,000 - 400| = 40,400$ 입니다.

**정답: (E)** 40,400

## 21 기하

출처: 2007 AMC 10A 21번

겉넓이가 24제곱미터인 정육면체에 구가 내접한다. 다시 이 구에 두 번째 정육면체가 내접한다. 안쪽 정육면체의 겉넓이는 몇 제곱미터인가?

- (A) 3                      (B) 6                      (C) 8                      (D) 9                      (E) 12

**핵심 아이디어.** 모든 것은 구의 **지름**으로 연결됩니다. “구가 정육면체에 내접한다”는 것은 구가 정육면체의 면에 접한다는 뜻이므로, 구의 지름은 바깥 정육면체의 모서리의 길이입니다. “정육면체가 구에 내접한다”는 것은 안쪽 정육면체의 꼭짓점이 구 위에 있다는 뜻이므로, 구의 지름은 안쪽 정육면체의 대각선의 길이입니다. 내접이 두 번 나오고 그때마다 정육면체의 서로 다른 길이가 쓰이므로, 매번 어느 길이인지 분명히 해야 합니다.

**1단계: 바깥 정육면체.** 정육면체는 합동인 정사각형 면 6개로 이루어져 있으므로, 각 면의 넓이는  $24 \div 6 = 4$ 이고 모서리의 길이는  $\sqrt{4} = 2$ 미터입니다.

**2단계: 구.** 내접하는 구는 여섯 면 모두에 접하고, 특히 서로 2미터 떨어진 마주 보는 두 면에 접합니다. 따라서 구의 지름은 2입니다.

**3단계: 안쪽 정육면체.** 안쪽 정육면체의 중심은 구의 중심이고, 8개의 꼭짓점이 모두 구 위에 있습니다. 마주 보는 두 꼭짓점(대각선의 양 끝)은 중심에 대하여 대칭이므로, 이 둘을 잇는 선분은 구의 지름입니다. 따라서 안쪽 정육면체의 대각선의 길이는 2입니다.

안쪽 정육면체의 모서리의 길이를  $s$ 라 하면 면의 대각선의 길이는  $s\sqrt{2}$ 이고, 정육면체의 대각선은 두 직각 변이  $s$ 와  $s\sqrt{2}$ 인 직각삼각형의 빗변이므로 다음이 성립합니다.

$$\sqrt{s^2 + 2s^2} = s\sqrt{3} = 2, \quad \text{따라서} \quad s^2 = \frac{4}{3}.$$

**4단계: 겉넓이.**  $6s^2 = 6 \cdot \frac{4}{3} = 8$ 제곱미터입니다.

**주의.** 구의 지름을 안쪽 정육면체의 **면의** 대각선과 같다고 놓으면  $s\sqrt{2} = 2$ ,  $s^2 = 2$ 이고 겉넓이는 12, 즉 (E)가 나옵니다. 구에 닿는 두 꼭짓점은 한 면에서가 아니라 정육면체 전체에서 마주 보는 꼭짓점입니다.

**다른 풀이.** 두 정육면체를 직접 비교해 봅시다. 바깥 정육면체의 대각선은  $2\sqrt{3}$ , 안쪽 정육면체의 대각선은 2이므로, 안쪽 정육면체는 바깥 정육면체를  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 배로 축소한 것입니다. 넓이는 그 제곱인  $\frac{1}{3}$ 배가 되므로

$$24 \cdot \frac{1}{3} = 8 \text{입니다.}$$

정답: (C) 8

## 22 정수론

출처: 2005 AMC 10A 22번

$S$ 는 4의 양의 배수 중 가장 작은 것부터 2005개를 모은 집합이고,  $T$ 는 6의 양의 배수 중 가장 작은 것부터 2005개를 모은 집합이다.  $S$ 와  $T$ 에 공통으로 속하는 원소는 몇 개인가?

- (A) 166                      (B) 333                      (C) 500                      (D) 668                      (E) 1001

**핵심 아이디어.**  $S$ 와  $T$ 에 공통인 수는 4와 6의 공배수, 즉 두 수의 최소공배수의 배수여야 합니다. 그 밖에 중요한 것은 각 목록이 어디서 **끝나는지**뿐입니다. 두 집합 모두 유한집합이기 때문입니다. 그러니 각 집합의 가장 큰 원소를 적어 봅시다.

**1단계: 공통 원소의 모양.** 어떤 양의 정수가  $4 = 2^2$ 과  $6 = 2 \cdot 3$ 의 공배수인 것은 정확히  $\text{lcm}(4, 6) = 2^2 \cdot 3 = 12$ 의 배수일 때입니다.

**2단계: 목록이 끝나는 곳.**  $S = \{4, 8, \dots, 4 \cdot 2005\}$ 이므로  $S$ 는 8020 이하인 4의 양의 배수 **전체**로 이루어져 있습니다. 마찬가지로  $T$ 는  $6 \cdot 2005 = 12,030$  이하인 6의 양의 배수 전체로 이루어져 있습니다.

**3단계: 조건 합치기.** 어떤 수가 두 집합에 모두 속하는 것은 12의 배수이고, 8020 이하이고, 12,030 이하일 때뿐입니다. 두 번째 조건이 성립하면 세 번째 조건은 저절로 성립하므로, 더 짧은 목록인  $S$ 가 상한을 정합니다.

**4단계: 세기.** 8020 이하인 12의 배수는  $12k \leq 8020$ 인  $12 \cdot 1, 12 \cdot 2, \dots, 12 \cdot k$ 입니다.  $12 \cdot 668 = 8016 \leq 8020$ 이고  $12 \cdot 669 = 8028 > 8020$ 이므로 모두 668개입니다.

다른 관점으로 확인해 봅시다.  $S = \{4 \cdot 1, \dots, 4 \cdot 2005\}$ 에서 원소  $4m$ 이 12의 배수인 것은  $3 \mid m$ 일 때뿐이고, 1부터 2005까지 그런  $m$ 은  $\lfloor 2005/3 \rfloor = 668$ 개입니다.

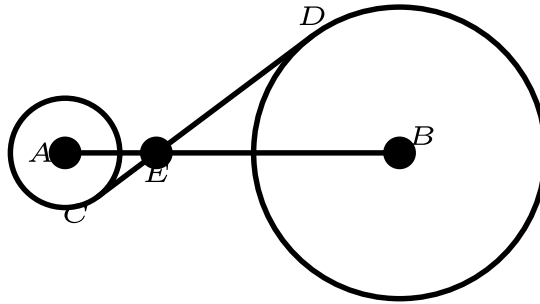
**주의.**  $T$ 의 가장 큰 원소 12,030을 상한으로 쓰면 12의 배수를 1002개 세게 되어 너무 많습니다. 8020보다 큰 12의 배수는  $T$ 에는 있지만  $S$ 에는 없습니다. 또 공통인 배수는  $4 \cdot 6 = 24$ 가 아니라  $\text{lcm}(4, 6) = 12$ 에서 나옵니다.

정답: (D) 668

23 기하

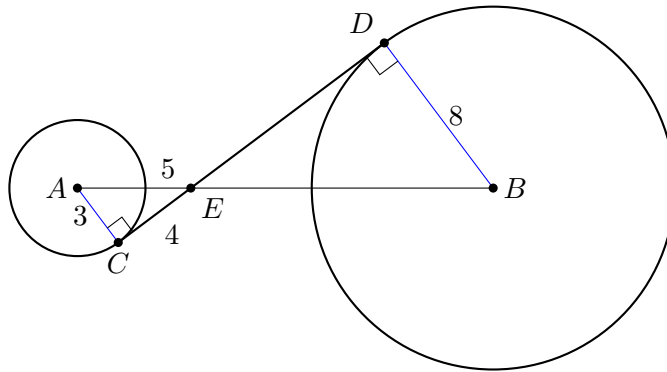
출처: 2006 AMC 10A 23번

중심이  $A, B$  인 두 원의 반지름은 각각 3, 8이다. 그림과 같이 공통내접선이 두 원과 각각 점  $C, D$  에서 접한다. 직선  $AB$  와  $CD$  가 점  $E$  에서 만나고  $AE = 5$  이다.  $CD$  의 길이는?



- (A) 13      (B)  $\frac{44}{3}$       (C)  $\sqrt{221}$       (D)  $\sqrt{255}$       (E)  $\frac{55}{3}$

**핵심 아이디어.** 접선이 나오면 접점까지 반지름을 그어 봅시다. 반지름은 접선에 수직입니다. 그러면 두 직각삼각형  $ACE$  와  $BDE$  가 생기고,  $E$  에서의 두 각은 맞꼭지각입니다. 게다가 주어진  $AE = 5$  와  $AC = 3$  은 완성되기를 기다리는 3-4-5 삼각형입니다.



**1단계: 작은 삼각형.** 반지름  $AC$  는 접선  $CD$  에 수직이므로  $\triangle ACE$  는  $C$  에서 직각입니다. 빗변은  $AE = 5$  이고 한 직각변은  $AC = 3$  이므로 다음과 같습니다.

$$CE = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4.$$

**2단계: 큰 삼각형.** 마찬가지로  $BD \perp CD$  이므로  $\triangle BDE$  는  $D$  에서 직각입니다.  $E$  에서의 두 각은 맞꼭지각이므로( $E$  는 직선  $AB$  와  $CD$  위에 동시에 있고, 두 원 사이에 있습니다) 크기가 같습니다. 두 쌍의 각이 같으므로  $\triangle ACE \sim \triangle BDE$  이고,  $C \leftrightarrow D$  가 대응합니다.

**3단계: 확대하기.** 두 삼각형의 닮음비는  $\frac{BD}{AC} = \frac{8}{3}$  이므로 다음과 같습니다.

$$DE = \frac{8}{3} \cdot CE = \frac{8}{3} \cdot 4 = \frac{32}{3}.$$

**4단계: 더하기.** 접선 위에서  $E$ 는  $C$ 와  $D$  사이에 있으므로 다음과 같습니다.

$$CD = CE + DE = 4 + \frac{32}{3} = \frac{12}{3} + \frac{32}{3} = \frac{44}{3}.$$

**주의.** 같은 답음비로  $BE = \frac{8}{3} \cdot 5 = \frac{40}{3}$ 을 구한 뒤 더하면  $AE + BE = 5 + \frac{40}{3} = \frac{55}{3}$ 가 되어 (E)를 고르게 됩니다. 그러나 이것은 접선의 길이  $CD$ 가 아니라 두 **중심** 사이의 거리  $AB$ 입니다.

**다른 풀이.**  $\overline{CD}$ 를 평행이동하여  $C$ 를  $A$ 로 옮겨 봅시다. 다른 끝점은  $\overline{BD}$ 를  $D$  너머로 연장한 직선 위,  $B$ 로부터 거리가  $8+3=11$ 인 곳에 놓입니다. 그러면 빗변이  $AB$ 이고 두 직각변이  $CD$ 와 11인 직각삼각형이 생깁니다. 이로부터 공통내접선의 길이 공식  $CD^2 = AB^2 - (3+8)^2$ 을 얻습니다. (위의 주의에서 구한 값을 올바르게 사용하여)  $AB = \frac{55}{3}$ 를 대입하면 다음과 같습니다.

$$CD^2 = \frac{3025}{9} - \frac{1089}{9} = \frac{1936}{9}, \quad CD = \frac{44}{3}.$$

**정답: (B)**  $\frac{44}{3}$

## 24 대수

출처: 2019 AMC 10A 24번

$p, q, r$ 이 다음 다항식의 서로 다른 세 근이라 하자.

$$x^3 - 22x^2 + 80x - 67.$$

실수  $A, B, C$ 가 존재하여,  $s \notin \{p, q, r\}$ 인 모든 실수  $s$ 에 대하여 다음 등식이 성립한다.

$$\frac{1}{s^3 - 22s^2 + 80s - 67} = \frac{A}{s-p} + \frac{B}{s-q} + \frac{C}{s-r}$$

이때 다음 식의 값은

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C}?$$

- (A) 243                      (B) 244                      (C) 245                      (D) 246                      (E) 247

**핵심 아이디어.**  $p, q, r$ 을 정확히 구할 수는 없으므로, 이들에 대하여 **대칭**인 식을 목표로 합시다. 그러면 근과 계수의 관계(비에트 공식)로 마무리할 수 있습니다.  $A$ 만 따로 얻으려면 분모를 없앤 뒤  $s = p$ 를 대입합니다. 그러면  $B$ 와  $C$ 의 항이 사라집니다(부분분수의 “가리기” 요령).

**1단계: 분모 없애기.** 삼차식은  $s^3 - 22s^2 + 80s - 67 = (s-p)(s-q)(s-r)$ 로 인수분해됩니다. 주어진 등식의 양변에 이 곱을 곱하면 다음을 얻습니다.

$$1 = A(s-q)(s-r) + B(s-p)(s-r) + C(s-p)(s-q).$$

양변은 세 값을 제외한 모든  $s$ 에서 일치하는 다항식이므로,  $s = p, q, r$ 을 포함한 모든  $s$ 에서 일치합니다.

**2단계: 근 대입하기.**  $s = p$ 를 대입하면  $B$ 와  $C$ 의 항이 사라져  $1 = A(p - q)(p - r)$ 입니다.  $s = q$ 와  $s = r$ 에 대해서도 같은 방법으로 하면 다음을 얻습니다.

$$\frac{1}{A} = (p - q)(p - r), \quad \frac{1}{B} = (q - p)(q - r), \quad \frac{1}{C} = (r - p)(r - q).$$

**3단계: 전개하여 더하기.** 각 곱은 예를 들어  $(p - q)(p - r) = p^2 - pq - pr + qr$ 처럼 전개됩니다. 세 식을 모두 더하면 각 제곱은 한 번씩 나오고,  $pq$ 와 같은 각 곱은 ( $p$ 의 항과  $q$ 의 항에서) 음의 부호로 두 번, ( $r$ 의 항에서) 양의 부호로 한 번 나옵니다. 따라서 다음이 성립합니다.

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} = p^2 + q^2 + r^2 - (pq + qr + rp).$$

**4단계: 근과 계수의 관계.**  $x^3 - 22x^2 + 80x - 67$ 에서  $p + q + r = 22$ ,  $pq + qr + rp = 80$ 입니다. 그러면

$$p^2 + q^2 + r^2 = (p + q + r)^2 - 2(pq + qr + rp) = 484 - 160 = 324,$$

이므로 답은  $324 - 80 = 244$ 입니다.

(수치로 계산하면 세 근은 약 17.69, 3.08, 1.23이고, 이 값들로  $A, B, C$ 를 계산해도 같은 합 244가 나옵니다.)

**다른 풀이.** (미분을 아는 독자를 위한 풀이) 2단계에서 얻은  $\frac{1}{A} = (p - q)(p - r)$ 은 정확히  $f(x) = (x - p)(x - q)(x - r)$ 의 도함수의  $p$ 에서의 값입니다. 따라서 구하는 합은  $f'(p) + f'(q) + f'(r)$ 이고,  $f'(x) = 3x^2 - 44x + 80$ 이므로 다음과 같습니다.

$$3(p^2 + q^2 + r^2) - 44(p + q + r) + 3 \cdot 80 = 3 \cdot 324 - 44 \cdot 22 + 240 = 972 - 968 + 240 = 244.$$

**정답: (B) 244**

## 25 정수론

출처: 2014 AMC 10A 25번

수  $5^{867}$ 은  $2^{2013}$ 과  $2^{2014}$  사이에 있다.  $1 \leq m \leq 2012$ 이고 다음 부등식을 만족시키는 정수의 순서쌍  $(m, n)$ 의 개수는

$$5^n < 2^m < 2^{m+2} < 5^{n+1}?$$

- (A) 278                      (B) 279                      (C) 280                      (D) 281                      (E) 282

**핵심 아이디어.** 주어진 조건은 2의 연속한 세 거듭제곱  $2^m, 2^{m+1}, 2^{m+2}$ 이 5의 연속한 두 거듭제곱 사이에 (등호 없이) 들어간다는 뜻입니다.  $4 < 5 < 8$ 이므로  $5^n$ 부터  $5^{n+1}$ 까지의 구간에는 2의 거듭제곱이 두 개 또는 세 개만 들어갈 수 있습니다. 이상해 보이는 사실  $2^{2013} < 5^{867} < 2^{2014}$ 은 모든 구간에 들어 있는 2의 거듭제곱의 총 개수를 알려 줍니다. 그러니 구간을 두 가지 방법으로 세어 봅시다.

**1단계: 각 구간에는 두 개 또는 세 개.**  $n = 0, 1, \dots, 866$ 에 대하여 열린구간  $(5^n, 5^{n+1})$ 을 “구간  $n$ ”이라 합시다.  $5^n$ 보다 큰 가장 작은 2의 거듭제곱을  $2^k$ 이라 하면  $2^{k-1} \leq 5^n$ 입니다. 그러면  $2^{k+1} = 4 \cdot 2^{k-1} \leq$

$4 \cdot 5^n < 5^{n+1}$  이므로  $2^k$  과  $2^{k+1}$  은 모두 구간  $n$  에 들어 있습니다. 또  $2^{k+3} = 8 \cdot 2^k > 8 \cdot 5^n > 5^{n+1}$  이므로  $2^{k+3}$  은 들어 있지 않습니다. 따라서 모든 구간에는 2의 거듭제곱이 정확히 2개 또는 3개 들어 있습니다.

**2단계: 순서쌍  $\leftrightarrow$  세 개짜리 구간.** 순서쌍  $(m, n)$  이 조건을 만족하는 것은  $2^m, 2^{m+1}, 2^{m+2}$  이 모두 구간  $n$  에 들어 있을 때뿐입니다. 이것은 거듭제곱이 세 개 들어 있는 구간에서만 일어나고, 이때  $2^m$  은 그중 가장 작은 것이어야 합니다. 따라서 세 개짜리 구간 하나마다 순서쌍이 정확히 하나씩 생기고, 두 개짜리 구간에서는 하나도 생기지 않습니다.

범위를 확인해 봅시다. 조건을 만족하는 순서쌍에 대하여  $5^{n+1} > 2^{m+2} > 1$  에서  $n \geq 0$  이고,  $5^n < 2^m \leq 2^{2012} < 5^{867}$  에서  $n \leq 866$  입니다. 거꾸로,  $n \leq 866$  인 세 개짜리 구간에서 가장 작은 거듭제곱  $2^m$  은  $2^m > 5^n \geq 1$  이므로  $m \geq 1$  이고,  $2^{m+2} < 5^{867} < 2^{2014}$  이므로  $m \leq 2011$  입니다. 따라서 순서쌍은 구간 0 부터 구간 866까지 중 세 개짜리 구간과 정확히 일대일로 대응합니다.

**3단계: 두 가지 방법으로 세기.** 거듭제곱이 두 개인 구간을  $d$  개, 세 개인 구간을  $t$  개라 합시다. 구간은 ( $n = 0$  부터  $n = 866$  까지) 867개이므로  $d + t = 867$  입니다. 거듭제곱  $2^1, 2^2, \dots, 2^{2013}$  은 모두 1과  $5^{867}$  사이에 (등호 없이) 있고, 어느 것도 5의 거듭제곱과 같지 않으므로 각각 정확히 하나의 구간에 들어갑니다. 따라서  $2d + 3t = 2013$  입니다.

**4단계: 연립하여 풀기.** 둘째 식에서 첫째 식의 두 배를 빼면  $t = 2013 - 2 \cdot 867 = 2013 - 1734 = 279$  입니다. (그러면  $d = 588$  입니다.) 컴퓨터로 모든 순서쌍을 직접 세어도 279가 나옵니다.

**주의.** 하나 차이로 실수하면 바로 옆의 선택지가 나옵니다. 구간을  $n = 1$  부터 시작하면서(구간 866 개뿐) 2013개의 거듭제곱을 모두 세면  $2013 - 1732 = 281$ , 즉 (D)가 나옵니다. ( $m \leq 2012$  에서 온) 2012개의 거듭제곱과 867개의 구간을 쓰면 278, 즉 (A)가 나옵니다. 구간 0은 (1, 5)이며 2와 4를 포함하고, 구간들 안의 거듭제곱은  $2^1$  부터  $2^{2013}$  까지입니다.

정답: (B) 279