
AMC 10

제 3 회

실전 모의고사

해설

정답표 • 출처 • 단계별 풀이

정답표와 출처

번호	정답	출처	영역
1	B	2018 AMC 10A 1번	대수
2	B	2016 AMC 10B 2번	대수
3	D	2003 AMC 10A 3번	기하
4	B	2005 AMC 10A 4번	기하
5	C	2014 AMC 10A 5번	대수
6	D	2009 AMC 10B 6번	정수론
7	B	2011 AMC 10A 7번	대수
8	D	2010 AMC 10A 8번	대수
9	D	2002 AMC 10B 9번	경우의 수와 확률
10	B	2009 AMC 10A 10번	기하
11	C	2014 AMC 10B 11번	대수
12	B	2013 AMC 10B 12번	경우의 수와 확률
13	C	2005 AMC 10B 13번	정수론
14	B	2012 AMC 10A 14번	경우의 수와 확률
15	A	2018 AMC 10B 15번	기하
16	B	2000 AMC 10 16번	기하
17	B	2017 AMC 10B 17번	경우의 수와 확률
18	D	2017 AMC 10A 18번	경우의 수와 확률
19	C	2006 AMC 10A 19번	대수
20	D	2010 AMC 10B 20번	기하
21	B	2011 AMC 10B 21번	대수
22	A	2015 AMC 10A 22번	경우의 수와 확률
23	C	2019 AMC 10A 23번	대수
24	D	2008 AMC 10A 24번	정수론
25	C	2002 AMC 10A 25번	기하

1 대수

출처: 2018 AMC 10A 1번

다음 식의 값은 얼마인가

$$\left(\left((2+1)^{-1} + 1 \right)^{-1} + 1 \right)^{-1} + 1?$$

(A) $\frac{5}{8}$

(B) $\frac{11}{7}$

(C) $\frac{8}{5}$

(D) $\frac{18}{11}$

(E) $\frac{15}{8}$

핵심 아이디어. 안쪽부터 차례로 계산합니다. -1 제곱은 “역수를 취하라”는 뜻일 뿐이므로, 각 겹은 “뒤집은 다음 1을 더하기”입니다.

1단계. 가장 안쪽은 $(2+1)^{-1} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$ 입니다. 1을 더하면 $\frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$ 입니다.

2단계. 뒤집으면 $\left(\frac{4}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{4}$ 입니다. 1을 더하면 $\frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}$ 입니다.

3단계. 뒤집으면 $\left(\frac{7}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{7}$ 입니다. 마지막 1을 더하면 $\frac{4}{7} + 1 = \frac{11}{7}$ 입니다.

주의. 뒤집기는 세 번이지만 “+1”은 네 번입니다. 마지막으로 뒤집은 곳에서 멈추면 $\frac{4}{7}$ 가 나오는데, 이것은 선택지에 없습니다. 큰 괄호 바깥의 +1까지 더했는지 확인해 봅시다.

정답: (B) $\frac{11}{7}$

2 대수

출처: 2016 AMC 10B 2번

$n \heartsuit m = n^3 m^2$ 일 때, $\frac{2 \heartsuit 4}{4 \heartsuit 2}$ 의 값은?

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2 (E) 4

핵심 아이디어. 규칙을 그대로 적용하면 됩니다. 첫째 수는 세제곱하고 둘째 수는 제곱합니다. 그다음 분수를 약분합니다.

분자. $2 \heartsuit 4 = 2^3 \cdot 4^2 = 8 \cdot 16 = 128$ 입니다.

분모. $4 \heartsuit 2 = 4^3 \cdot 2^2 = 64 \cdot 4 = 256$ 입니다.

따라서 $\frac{2 \heartsuit 4}{4 \heartsuit 2} = \frac{128}{256} = \frac{1}{2}$ 입니다.

다른 풀이. 일반적으로 $\frac{a \heartsuit b}{b \heartsuit a} = \frac{a^3 b^2}{b^3 a^2} = \frac{a}{b}$ 이므로, 큰 수를 전혀 계산하지 않고도 답이 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ 임을 알 수 있습니다.

주의. 이 연산은 대칭이 아닙니다. 첫째 수 대신 둘째 수를 세제곱하면 분수가 뒤집혀 2가 나오는데, 이것은 선택지 (D)입니다.

정답: (B) $\frac{1}{2}$

3 기하

출처: 2003 AMC 10A 3번

세 모서리의 길이가 15 cm, 10 cm, 8 cm인 속이 꽉 찬 직육면체 상자가 있다. 이 상자의 각 모퉁이에서 한 모서리의 길이가 3 cm인 정육면체를 잘라 내어 새로운 입체를 만든다. 잘라 낸 부피는 처음 부피의 몇 퍼센트인가?

- (A) 4.5 (B) 9 (C) 12 (D) 18 (E) 24

핵심 아이디어. 잘라 낸 부피와 처음 부피를 구한 뒤, 그 비를 퍼센트로 바꿉니다. 핵심은 개수 세기입니다. 상자에는 모퉁이가 여덟 개 있습니다.

1단계. 정육면체 하나의 부피는 $3^3 = 27 \text{ cm}^3$ 입니다. 상자에는 모퉁이가 8개(위에 네 개, 아래에 네 개) 있으므로, 잘라 낸 부피는 $8 \cdot 27 = 216 \text{ cm}^3$ 입니다.

2단계. 처음 상자의 부피는 $15 \cdot 10 \cdot 8 = 1200 \text{ cm}^3$ 입니다.

3단계. 잘라 낸 비율은 $\frac{216}{1200} = \frac{18}{100}$, 즉 18%입니다.

주의. 위쪽에 보이는 모퉁이 네 개만 세면 $4 \cdot 27 = 108 \text{ cm}^3$ 가 되어 9%, 즉 선택지 (B)가 나옵니다. 직육면체 상자의 모퉁이는 여덟 개입니다.

정답: (D) 18

4 기하

출처: 2005 AMC 10A 4번

대각선의 길이가 x 인 직사각형이 있다. 이 직사각형의 긴 변의 길이는 짧은 변의 길이의 두 배이다. 이 직사각형의 넓이는?

- (A) $\frac{1}{4}x^2$ (B) $\frac{2}{5}x^2$ (C) $\frac{1}{2}x^2$ (D) x^2 (E) $\frac{3}{2}x^2$

핵심 아이디어. 대각선은 짧은 변과 긴 변을 두 변으로 하는 직각삼각형의 빗변이므로, 피타고라스 정리를 이용합니다.

1단계. 짧은 변의 길이를 w 라 하면 긴 변의 길이는 $2w$ 입니다. 대각선은 직사각형을 빗변이 아닌 두 변의 길이가 $w, 2w$ 인 직각삼각형 두 개로 나누므로

$$x^2 = w^2 + (2w)^2 = 5w^2, \quad \text{따라서} \quad w^2 = \frac{x^2}{5}.$$

2단계. 넓이는 $w \cdot 2w = 2w^2 = 2 \cdot \frac{x^2}{5} = \frac{2}{5}x^2$ 입니다.

w 자체는 전혀 필요하지 않았다는 점에 주목합니다. 필요한 것은 w^2 뿐이고, 이 값은 피타고라스 정리가 곧바로 알려 줍니다.

주의. 넓이는 w^2 이 아니라 $2w^2$ 입니다. $w^2 = \frac{1}{5}x^2$ 에서 멈추면 선택지에 없는 값이 나옵니다.

정답: (B) $\frac{2}{5}x^2$

5 대수

출처: 2014 AMC 10A 5번

어느 대수 퀴즈에서 학생의 10%는 70점, 35%는 80점, 30%는 90점을 받았고, 나머지 학생은 100점을 받았다. 이 퀴즈에서 학생들의 점수의 평균과 중앙값의 차는?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

핵심 아이디어. 백분율은 가중치처럼 다루면 됩니다. 평균은 가중평균이고, 중앙값은 모든 학생을 한 줄로 세웠을 때 한가운데에 있는 학생의 점수입니다.

1단계. 나머지는 $100\% - 10\% - 35\% - 30\% = 25\%$ 이고, 이 학생들은 100점을 받았습니다.

2단계 (중앙값). 학생들을 점수가 낮은 사람부터 높은 사람 순으로 세웁니다. 처음 $10\% + 35\% = 45\%$ 는 90점 미만이고, 처음 $45\% + 30\% = 75\%$ 는 90점 이하입니다. 줄의 한가운데(50%)는 45%와 75% 사이에 있으므로 중앙값은 90입니다.

3단계 (평균). 각 점수에 그 비율을 가중치로 곱하면 다음과 같습니다.

$$0.10 \cdot 70 + 0.35 \cdot 80 + 0.30 \cdot 90 + 0.25 \cdot 100 = 7 + 28 + 27 + 25 = 87.$$

차는 $90 - 87 = 3$ 입니다.

주의. 네 점수 70, 80, 90, 100을 가중치 없이 평균하면 85가 되어 차가 5, 즉 선택지 (E)가 됩니다. 평균을 구할 때는 반드시 백분율을 반영해야 합니다.

정답: (C) 3

6 정수론

출처: 2009 AMC 10B 6번

키아나에게는 자신보다 나이가 많은 쌍둥이 형제 두 명이 있다. 세 사람의 나이의 곱은 128이다. 세 사람의 나이의 합은?

- (A) 10 (B) 12 (C) 16 (D) 18 (E) 24

핵심 아이디어. $128 = 2^7$ 에는 1 이외의 홀수인 인수가 없으므로, 모든 나이는 2의 거듭제곱입니다. 그다음 주어진 두 사실, 즉 쌍둥이는 나이가 같고 키아나보다 **나이가 많다**는 것을 이용합니다.

1단계. 쌍둥이 각각의 나이를 t 살, 키아나의 나이를 k 살이라 합시다. 그러면 $t \cdot t \cdot k = t^2 k = 128$ 이고, 모든 나이는 128의 약수이므로 모두 2의 거듭제곱입니다.

2단계. t^2 이 128의 약수가 되는 쌍둥이의 나이를 하나씩 확인해 봅시다.

- $t = 1: k = 128; \quad t = 2: k = 32; \quad t = 4: k = 8;$

• $t = 8: k = \frac{128}{64} = 2.$

($t = 16$ 이면 $t^2 = 256 > 128$ 이 되어 불가능합니다.)

3단계. 쌍둥이가 키아나보다 나이가 많은 경우는 $t = 8, k = 2$ 뿐입니다. 합은 $8 + 8 + 2 = 18$ 입니다.

주의. “나이가 많은”이라는 조건을 무시하면 $t = 4, k = 8$ 을 골라 합이 $4 + 4 + 8 = 16$, 즉 선택지 (C)가 됩니다. 이 경우에는 키아나가 쌍둥이 형제보다 나이가 많아집니다.

정답: (D) 18

7 대수

출처: 2011 AMC 10A 7번

다음 방정식 중 해가 없는 것은?

(A) $(x + 7)^2 = 0$

(B) $|-3x| + 5 = 0$

(C) $\sqrt{-x} - 2 = 0$

(D) $\sqrt{x} - 8 = 0$

(E) $|-3x| - 4 = 0$

핵심 아이디어. 절댓값은 결코 음수가 될 수 없습니다. 각 방정식에서 절댓값이나 제곱근만 한쪽에 남기고, 반대쪽에 남은 값이 가능한 값인지 살펴봅시다.

(A) $(x + 7)^2 = 0$ 이면 $x + 7 = 0$ 이므로 $x = -7$ 이 해입니다.

(B) $|-3x| + 5 = 0$ 이면 $|-3x| = -5$ 입니다. 절댓값은 항상 0 이상이므로 결코 -5 가 될 수 없습니다. 해가 없습니다.

(C) $\sqrt{-x} = 2$ 이므로 $-x = 4, x = -4$ 입니다. 확인하면 $\sqrt{-(-4)} = \sqrt{4} = 2$ 이므로 성립합니다.

(D) $\sqrt{x} = 8$ 이므로 $x = 64$ 입니다.

(E) $|-3x| = 4$ 이므로 $-3x = \pm 4$ 이고 $x = \pm \frac{4}{3}$ 입니다.

해가 없는 것은 (B)뿐입니다.

주의. $\sqrt{-x}$ 는 “음수의 제곱근”처럼 보여서 (C)를 고르고 싶어집니다. 하지만 x 가 음수이면 $-x$ 는 양수입니다. $x = -4$ 는 아무 문제 없는 해입니다.

정답: (B) $|-3x| + 5 = 0$

8 대수

출처: 2010 AMC 10A 8번

토니는 하루에 2시간씩 일하며, 만 나이 한 살당 시간당 \$0.50을 받는다. 여섯 달 동안 토니는 50일을 일하여 \$630을 벌었다. 이 여섯 달이 끝났을 때 토니는 몇 살이었는가?

- (A) 9 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

핵심 아이디어. 평균 시급을 구하면 평균 나이를 알 수 있습니다. 그 평균이 정수가 아니라면 이 기간 중에 생일이 있었던 것입니다.

1단계. 토니는 $2 \cdot 50 = 100$ 시간 일했으므로, 평균 시급은 $\$630 \div 100 = \6.30 입니다.

2단계. 토니는 나이 한 살당 시간당 \$0.50을 받으므로, 일하는 동안의 평균 나이는 $6.30 \div 0.50 = 12.6$ 살입니다.

3단계. 여섯 달 동안 나이는 많아야 한 번 바뀝니다. 평균이 12.6이라는 것은 며칠은 12살로, 며칠은 13살로 일했다는 뜻입니다. 확인해 봅시다. 12살로 d 일, 13살로 $50 - d$ 일 일했다면, 하루 임금은 나이 한 살당 \$1이므로 $12d + 13(50 - d) = 630$ 이고, $650 - d = 630$ 에서 $d = 20$ 입니다. 즉 12살로 20일, 그다음 13살로 30일 일했습니다.

기간이 끝났을 때 토니는 13살이었습니다.

주의. 12.6을 버림하여 12로 하면 기간이 시작될 때의 나이, 즉 선택지 (C)가 나옵니다. 문제는 끝날 때의 나이를 묻고 있습니다.

정답: (D) 13

9 경우의 수와 확률

출처: 2002 AMC 10B 9번

문자 A, M, O, S, U 를 사용하여 120개의 다섯 글자 “단어”를 만들 수 있다. 이 “단어”들을 알파벳 순서로 나열할 때, “단어” $USAMO$ 는 몇 번째에 오는가?

- (A) 112 (B) 113 (C) 114 (D) 115 (E) 116

핵심 아이디어. $USAMO$ 보다 앞에 오는 단어가 몇 개인지를 첫 글자별로, 그다음에는 둘째 글자별로 묶어서 셉니다.

1단계. 문자를 순서대로 나열하면 A, M, O, S, U 입니다. 첫 글자를 고정하면 나머지 네 글자를 배열하는 방법은 $4! = 24$ 가지입니다.

2단계. A, M, O, S 로 시작하는 단어는 모두 $USAMO$ 보다 앞에 옵니다. 이런 단어는 $4 \cdot 24 = 96$ 개입니다.

3단계. U 로 시작하는 단어에서 둘째 글자는 A, M, O, S 중 하나이고, 각각에 대해 나머지를 배열하는 방법이 $3! = 6$ 가지입니다. UA, UM, UO 로 시작하는 단어가 먼저 오므로 $3 \cdot 6 = 18$ 개가 더 있습니다.

4단계. US 로 시작하는 단어 중에서는 남은 문자 A, M, O 를 알파벳 순서로 놓은 $USAMO$ 가 바로 첫 번째입니다.

따라서 $USAMO$ 보다 앞에 오는 단어는 $96 + 18 = 114$ 개이므로, 이 단어는 115번째에 있습니다.

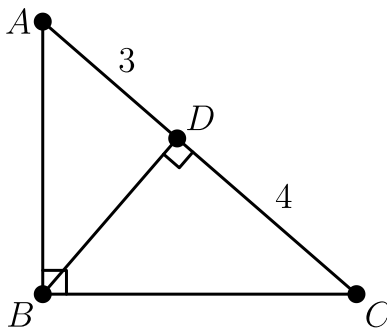
주의. 114는 순서가 아니라 $USAMO$ 보다 앞에 있는 단어의 개수입니다. 1을 더하는 것을 잊으면 선택지 (C)가 됩니다.

정답: (D) 115

10 기하

출처: 2009 AMC 10A 10번

삼각형 ABC 는 꼭짓점 B 의 각이 직각이다. 점 D 는 B 에서 내린 수선의 발이고, $AD = 3$, $DC = 4$ 이다. $\triangle ABC$ 의 넓이는?



- (A) $4\sqrt{3}$ (B) $7\sqrt{3}$ (C) 21 (D) $14\sqrt{3}$ (E) 42

핵심 아이디어. 밑변 $AC = 7$ 은 알고 있으므로 높이 BD 만 구하면 됩니다. 빗변에 내린 수선은 직각삼각형을 그것과 닮은 두 작은 삼각형으로 나누고, 이로부터 $BD^2 = AD \cdot DC$ 를 얻습니다.

1단계. 직각삼각형 ABD 에서 $\angle A + \angle ABD = 90^\circ$ 입니다. 또 B 의 각이 직각이므로 $\angle ABD + \angle DBC = 90^\circ$ 입니다. 따라서 $\angle A = \angle DBC$ 이고, 직각삼각형 ADB 와 BDC 는 닮음입니다.

2단계. 대응하는 변끼리 비를 세우면 $\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{DC}$ 이므로

$$BD^2 = AD \cdot DC = 3 \cdot 4 = 12, \quad BD = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

3단계. $AC = 3 + 4 = 7$ 을 밑변, BD 를 높이로 잡으면

$$\text{넓이} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 2\sqrt{3} = 7\sqrt{3}.$$

주의. $BD^2 = 12$ 를 BD 인 것처럼 쓰면 $\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 12 = 42$, 즉 선택지 (E)가 나옵니다. $\frac{1}{2}$ 을 빠뜨리면 $14\sqrt{3}$, 즉 선택지 (D)가 나옵니다.

정답: (B) $7\sqrt{3}$

11 대수

출처: 2014 AMC 10B 11번

소비자에게는 한 번의 $n\%$ 할인이 다음 할인 중 어느 것보다도 더 유리하다.

- (1) 15% 할인을 연속으로 두 번 받는 것
- (2) 10% 할인을 연속으로 세 번 받는 것
- (3) 25% 할인을 받은 뒤 이어서 5% 할인을 받는 것

n 이 될 수 있는 양의 정수 중 가장 작은 값은?

- (A) 27 (B) 28 (C) 29 (D) 31 (E) 33

핵심 아이디어. 연속된 할인은 곱해지는 것이지 더해지는 것이 아닙니다. 각 방식을 “원래 가격 중 실제로 내는 비율”로 바꾼 다음, 세 방식 모두보다 나은 한 번의 할인을 찾습니다. “연속으로”와 “이어서”라는 말이 곱하라는 신호입니다.

1단계. 15% 할인은 가격의 0.85를 낸다는 뜻입니다. 이를 연속으로 두 번 받으면 내는 비율은

$$0.85 \times 0.85 = 0.7225,$$

즉 실제 할인율은 27.75%입니다.

2단계. 10% 할인을 연속으로 세 번 받으면 내는 비율은

$$0.9 \times 0.9 \times 0.9 = 0.729,$$

즉 실제 할인율은 27.1%입니다.

3단계. 25% 할인을 받은 뒤 이어서 5% 할인을 받으면 내는 비율은

$$0.75 \times 0.95 = 0.7125,$$

즉 실제 할인율은 28.75%입니다.

4단계. “더 유리하다”는 것은 할인이 더 크다는 뜻이므로, n 은 세 방식 중 가장 좋은 것보다 커야 합니다. 즉 $n > 28.75$ 입니다. 이를 만족하는 가장 작은 정수는 $n = 29$ 입니다. 확인해 봅시다. $28\% < 28.75\%$ 이므로 $n = 28$ 은 안 되고, 29%는 27.75%, 27.1%, 28.75%보다 모두 큼니다.

주의. 할인율을 더하면 $15 + 15 = 30$, $10 + 10 + 10 = 30$, $25 + 5 = 30$ 이 되어 $n > 30$ 이어야 하므로 31, 즉 선택지 (D)를 고르게 됩니다. 둘째 할인은 이미 깎인 가격에서 빼는 것이므로 표시된 숫자보다 가치가 작습니다.

주의. 처음 두 방식보다만 나으면 된다고 생각하면 $n > 27.75$ 만 필요하므로 28, 즉 선택지 (B)가 됩니다. 한 번의 할인은 가장 좋은 방식을 포함한 모든 방식보다 나아야 합니다.

정답: (C) 29

12 경우의 수와 확률

출처: 2013 AMC 10B 12번

정오각형의 변과 대각선 전체의 집합을 S 라 하자. S 에서 두 원소를 비복원으로 임의로 택할 때, 택한 두 선분의 길이가 같을 확률은?

- (A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{4}{9}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{5}{9}$ (E) $\frac{4}{5}$

핵심 아이디어. 정오각형에는 길이가 두 종류뿐입니다. 5개의 변은 모두 길이가 같고, 5개의 대각선도 모두 길이가 같습니다(그리고 더 길니다). 따라서 질문은 단순히 “두 번 모두 같은 5개짜리 묶음에서 뽑는가?”입니다. 두 개를 고를 때는 첫 번째를 고정하고 두 번째에 대해 생각하는 것이 가장 쉽습니다.

1단계. 오각형에는 변이 5개, 대각선이 $\binom{5}{2} - 5 = 10 - 5 = 5$ 개 있으므로, S 에는 선분이 10개 있습니다. 한 길이가 5개, 다른 길이가 5개입니다.

2단계. 첫 번째 선분을 뽑습니다. 무엇을 뽑든 그 선분은 길이가 같은 5개짜리 묶음에 속합니다. 남은 선분은 9개이고, 그중 4개가 같은 묶음에 있습니다.

3단계. 따라서 두 번째 선분이 첫 번째 선분과 길이가 같을 확률은 $\frac{4}{9}$ 입니다.

다른 풀이. 쌍을 직접 세어 봅시다. 쌍은 모두 $\binom{10}{2} = 45$ 개입니다. 길이가 같은 쌍은 변 두 개를 고르는 $\binom{5}{2} = 10$ 가지와 대각선 두 개를 고르는 10가지로, 모두 20개입니다. 확률은 $\frac{20}{45} = \frac{4}{9}$ 입니다.

주의. “선분의 절반이 같은 길이이니 답은 $\frac{5}{10}$ ”라고 생각하면 $\frac{1}{2}$, 즉 선택지 (C)를 고르게 됩니다. 첫 번째 선분을 뽑고 나면 남은 9개 중 같은 묶음에 속한 것은 4개뿐입니다.

정답: (B) $\frac{4}{9}$

13 정수론

출처: 2005 AMC 10B 13번

1과 2005 사이의 수 중에서 3 또는 4의 정수배이지만 12의 정수배는 아닌 수는 몇 개인가?

- (A) 501 (B) 668 (C) 835 (D) 1002 (E) 1169

핵심 아이디어. 3의 배수와 4의 배수의 개수를 바닥 함수로 셉니다. 둘 다의 배수인 수는 정확히 12의 배수이고, 이것이 바로 우리가 빼야 할 수입니다. 그러므로 각 목록에서 이 수들을 제거합니다.

1단계. 2005까지 각 종류의 개수를 셉니다.

- 3의 배수: $\lfloor \frac{2005}{3} \rfloor = 668$ ($3 \cdot 668 = 2004$ 이므로);
- 4의 배수: $\lfloor \frac{2005}{4} \rfloor = 501$ ($4 \cdot 501 = 2004$ 이므로);

- 12의 배수: $\lfloor \frac{2005}{12} \rfloor = 167$ ($12 \cdot 167 = 2004$ 이므로).

2단계. 어떤 수가 3의 배수이면서 4의 배수인 것은 정확히 그 수가 12의 배수일 때입니다. 따라서 12의 배수가 아닌 3의 배수는 $668 - 167 = 501$ 개이고, 12의 배수가 아닌 4의 배수는 $501 - 167 = 334$ 개입니다.

3단계. 이 두 묶음은 겹치지 않으므로(둘 다에 속하는 수는 12의 배수입니다), 전체 개수는 $501 + 334 = 835$ 입니다.

양 끝값은 영향을 주지 않습니다. 1과 2005는 3의 배수도 4의 배수도 아닙니다.

주의. 보통의 포함-배제 원리로 $668 + 501 - 167 = 1002$ 를 구하면 3 또는 4의 배수의 개수가 되는데, 여기에는 12의 배수가 여전히 한 번씩 들어 있습니다. 이것이 선택지 (D)입니다. 167을 한 번 더 빼야 합니다.

정답: (C) 835

14 경우의 수와 확률

출처: 2012 AMC 10A 14번

처비는 한 번에 31개의 칸이 있는 비표준 체커판을 만든다. 이 체커판은 모든 모퉁이의 칸이 검은색이고, 모든 행과 열을 따라 빨간 칸과 검은 칸이 번갈아 놓인다. 이러한 체커판에서 검은 칸은 몇 개인가?

- (A) 480 (B) 481 (C) 482 (D) 483 (E) 484

핵심 아이디어. 31은 홀수이므로, 검은 칸으로 시작해서 검은 칸으로 끝나는 행에는 검은 칸이 빨간 칸보다 하나 더 많습니다. 행별로 세어 봅시다. 어느 행이 검은 칸으로 시작하는지는 모퉁이가 알려 줍니다.

1단계. 행에 1부터 31까지 번호를 붙입니다. 1행은 검은 모퉁이 칸으로 시작하여 색이 번갈아 나오므로 1, 3, 5, ..., 31번째 칸이 검은색입니다. 즉 검은 칸이 16개, 빨간 칸이 15개입니다.

2단계. 각 열을 따라 내려가도 색이 번갈아 나오므로, 2행은 빨간 칸으로 시작하여 검은 칸이 15개이고, 3행은 다시 검은 칸으로 시작하는 식입니다. 홀수 번째 행 1, 3, ..., 31은 16개이고, 각각 검은 칸이 16개입니다. 짝수 번째 행 2, 4, ..., 30은 15개이고, 각각 검은 칸이 15개입니다.

3단계. 전체는 $16 \cdot 16 + 15 \cdot 15 = 256 + 225 = 481$ 입니다.

확인해 봅시다. 판에는 칸이 $31^2 = 961$ 개 있고, 검은 칸 481개와 빨간 칸 480개를 더하면 961개입니다.

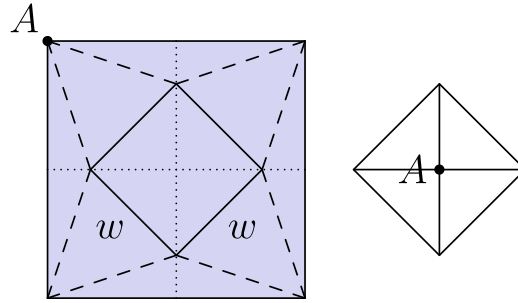
주의. 판을 똑같이 반으로 나누어 $\frac{961}{2} = 480.5$ 를 내림하면 480, 즉 선택지 (A)가 나옵니다. 이것은 빨간 칸의 개수입니다. 남는 한 칸을 차지하는 색은 검은색입니다.

정답: (B) 481

15 기하

출처: 2018 AMC 10B 15번

밑면이 정사각형인 닫힌 상자를 정사각형 모양의 포장지 한 장으로 싸려고 한다. 왼쪽 그림과 같이 상자는 포장지의 한가운데에 놓여 있고, 밑면의 꼭짓점들은 정사각형 포장지의 중심선 위에 있다. 포장지의 네 모퉁이를 상자의 옆면 위로 접어 올려, 상자 윗면의 중심인 오른쪽 그림의 점 A 에서 모두 만나게 한다. 상자의 밑면의 한 변의 길이는 w , 높이는 h 이다. 포장지의 넓이는?



- (A) $2(w + h)^2$ (B) $\frac{(w + h)^2}{2}$ (C) $2w^2 + 4wh$ (D) $2w^2$ (E) w^2h

핵심 아이디어. 포장지의 한 모퉁이가 접히는 과정을 따라가 봅시다. 종이는 늘어나지 않으므로, 포장지의 중심에서 모퉁이까지의 거리는 그 모퉁이가 상자 위를 지나 A 에 이르는 경로의 길이와 같습니다. 접기에 관한 문제는 거의 언제나 변하지 않는 길이에 관한 문제입니다.

1단계 (모퉁이의 출발점). 포장지의 한 변의 길이를 s 라 합시다. 포장지의 중심은 상자 밑면의 중심과 같고, 포장지의 각 모퉁이는 중심에서 대각선의 절반만큼 떨어져 있습니다. 즉 $\frac{s\sqrt{2}}{2} = \frac{s}{\sqrt{2}}$ 입니다.

2단계 (모퉁이가 가는 방향). 밑면의 꼭짓점들이 중심선 위에 있으므로 밑면은 45° 돌아간 정사각형이고, 밑면의 각 변은 포장지의 한 대각선과 수직입니다. 따라서 중심에서 포장지의 모퉁이로 향하는 직선은 곧게 뻗어 나가면서 밑면의 한 모서리와 그 모서리의 중점에서 직각으로 만납니다.

3단계 (경로의 길이). 이 직선을 따라 모퉁이 쪽 종이가 덮는 길이는 다음과 같습니다.

- 중심에서 밑면의 모서리까지: $\frac{w}{2}$ (밑면의 한 변의 절반);
- 상자의 옆면을 따라 위로: h ;
- 윗면을 가로질러 모서리에서 중심 A 까지: $\frac{w}{2}$.

모두 더하면 $\frac{w}{2} + h + \frac{w}{2} = w + h$ 입니다.

4단계. 두 길이가 같다고 놓으면 $\frac{s}{\sqrt{2}} = w + h$ 이므로 $s = \sqrt{2}(w + h)$ 이고, 넓이는 다음과 같습니다.

$$s^2 = 2(w + h)^2.$$

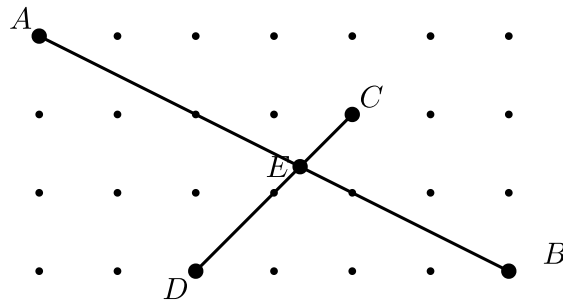
주의. 포장지는 상자를 덮기만 하면 되므로 상자의 겉넓이 $2w^2 + 4wh$, 즉 선택지 (C)를 답하고 싶어 집니다. 하지만 접어 올린 부분은 서로 겹칩니다. $2(w + h)^2 = 2w^2 + 4wh + 2h^2$ 이므로 $2h^2$ 만큼 더 큼니다.

정답: (A) $2(w + h)^2$

16 기하

출처: 2000 AMC 10 16번

그림에는 28개의 격자점이 있고, 각 격자점과 가장 가까운 이웃 점 사이의 거리는 한 단위이다. 선분 AB 와 선분 CD 는 점 E 에서 만난다. 선분 AE 의 길이는?



(A) $\frac{4\sqrt{5}}{3}$

(B) $\frac{5\sqrt{5}}{3}$

(C) $\frac{12\sqrt{5}}{7}$

(D) $2\sqrt{5}$

(E) $\frac{5\sqrt{65}}{9}$

핵심 아이디어. E 를 제외한 모든 표시된 점이 격자 위에 있다는 것이 힌트입니다. 점들에 좌표를 붙여 봅시다. 그러면 두 선분은 정확한 방정식을 가진 두 직선이 되고, E 는 그 두 직선이 만나는 점일 뿐입니다.

1단계. 왼쪽 아래 격자점을 원점으로 잡습니다. 격자는 가로로 7개의 점($x = 0$ 부터 6까지), 세로로 4개의 점($y = 0$ 부터 3까지)으로 이루어지므로 점은 $7 \cdot 4 = 28$ 개입니다. 그림에서 좌표를 읽으면

$$A = (0, 3), \quad B = (6, 0), \quad C = (4, 2), \quad D = (2, 0).$$

2단계. 직선 AB 는 오른쪽으로 6만큼 가는 동안 3만큼 내려가므로, 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이고 방정식은 $y = 3 - \frac{x}{2}$ 입니다. 직선 CD 는 오른쪽으로 2만큼 가는 동안 2만큼 올라가므로, 기울기는 1이고 방정식은 $y = x - 2$ 입니다.

3단계. E 에서는 두 방정식이 모두 성립합니다. $3 - \frac{x}{2} = x - 2$ 에서 $5 = \frac{3x}{2}$ 이므로 $x = \frac{10}{3}$ 입니다. 그러면 $y = \frac{10}{3} - 2 = \frac{4}{3}$ 이므로 $E = (\frac{10}{3}, \frac{4}{3})$ 입니다.

4단계. $A = (0, 3)$ 에서 E 까지 가로 변화량은 $\frac{10}{3}$ 이고 세로 변화량은 $3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$ 입니다. 피타고라스 정리에 의해

$$AE = \sqrt{\frac{100}{9} + \frac{25}{9}} = \sqrt{\frac{125}{9}} = \frac{5\sqrt{5}}{3}.$$

다른 풀이. $\overline{DC}$ 를 C 너머로 연장합니다. 이 직선은 오른쪽으로 한 칸 갈 때마다 1만큼 올라가므로, 맨 위 행, 즉 A 와 같은 행에 있는 격자점 $F = (5, 3)$ 에 닿습니다. 이제 $\overline{AF}$ 와 $\overline{DB}$ 는 둘 다 수평이므로 평행하고, 따라서 $\triangle AEF \sim \triangle BED$ 입니다. $AF = 5$ 이고 $BD = 6 - 2 = 4$ 이므로 $AE : EB = 5 : 4$ 입니다. 선분 전체의 길이는 $AB = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$ 이므로 $AE = \frac{5}{9} \cdot 3\sqrt{5} = \frac{5\sqrt{5}}{3}$ 입니다.

주의. 닮음을 이용하는 방법에서 AE 는 더 긴 평행한 변 $AF = 5$ 쪽에 있으므로 9개의 몫 중 5개를 차지합니다. 대신 4개를 주면 $\frac{4}{9} \cdot 3\sqrt{5} = \frac{4\sqrt{5}}{3}$, 즉 선택지 (A)가 나옵니다.

정답: (B) $\frac{5\sqrt{5}}{3}$

17 경우의 수와 확률

출처: 2017 AMC 10B 17번

한 자리 수이거나, 각 자리의 숫자를 왼쪽에서 오른쪽으로 읽을 때 엄격하게 증가하는 수열 또는 엄격하게 감소하는 수열을 이루는 양의 정수를 **단조수**라 하자. 예를 들어 3, 23578, 987620은 단조수이지만, 88, 7434, 23557은 단조수가 아니다. 단조수인 양의 정수는 모두 몇 개인가?

- (A) 1024 (B) 1524 (C) 1533 (D) 1536 (E) 2048

핵심 아이디어. 수를 자리마다 하나하나 세는 것은 가망이 없습니다. 하지만 엄격하게 증가하는 수는 어떤 숫자를 쓰는지만 정하면 완전히 결정된다는 데 주목합시다. 순서는 저절로 정해집니다. 그러므로 수 대신 숫자의 집합을 세고, 두 부류가 겹치는 부분을 바로잡습니다.

1단계: 증가. 공집합이 아닌 숫자의 집합을 아무것이나 골라 증가하는 순서로 씁니다. 숫자 0은 쓸 수 없습니다. 가장 작은 숫자이므로 맨 앞에 와야 하는데, 양의 정수는 0으로 시작할 수 없기 때문입니다. 따라서 증가하는 수는 $\{1, 2, \dots, 9\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합과 하나씩 대응하며, 그 개수는 다음과 같습니다.

$$2^9 - 1 = 511.$$

2단계: 감소. 이번에는 고른 숫자의 집합을 감소하는 순서로 씁니다. 이때는 0을 쓸 수 있는데, 이 숫자는 맨 끝에 오기 때문입니다(987620처럼). 따라서 $\{0, 1, \dots, 9\}$ 의 부분집합을 사용하며, 그 개수는 $2^{10} = 1024$ 입니다. 여기서 공집합과 집합 $\{0\}$ 을 버립니다(이 집합은 양의 정수가 아닌 수 0을 만듭니다).

$$1024 - 2 = 1022.$$

3단계: 겹치는 부분. 한 자리 수 $1, 2, \dots, 9$ 는 원소가 하나인 집합이므로 1단계와 2단계에서 모두 만들어졌습니다. 두 자리 이상인 수는 증가하거나 감소하거나 둘 중 하나이고, 둘 다일 수는 없습니다. 따라서 정확히 9개의 수가 두 번 세어졌습니다.

$$511 + 1022 - 9 = 1524.$$

주의. 쉽게 저지르는 두 가지 실수가 각각 선택지에 있습니다. 1부터 9까지가 두 부류에서 모두 세어졌다는 것을 잊으면 $511 + 1022 = 1533$, 즉 선택지 (C)가 됩니다. 공집합과 $\{0\}$ 을 그대로 두고 중복도 무시한 채 부분집합의 개수만 더하면 $2^9 + 2^{10} = 1536$, 즉 선택지 (D)가 됩니다.

정답: (B) 1524

18 경우의 수와 확률

출처: 2017 AMC 10A 18번

아멜리아의 동전은 앞면이 나올 확률이 $\frac{1}{3}$ 이고, 블레인의 동전은 앞면이 나올 확률이 $\frac{2}{5}$ 이다. 아멜리아와 블레인은 누군가 앞면이 나올 때까지 번갈아 가며 자신의 동전을 던지고, 먼저 앞면이 나온 사람이 이긴다. 모든 동전 던지기는 서로 독립이다. 아멜리아가 먼저 던진다. 아멜리아가 이길 확률이 $\frac{p}{q}$ 이고 p 와 q 는 서로소인 양의 정수일 때, $q - p$ 의 값은?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

핵심 아이디어. 게임이 끝없이 이어질 수 있으므로 모든 경우를 나열할 수는 없습니다. 하지만 아무도 이기지 못한 채 한 판(아멜리아 뒷면, 이어서 블레인 뒷면)이 끝나면 게임은 처음과 **정확히** 같은 상태가 됩니다. 이 자기 닮음 덕분에 아멜리아가 이길 확률에 대한 방정식 하나를 세울 수 있습니다.

1단계. 아멜리아가 이길 확률을 x 라 합시다. 첫 번째 던지기에서 아멜리아는 확률 $\frac{1}{3}$ 로 곧바로 이깁니다.

2단계. 그렇지 않으면 아멜리아가 뒷면을 얻고(확률 $\frac{2}{3}$), 이어서 블레인도 뒷면을 얻습니다(확률 $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$). 두 일이 모두 일어날 확률은 다음과 같습니다.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}.$$

그러면 아무것도 바뀌지 않은 채 다시 아멜리아의 차례가 되므로, 그때부터 아멜리아가 이길 확률은 다시 x 입니다. 나머지 모든 경우에는 블레인이 이긴 것입니다.

3단계. 이기는 두 경로를 합치면

$$x = \frac{1}{3} + \frac{2}{5}x \implies \frac{3}{5}x = \frac{1}{3} \implies x = \frac{5}{9}.$$

5와 9는 서로소이므로 $p = 5$, $q = 9$ 이고 $q - p = 4$ 입니다.

다른 풀이. 게임을 끝내는 판만 봅시다. 어느 한 판에서 아멜리아가 이길 확률은 $\frac{1}{3} = \frac{5}{15}$, 블레인이 이길 확률은 $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$ 이고, 그 밖의 경우에는 그 판을 다시 합니다. 다시 하는 판은 누구에게도 유리하지 않으므로 이길 가능성은 계속 5 : 4의 비를 유지하고, 아멜리아가 이길 확률은 $\frac{5}{5+4} = \frac{5}{9}$ 입니다.

주의. 누구의 확률을 구했는지 확인합시다. 블레인이 이길 확률은 $1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$ 이고, 이 값을 답으로 삼으면 $q - p = 9 - 4 = 5$, 즉 선택지 (E)가 됩니다.

정답: (D) 4

19 대수

출처: 2006 AMC 10A 19번

세 각의 크기를 도 단위로 나타낸 값이 서로 다른 양의 정수이고 등차수열을 이루는 삼각형 중에서, 서로 닮음이 아닌 것은 몇 개인가?

- (A) 0 (B) 1 (C) 59 (D) 89 (E) 178

핵심 아이디어. 등차수열을 이루는 세 수는 가운데 수를 중심으로 **대칭적으로** $n - d, n, n + d$ 로 쓰는 것이 가장 좋습니다. 그러면 세 수의 합은 그냥 $3n$ 입니다. 각의 합 180° 로부터 n 이 곧바로 정해지고, 셀 것은 d 뿐입니다. “서로 닮음이 아닌”이라는 말은 삼각형이 세 각으로 결정된다는 것을 알려 줍니다.

1단계. 세 각을 작은 것부터 $n - d, n, n + d$ ($d \geq 0$)로 놓습니다. 그 합은 다음과 같습니다.

$$(n - d) + n + (n + d) = 3n = 180,$$

따라서 가운데 각은 항상 $n = 60^\circ$ 입니다.

2단계. 이제 가능한 d 를 찾습니다. 세 각은 **서로 달라야** 하므로 $d \neq 0$, 즉 $d \geq 1$ 입니다. 가장 작은 각은 **양수여야** 하므로 $60 - d > 0$, 즉 $d \leq 59$ 입니다. 1부터 59까지의 모든 정수 d 가 가능하며, 이때 세 각은 다음과 같습니다.

$$59^\circ, 60^\circ, 61^\circ, \quad 58^\circ, 60^\circ, 62^\circ, \quad \dots, \quad 1^\circ, 60^\circ, 119^\circ.$$

3단계. 두 삼각형이 닮음인 것은 세 각이 같을 때와 정확히 일치합니다. d 의 값이 다르면 가장 작은 각이 다르므로 이 59개의 삼각형은 어느 두 개도 닮음이 아니고, 1단계에서 보았듯이 다른 삼각형은 없습니다.

주의. d 와 $-d$ 를 따로 세면 안 됩니다. $60 - d, 60, 60 + d$ 와 $60 + d, 60, 60 - d$ 는 같은 세 각이므로 닮음의 관점에서 같은 삼각형입니다. 둘 다 세면 118이 되는데, 이것은 선택지에 없습니다. 마찬가지로 $d = 0$ (정삼각형)은 “서로 다른”이라는 조건 때문에 제외됩니다.

정답: (C) 59

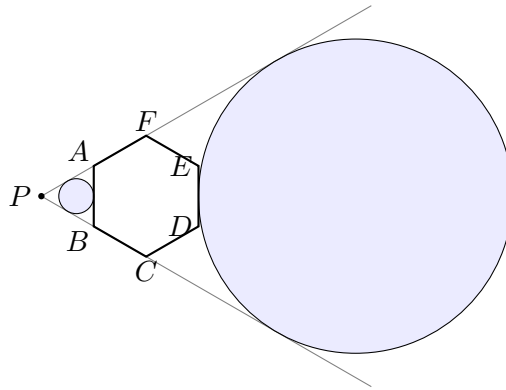
20 기하

출처: 2010 AMC 10B 20번

두 원이 정육각형 $ABCDEF$ 의 외부에 있다. 첫째 원은 $\overline{AB}$ 에 접하고, 둘째 원은 $\overline{DE}$ 에 접한다. 두 원은 모두 직선 BC 와 FA 에 접한다. 둘째 원의 넓이는 첫째 원의 넓이의 몇 배인가?

- (A) 18 (B) 27 (C) 36 (D) 81 (E) 108

핵심 아이디어. “두 원은 모두 직선 BC 와 FA 에 접한다”라는 문장이 신호입니다. 이 두 직선을 연장하여 한 점 P 에서 만나게 합시다. 그러면 두 원은 모두 P 에서의 같은 각 안에 놓이고, 각 안에 있는 원의 반지름은 P 에서 중심까지의 거리의 일정한 비율입니다. 따라서 모든 것은 P 로부터의 거리를 재는 문제로 바뀝니다.



1단계. 정육각형의 한 변의 길이를 1로 놓습니다. 정육각형의 각 내각은 120° 이므로, 직선 BC 와 FA 는 각각 $\overline{AB}$ 와 $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ 의 각을 이룹니다. 따라서 두 직선은 $\overline{AB}$ 바깥쪽의 한 점 P 에서 만나고, $\triangle PAB$ 는 한 변의 길이가 1인 정삼각형입니다. 이 삼각형의 P 에서의 각은 60° 이고, P 에서 켜 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 입니다.

2단계. 이 60° 각의 두 변에 모두 접하는 원은 중심이 각의 이등분선, 즉 P 와 정육각형의 중심을 지나는 직선 위에 있습니다. 중심이 P 로부터 거리 d 만큼 떨어져 있으면 반지름은 $d \sin 30^\circ = \frac{d}{2}$ 입니다. 따라서 각 원에 대하여 P 에서 중심까지의 거리 $= 2r$ 입니다.

3단계. 첫째 원은 $\triangle PAB$ 의 세 변에 접하면서 정육각형의 바깥에 있으므로 $\triangle PAB$ 의 내접원입니다. 그 중심은 높이를 따라 $\frac{2}{3}$ 만큼 내려간 지점, 즉 P 로부터 $\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 만큼 떨어진 곳에 있으므로 $r_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$ 입니다.

4단계. 둘째 원은 직선 DE 에 먼 쪽에서 접합니다. P 에서 직선 DE 까지의 거리는 삼각형의 높이에 정육각형의 높이(중심에서 한 변까지 거리의 두 배)를 더한 $\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 입니다. 둘째 원의 중심은 DE 에서 r_2 만큼 더 떨어져 있으므로, 2단계에 의해

$$2r_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + r_2 \implies r_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

5단계. 반지름의 비는 $\frac{r_2}{r_1} = \frac{3\sqrt{3}/2}{\sqrt{3}/6} = 9$ 이므로, 넓이의 비는 $9^2 = 81$ 입니다.

주의. 세 직선 BC, FA, DE 는 한 변의 길이가 3인 정삼각형을 이루는데, 그 **내접원**(반지름 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 넓이의 비 9)을 답으로 고르고 싶어집니다. 하지만 그 원은 정육각형 자신의 내접원으로, 정육각형의 **안쪽**에 있습니다. 둘째 원은 정육각형 바깥, $\overline{DE}$ 너머에 있어야 합니다. 또 반지름의 비를 제공하는 것도 잊지 맙시다.

정답: (D) 81

21 대수

출처: 2011 AMC 10B 21번

브라이언은 합이 44인 네 정수 $w > x > y > z$ 를 적는다. 이 수들에서 두 수씩 짝지어 구한 양의 차는 1, 3, 4, 5, 6, 그리고 9이다. 가능한 w 의 값의 합은?

- (A) 16 (B) 31 (C) 48 (D) 62 (E) 93

핵심 아이디어. 네 수를 수직선 위의 점으로 생각해 봅시다. 가장 큰 차는 양 끝 두 점 사이의 거리여야 하고, 가운데에 있는 각 점은 그 거리를 두 간격으로 나누는데, 두 간격을 **더하면** 그 거리가 됩니다. 합이 9가 되는 쌍을 찾으면 가능성이 거의 남지 않습니다.

1단계: 양 끝. 여섯 개의 차 중 가장 큰 것은 가장 큰 수와 가장 작은 수 사이의 거리이므로 $w - z = 9$ 입니다.

2단계: 합이 9인 쌍. 가운데 수 x 에 대해 두 간격 $w - x$ 와 $x - z$ 의 합은 $w - z = 9$ 입니다. y 에 대해서도 마찬가지로 $(w - y) + (y - z) = 9$ 입니다. 이 네 간격과 $x - y$ 가 남은 다섯 개의 차 1, 3, 4, 5, 6이며, 각각 한 번씩 쓰입니다. 값 1은 합이 9인 쌍에 들어갈 수 없습니다(8이 필요하기 때문입니다). 따라서 두 쌍은 $\{3, 6\}$ 과 $\{4, 5\}$ 이고, 남은 차는 $x - y = 1$ 입니다.

3단계: 경우 나누기. 쌍 $\{w - x, x - z\}$ 는 $\{3, 6\}$, $\{4, 5\}$ 중 하나이고, $\{w - y, y - z\}$ 는 나머지 하나입니다. 또 $w - y = (w - x) + 1$ 이어야 합니다.

- $w - x = 3, w - y = 4$: 네 수는 $w, w - 3, w - 4, w - 9$ 입니다.
- $w - x = 5, w - y = 6$: 네 수는 $w, w - 5, w - 6, w - 9$ 입니다.
- $w - x = 4$ 이면 $w - y = 5$ 여야 하는데, 5는 이미 $x - z$ 입니다. $w - x = 6$ 이면 $w - y = 7$ 이어야 합니다. 두 경우 모두 불가능합니다.

4단계: 합 이용하기. 첫째 경우에는 $4w - 16 = 44$ 이므로 $w = 15$ 이고, 네 수 15, 12, 11, 6의 차는 3, 4, 9, 1, 6, 5입니다. 둘째 경우에는 $4w - 20 = 44$ 이므로 $w = 16$ 이고, 네 수 16, 11, 10, 7의 차는 5, 6, 9, 1, 4, 3입니다. 두 경우 모두 성립하므로 답은 $15 + 16 = 31$ 입니다.

주의. 문제는 가능한 값의 합을 묻고 있는데, 이것은 가능한 값이 둘 이상이라는 강한 힌트입니다. 16, 11, 10, 7만 찾고 멈추면 16, 즉 선택지 (A)가 됩니다. (15, 12, 11, 6만 찾으면 15가 나오는데, 이것은 선택지에조차 없습니다. 무언가 빠졌다는 신호입니다.)

22 경우의 수와 확률

출처: 2015 AMC 10A 22번

여덟 사람이 원탁에 둘러앉아 있고, 각자 공정한 동전을 하나씩 들고 있다. 여덟 사람 모두 동전을 던져, 앞면이 나온 사람은 일어서고 뒷면이 나온 사람은 그대로 앉아 있다. 서로 이웃한 두 사람이 함께 서 있는 경우가 없을 확률은?

- (A) $\frac{47}{256}$ (B) $\frac{3}{16}$ (C) $\frac{49}{256}$ (D) $\frac{25}{128}$ (E) $\frac{51}{256}$

핵심 아이디어. 모든 $2^8 = 256$ 가지 결과는 일어날 가능성이 같으므로, 좋은 결과의 개수만 세면 됩니다. 한 줄로 앉은 사람들에서 “이웃한 두 사람이 함께 서지 않는” 경우는 점화식으로 쉽게 셀 수 있습니다. 원이 더 어려운 이유는 양 끝이 맞닿아 있기 때문일 뿐입니다. 그러므로 원을 끊어 봅시다. 한 사람이 어떻게 하는지 정하면, 남은 사람들은 한 줄이 됩니다.

1단계: 한 줄로 앉은 사람들. 한 줄로 앉은 n 명이 서거나 앉는 패턴 중에서 이웃한 두 사람이 함께 서지 않는 것의 개수를 a_n 이라 합시다. 마지막 사람을 봅시다. 그 사람이 앉으면 처음 $n-1$ 명은 아무 좋은 패턴이나 이루면 되므로 a_{n-1} 가지입니다. 그 사람이 서면 바로 앞 사람은 앉아야 하고, 처음 $n-2$ 명은 아무 좋은 패턴이나 이루면 되므로 a_{n-2} 가지입니다. 따라서 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ 입니다.

2단계: 수 구하기. 한 사람은 앉거나 설 수 있으므로 $a_1 = 2$ 입니다. 두 사람의 좋은 패턴은 (둘 다 서는 경우를 빼면) 3가지이므로 $a_2 = 3$ 입니다. 그러면 다음을 얻습니다.

$$a_3 = 5, \quad a_4 = 8, \quad a_5 = 13, \quad a_6 = 21, \quad a_7 = 34.$$

3단계: 원 끊기. 원탁을 따라 사람들에게 1부터 8까지 번호를 붙이고, 1번 사람을 봅시다.

- 1번 사람이 앉는 경우. 그러면 2, 3, ..., 8번 사람이 남습니다. 2번과 8번 사람은 1번 사람을 통해서만 이웃했으므로, 이 일곱 명은 한 줄을 이룹니다. 따라서 $a_7 = 34$ 가지입니다.
- 1번 사람이 서는 경우. 그러면 양옆의 이웃인 2번과 8번 사람은 모두 앉아야 하고, 3, ..., 7번 사람은 다섯 명으로 된 한 줄을 이룹니다. 따라서 $a_5 = 13$ 가지입니다.

그러므로 좋은 결과는 $34 + 13 = 47$ 가지이고, 확률은 $\frac{47}{256}$ 입니다.

다른 풀이. 서 있는 사람의 수로 나누어 세어 봅시다. 0명 또는 1명이 서는 경우는 $1 + 8 = 9$ 가지입니다. 2명이 서는 경우는 이웃한 8쌍을 제외한 모든 쌍이므로 $\binom{8}{2} - 8 = 20$ 가지입니다. 3명이 서는 경우에는 서는 사람 한 명을 고르고(8가지), 나머지 두 명을 그 사람과 이웃하지 않은 5개의 자리에서 고릅니다. 이 자리들은 한 줄을 이루고 두 사람이 이웃하면 안 되므로 $\binom{5}{2} - 4 = 6$ 가지입니다. 각 집합은 그 3명의 구성원마다 한 번씩 세어졌으므로 $\frac{8 \cdot 6}{3} = 16$ 가지입니다. 4명이 서는 경우는 번갈아 서는 두 패턴뿐입니다. 다섯 명 이상이 서려면 그들 사이에 앉은 사람이 적어도 다섯 명 있어야 하므로 8개의 자리로는 부족합니다. 합계는 $9 + 20 + 16 + 2 = 47$ 입니다.

주의. 원탁이라는 것(즉 1번과 8번 사람이 이웃한다는 것)을 잊으면 여덟 명이 한 줄로 앉은 경우를 세게 되어 $a_8 = 55$ 가지와 확률 $\frac{55}{256}$ 를 얻습니다. 이것은 선택지에 없습니다.

정답: (A) $\frac{47}{256}$

23 대수

출처: 2019 AMC 10A 23번

트레비스는 말쑥꾸러기 톰프슨 세쌍둥이를 돌봐야 한다. 세쌍둥이가 큰 수를 좋아한다는 것을 알고 있는 트레비스는 이들을 위해 수 세기 놀이를 고안한다. 먼저 태드가 수 1을 말하면, 이어서 토드가 다음 두 수(2와 3)를, 터커가 다음 세 수(4, 5, 6)를, 다시 태드가 다음 네 수(7, 8, 9, 10)를 말해야 한다. 이런 식으로 세 아이가 차례대로 돌아가며, 각자 바로 앞 아이보다 수를 하나 더 많이 말하는 과정을 수 10,000에 도달할 때까지 계속한다. 태드가 말하는 2019번째 수는?

- (A) 5743 (B) 5885 (C) 5979 (D) 6001 (E) 6011

핵심 아이디어. 이야기를 걸어 내면, 정수들이 길이가 1, 2, 3, 4, ... 인 연속된 묶음으로 말해지고 태드는 세 번째 묶음마다 하나씩을 말합니다. 묶음의 크기가 매번 하나씩 커진다는 것은 $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ 과 같은 삼각수가 등장한다는 뜻입니다. 그러므로 하나하나 따라가지 않고 곧바로 해당 묶음으로 건너뛸 수 있습니다.

1단계: 태드의 묶음. 묶음을 차례대로 1, 2, 3, ... 번째 차례라 부릅시다. t 번째 차례에는 수가 t 개 있습니다. 태드는 1, 4, 7, ... 번째 차례에 말하므로, 태드의 i 번째 차례는 전체의 $3i - 2$ 번째 차례이고 수가 $3i - 2$ 개 있습니다. (확인: 태드의 처음 몇 차례는 {1}, 그다음 7-10, 그다음 22-28입니다.)

2단계: 태드의 몇 번째 차례인가? 태드가 자기 차례를 i 번 마쳤을 때 태드가 말한 수의 개수는 다음과 같습니다.

$$1 + 4 + 7 + \dots + (3i - 2) = \frac{i(1 + (3i - 2))}{2} = \frac{i(3i - 1)}{2}$$

$\frac{3i^2}{2} \approx 2019$ 에서 $i \approx 37$ 이므로 근처의 값을 시험해 봅시다. $i = 36$ 이면 $\frac{36 \cdot 107}{2} = 1926$ 이고, $i = 37$ 이면 $\frac{37 \cdot 110}{2} = 2035$ 입니다. 따라서 태드의 2019번째 수는 태드의 37번째 차례 중에 나오며, 그 차례의 $2019 - 1926 = 93$ 번째 수입니다.

3단계: 그 차례가 시작하는 수. 태드의 37번째 차례는 전체에서 $3 \cdot 37 - 2 = 109$ 번째 차례이고, 수가 $109 \geq 93$ 개 있습니다. 1번째부터 108번째 차례까지 사용한 수의 개수는 다음과 같습니다.

$$1 + 2 + \dots + 108 = \frac{108 \cdot 109}{2} = 5886$$

따라서 109번째 차례는 5887에서 시작합니다. 그 차례의 93번째 수는 $5886 + 93 = 5979$ 이고, 이 수는 10,000보다 작으므로 놀이는 아직 계속되는 중입니다.

주의. 3단계에서 하나 차이로 틀리는 실수를 조심합니다. 묶음이 5887에서 시작하므로 그 93번째 수는 $5887 + 92 = 5979$ 입니다. 시작하는 수에 93을 더하면 5980이 나오는데, 이것은 선택지에 없으므로 실수했다는 신호입니다.

정답: (C) 5979

24 정수론

출처: 2008 AMC 10A 24번

$k = 2008^2 + 2^{2008}$ 이라 하자. $k^2 + 2^k$ 의 일의 자리 숫자는?

- (A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

핵심 아이디어. k 는 계산하기에는 너무 크지만, 일의 자리 숫자는 약간의 정보에만 의존합니다. k^2 에 대해서는 k 의 일의 자리 숫자가 필요합니다. 2^k 에 대해서는 다른 것이 필요합니다. 2의 거듭제곱의 일의 자리 숫자는 4를 주기로 반복되므로, k 를 4로 나눈 나머지가 필요합니다.

1단계: 2의 거듭제곱. $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \dots$ 의 일의 자리 숫자는 2, 4, 8, 6, 2, ... 입니다. 새 숫자는 이전 숫자의 두 배의 일의 자리 숫자이므로, 이 패턴은 주기 4로 반복됩니다. 특히 n 이 4의 양의 배수이면 2^n 의 일의 자리 숫자는 6입니다.

2단계: k 의 일의 자리 숫자. 2008^2 의 일의 자리 숫자는 $8^2 = 64$ 의 일의 자리 숫자와 같은 4입니다. 2008은 4의 배수이므로 2^{2008} 의 일의 자리 숫자는 6입니다. 따라서 k 의 일의 자리 숫자는 $4 + 6 = 10$ 의 일의 자리 숫자인 0이고, 그러므로 k^2 의 일의 자리 숫자는 0입니다.

3단계: k 를 4로 나누기. $2008 = 4 \cdot 502$ 이므로 2008^2 은 4의 배수이고, 2^{2008} 도 당연히 4의 배수입니다. 따라서 k 는 4의 양의 배수이고, 1단계에 의해 2^k 의 일의 자리 숫자는 6입니다.

4단계. $k^2 + 2^k$ 의 일의 자리 숫자는 $0 + 6$ 의 일의 자리 숫자인 6입니다.

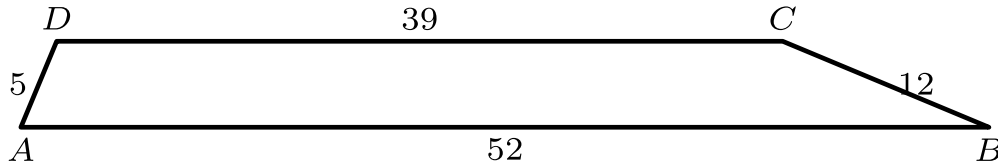
주의. k 의 일의 자리 숫자가 0이라는 것만으로는 2^k 을 알기에 부족합니다. $2^{10} = 1024$ 의 일의 자리 숫자는 4이지만, $2^{20} = 1048576$ 의 일의 자리 숫자는 6입니다. “ k 는 10처럼 0으로 끝나므로 2^k 은 4로 끝난다”라고 추론하면 $0 + 4 = 4$, 즉 선택지 (C)가 됩니다. 중요한 것은 지수를 4로 나눈 나머지입니다.

정답: (D) 6

25 기하

출처: 2002 AMC 10A 25번

평행한 두 변이 $\overline{AB}$ 와 $\overline{CD}$ 인 사다리꼴 $ABCD$ 에서 $AB = 52$, $BC = 12$, $CD = 39$, $DA = 5$ 이다. $ABCD$ 의 넓이는?



- (A) 182 (B) 195 (C) 210 (D) 234 (E) 260

핵심 아이디어. 넓이 공식 $\frac{1}{2}(AB + CD) \cdot h$ 에는 높이 h 만 있으면 됩니다. 네 변의 길이를 모두 알 때 높이를 구하는 표준적인 방법은 한쪽 옆변(평행하지 않은 변)을 평행이동하여 다른 쪽 옆변과 맞닿게 하는 것입니다. 그러면 사다리꼴은 평행사변형 하나와, 두 옆변과 두 밑변의 차를 세 변으로 하는 삼각형 하나로 나뉩니다. 여기서는 그 세 변이 5, 12, $52 - 39 = 13$ 이고, 이것이 피타고라스 세 수라는 점이 결정적인 단서입니다.

1단계: 옆변 옮기기. C 를 지나고 $\overline{DA}$ 에 평행한 직선을 그어 $\overline{AB}$ 와 만나는 점을 E 라 합시다. 그러면 $AECD$ 는 평행사변형(두 쌍의 대변이 각각 평행)이므로

$$AE = DC = 39, \quad CE = DA = 5, \quad EB = AB - AE = 52 - 39 = 13.$$

2단계: 직각삼각형. 삼각형 CEB 의 세 변은 $CE = 5$, $BC = 12$, $EB = 13$ 입니다. $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$ 이므로, 이 삼각형은 가장 긴 변 $\overline{EB}$ 의 맞은편 꼭짓점 C 가 직각인 직각삼각형입니다.

3단계: 높이. 사다리꼴의 높이는 C 에서 직선 $\overline{AB}$ 까지의 거리이고, 이것은 $\triangle CEB$ 에서 C 에서 $\overline{EB}$ 에 내린 높이이기도 합니다. $\triangle CEB$ 의 넓이를 두 가지 방법으로 구해 봅시다. 직각을 낀 두 변을 이용하면 $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$ 이고, 밑변을 EB 로 잡으면 $\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot h$ 입니다. 따라서 $13h = 60$ 이고 $h = \frac{60}{13}$ 입니다.

4단계: 넓이. 넓이를 $[\cdot]$ 로 나타내면

$$[ABCD] = \frac{1}{2}(52 + 39) \cdot \frac{60}{13} = \frac{1}{2} \cdot 91 \cdot \frac{60}{13} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 60 = 210.$$

다른 풀이. 옆변 $\overline{AD}$ 와 $\overline{BC}$ 를 D 와 C 너머로 연장하여 만나는 점을 P 라 합시다. $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ 이므로 $\triangle PDC \sim \triangle PAB$ 이고, 닮음비는 $\frac{39}{52} = \frac{3}{4}$ 입니다. $\frac{PD}{PD+5} = \frac{3}{4}$ 에서 $PD = 15$ 이고, $\frac{PC}{PC+12} = \frac{3}{4}$ 에서 $PC = 36$ 이므로 $PA = 20$, $PB = 48$ 입니다. 이제 $15 : 36 : 39 = 3 \cdot (5 : 12 : 13)$ 이므로 P 에서의 각은 직각이고, 따라서

$$[ABCD] = [PAB] - [PDC] = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 48 - \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 36 = 480 - 270 = 210.$$

주의. 그림에서 $\overline{DA}$ 는 거의 수직으로 보이지만 실제로는 기울어져 있습니다. 높이는 5가 아니라 $\frac{60}{13} \approx 4.6$ 입니다. 5를 높이로 쓰면 227.5가 나오는데, 이것은 선택지에 없습니다. 마찬가지로 $\triangle CEB$ 의 직각은 B 가 아니라 C 에 있으므로, 12도 높이가 아닙니다.

정답: (C) 210