
AMC 10

실전 모의고사

제 4 회

해설

정답표 • 출처 • 단계별 풀이

정답표와 출처

번호	정답	출처	영역
1	E	2009 AMC 10A 1번	대수
2	A	2019 AMC 10A 2번	정수론
3	E	2013 AMC 10A 3번	기하
4	B	2010 AMC 10A 4번	대수
5	D	2018 AMC 10B 5번	경우의 수와 확률
6	B	2005 AMC 10A 6번	대수
7	C	2001 AMC 10 7번	대수
8	E	2014 AMC 10B 8번	대수
9	A	2019 AMC 10B 9번	대수
10	B	2014 AMC 10A 10번	대수
11	C	2006 AMC 10A 11번	기하
12	A	2016 AMC 10A 12번	경우의 수와 확률
13	C	2010 AMC 10B 13번	대수
14	C	2015 AMC 10A 14번	기하
15	E	2000 AMC 10 15번	대수
16	D	2004 AMC 10A 16번	경우의 수와 확률
17	C	2012 AMC 10B 17번	기하
18	E	2016 AMC 10B 18번	정수론
19	E	2018 AMC 10A 19번	경우의 수와 확률
20	D	2004 AMC 10B 20번	기하
21	C	2012 AMC 10A 21번	기하
22	B	2003 AMC 10A 22번	기하
23	C	2009 AMC 10B 23번	경우의 수와 확률
24	C	2017 AMC 10A 24번	대수
25	D	2007 AMC 10A 25번	정수론

1 대수

출처: 2009 AMC 10A 1번

캔 하나에는 탄산음료 12온스가 들어간다. 탄산음료 한 갤런(128온스)을 마련하는 데 필요한 캔의 최소 개수는?

- (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11

핵심 아이디어. 전체 양을 캔 하나의 용량으로 나눈 뒤 올림합니다. 조금만 모자라도 캔 하나가 통째로 더 필요하기 때문입니다.

캔 하나에는 12온스가 들어가고, 필요한 양은 128온스입니다. 나누면 다음과 같습니다.

$$\frac{128}{12} = 10\frac{2}{3}.$$

따라서 캔 10개로는 조금 모자랍니다. $10 \cdot 12 = 120$ 온스만 담을 수 있어 8온스가 부족하기 때문입니다.

캔 열한 개에는 $11 \cdot 12 = 132$ 온스가 들어가며, 이는 128 이상입니다. 따라서 최소 개수는 11개입니다.

주의. $10\frac{2}{3}$ 에서 분수 부분을 그냥 버리면(내림) 10, 즉 선택지 (D)가 나옵니다. 하지만 캔 10개로는 한 갤런에 8온스가 모자랍니다. “충분한” 양이 필요할 때는 항상 올림해야 합니다.

정답: (E) 11

2 정수론

출처: 2019 AMC 10A 2번

$(20! - 15!)$ 의 백의 자리 숫자는?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 5

핵심 아이디어. 아무것도 직접 곱할 필요가 없습니다. 어떤 수가 1000의 배수이면 그 수의 백의 자리 숫자는 0입니다. 그러니 각 계승에 인수 10이 몇 개 들어 있는지 살펴봅시다.

1단계. $15! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 15$ 에는 인수 5, 10, 15가 들어 있고, 각각이 5를 하나씩 주므로 $15!$ 에는 소인수 5가 세 개 있습니다. 소인수 2는 (2, 4, 6, ...)에서 적어도 세 개 있는 것이 분명합니다. 따라서 $15!$ 는 $2^3 \cdot 5^3 = 1000$ 으로 나누어떨어집니다.

2단계. $20!$ 는 $15!$ 에 $16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20$ 을 곱한 것이므로, 역시 1000의 배수입니다.

3단계. 1000의 배수 두 개의 차는 1000의 배수이므로, $20! - 15!$ 는 000으로 끝납니다. 따라서 백의 자리 숫자는 0입니다.

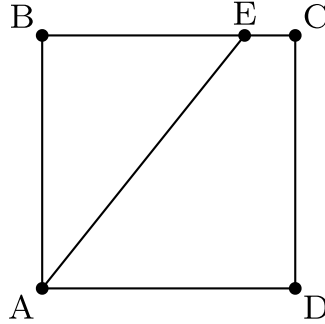
(실제로 $20! - 15! = 2\,432\,900\,700\,502\,272\,000$ 입니다.)

정답: (A) 0

3 기하

출처: 2013 AMC 10A 3번

정사각형 $ABCD$ 의 한 변의 길이는 10이다. 점 E 는 $\overline{BC}$ 위에 있고, $\triangle ABE$ 의 넓이는 40이다. BE 의 길이는?



- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

핵심 아이디어. $\triangle ABE$ 는 B (정사각형의 꼭짓점)에서 직각이므로, 두 직각변 AB 와 BE 를 밑변과 높이로 쓸 수 있습니다.

E 는 변 $\overline{BC}$ 위에 있으므로, 선분 $\overline{AB}$ 와 $\overline{BE}$ 는 정사각형의 직각인 꼭짓점 B 에서 만납니다. $\overline{BE}$ 를 밑변으로, 길이가 10인 $\overline{AB}$ 를 높이로 잡으면 다음과 같습니다.

$$40 = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot BE = 5 BE.$$

양변을 5로 나누면 $BE = 8$ 입니다.

주의. 삼각형 넓이 공식의 $\frac{1}{2}$ 을 빠뜨리면 $40 = 10 \cdot BE$ 가 되어 $BE = 4$, 즉 선택지 (A)가 나옵니다.

정답: (E) 8

4 대수

출처: 2010 AMC 10A 4번

소리 내어 읽는 데 412분이 걸리는 책을 콤팩트디스크에 녹음하려고 한다. 디스크 한 장에는 최대 56분 분량을 녹음할 수 있다. 가능한 한 가장 적은 수의 디스크를 사용하고, 각 디스크에는 같은 길이의 분량을 녹음한다고 하자. 디스크 한 장에 녹음되는 분량은 몇 분인가?

- (A) 50.2 (B) 51.5 (C) 52.4 (D) 53.8 (E) 55.2

핵심 아이디어. 먼저 필요한 디스크의 수를 구하고(올림), 412분을 그 디스크들에 똑같이 나눕니다.

1단계. 디스크 일곱 장에는 최대 $7 \cdot 56 = 392$ 분이 들어가는데, 이는 412보다 적으므로 7장으로는 부족합니다. 디스크 여덟 장에는 최대 $8 \cdot 56 = 448$ 분이 들어가므로 충분합니다. 따라서 디스크의 최소 개수는 8입니다.

2단계. 412분을 디스크 8장에 똑같이 나누면 한 장당 분량은 다음과 같습니다.

$$412 \div 8 = 51.5 \text{분},$$

이 값은 한계인 56분보다 작으므로 조건에 맞습니다.

주의. $412 \div 56 \approx 7.36$ 이므로 디스크 7장을 쓰고 싶어집니다. 하지만 그러면 디스크 한 장에 $412 \div 7 \approx 58.9$ 분을 담아야 해서 디스크의 용량을 넘습니다. 이 값이 선택지에 없다는 것도 7이 틀렸다는 힌트입니다.

정답: (B) 51.5

5 경우의 수와 확률

출처: 2018 AMC 10B 5번

집합 $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 의 부분집합 중 소수를 적어도 하나 포함하는 것의 개수는?

- (A) 128 (B) 192 (C) 224 (D) 240 (E) 256

핵심 아이디어. “적어도 하나”는 여사건을 세라는 신호입니다. 모든 부분집합의 수를 센 뒤, 소수를 하나도 포함하지 않는 부분집합의 수를 뺍니다.

1단계. 이 집합의 원소는 8개입니다. 각 원소는 부분집합에 들어가거나 들어가지 않으므로, 부분집합은 모두 $2^8 = 256$ 개입니다.

2단계. 이 집합에 있는 소수는 2, 3, 5, 7입니다. 부분집합이 소수를 하나도 포함하지 않는 것은 소수가 아닌 수 $\{4, 6, 8, 9\}$ 만 사용할 때뿐입니다. 이 집합은 원소가 4개이므로 부분집합은 $2^4 = 16$ 개입니다(공집합도 포함되는데, 공집합은 실제로 소수를 포함하지 않습니다).

3단계. 소수를 적어도 하나 포함하는 부분집합의 수는 $256 - 16 = 240$ 입니다.

주의. 2가 소수라는 것을 잊으면 소수가 아닌 수가 {2, 4, 6, 8, 9}가 되어 $2^8 - 2^5 = 256 - 32 = 224$, 즉 선택지 (C)가 나옵니다.

정답: (D) 240

6 대수

출처: 2005 AMC 10A 6번

20개의 수의 평균(산술평균)은 30이고, 다른 30개의 수의 평균은 20이다. 50개의 수 전체의 평균은?

- (A) 23 (B) 24 (C) 25 (D) 26 (E) 27

핵심 아이디어. 평균 뒤에는 합계가 숨어 있습니다. 각 묶음의 합계(평균 $\times$ 개수)를 되살리고, 합계끼리 더한 뒤 전체 개수로 나눕니다.

1단계. 평균이 30인 20개의 수의 합은 $20 \cdot 30 = 600$ 입니다.

2단계. 평균이 20인 30개의 수의 합은 $30 \cdot 20 = 600$ 입니다.

3단계. 50개의 수 전체의 합은 $600 + 600 = 1200$ 이므로, 평균은 다음과 같습니다.

$$\frac{1200}{50} = 24.$$

이 값은 30보다 20에 더 가깝습니다. 평균이 20인 묶음에 수가 더 많으므로 자연스러운 결과입니다.

주의. 두 평균을 다시 평균하면 $\frac{30+20}{2} = 25$ 로 선택지 (C)가 됩니다. 이 방법은 두 묶음의 크기가 같을 때만 통합니다. 여기서는 두 묶음에 각각 20개, 30개의 수가 있습니다.

정답: (B) 24

7 대수

출처: 2001 AMC 10 7번

소수로 나타낸 어떤 양수의 소수점을 오른쪽으로 네 자리 옮기면, 새로 얻은 수는 처음 수의 역수의 네 배가 된다. 처음 수는?

- (A) 0.0002 (B) 0.002 (C) 0.02 (D) 0.2 (E) 2

핵심 아이디어. 문장을 식으로 옮깁니다. 소수점을 오른쪽으로 네 자리 옮기면 그 수에 10 000을 곱한 것이 됩니다.

1단계. 처음 수를 x 라 하면 $x > 0$ 입니다. 새로 얻은 수는 $10\,000x$ 이고, x 의 역수의 네 배는 $4 \cdot \frac{1}{x} = \frac{4}{x}$ 입니다. 따라서 다음 식이 성립합니다.

$$10\,000x = \frac{4}{x}.$$

2단계. 양변에 x 를 곱하고 10 000으로 나누면 다음을 얻습니다.

$$x^2 = \frac{4}{10\,000}.$$

x 는 양수이므로 $x = \frac{2}{100} = 0.02$ 입니다.

검산. 0.02의 소수점을 오른쪽으로 네 자리 옮기면 200이 되고, $4 \cdot \frac{1}{0.02} = 4 \cdot 50 = 200$ 입니다. 두 값이 일치합니다.

정답: (C) 0.02

8 대수

출처: 2014 AMC 10B 8번

트럭 한 대가 t 초마다 $\frac{b}{6}$ 피트씩 달린다. 한 야드는 3피트이다. 이 트럭이 3분 동안 달리는 거리는 몇 야드인가?

- (A) $\frac{b}{1080t}$ (B) $\frac{30t}{b}$ (C) $\frac{30b}{t}$ (D) $\frac{10t}{b}$ (E) $\frac{10b}{t}$

핵심 아이디어. 모든 것을 문제가 묻는 단위, 즉 야드와 초로 바꾼 뒤 1초당 이동 거리를 구합니다.

1단계. 피트를 야드로 바꿉니다. $\frac{b}{6}$ 피트는 $\frac{b}{6} \div 3 = \frac{b}{18}$ 야드입니다. 즉 트럭은 t 초마다 $\frac{b}{18}$ 야드를 갑니다.

2단계. 1초당 거리를 구합니다. t 로 나누면 트럭은 매초 $\frac{b}{18t}$ 야드를 갑니다.

3단계. 삼 분은 $3 \cdot 60 = 180$ 초이므로, 이동 거리는 다음과 같습니다.

$$\frac{b}{18t} \cdot 180 = \frac{180b}{18t} = \frac{10b}{t} \text{ 야드.}$$

주의. 피트를 야드로 바꾸는 것을 잊으면 $\frac{b}{6t} \cdot 180 = \frac{30b}{t}$, 즉 선택지 (C)가 나옵니다. 답이 문제가 묻는 단위로 되어 있는지 항상 확인합시다.

정답: (E) $\frac{10b}{t}$

9 대수

출처: 2019 AMC 10B 9번

함수 f 는 모든 실수 x 에 대하여 다음과 같이 정의된다.

$$f(x) = \lfloor |x| \rfloor - \lfloor x \rfloor$$

단, $\lfloor r \rfloor$ 는 실수 r 보다 작거나 같은 최대의 정수이다. f 의 치역은?

- (A) $\{-1, 0\}$ (B) 양이 아닌 정수 전체의 집합 (C) $\{-1, 0, 1\}$
 (D) $\{0\}$ (E) 음이 아닌 정수 전체의 집합

핵심 아이디어. 두 항은 “절댓값 취하기”와 “내림하기”의 순서만 다릅니다. $x \geq 0$ 이면 두 연산의 순서를 바꿔도 결과가 같으므로, 눈여겨볼 경우는 음수 x 입니다. 경우를 나누어 봅시다.

경우 1: $x \geq 0$ 일 때. 이때 $|x| = x$ 이고 $\lfloor x \rfloor \geq 0$ 이므로, 두 항은 모두 $\lfloor x \rfloor$ 와 같고 $f(x) = 0$ 입니다.

경우 2: x 가 음의 정수일 때. 이때 $\lfloor x \rfloor = x$ 이고 두 항은 모두 $|x|$ 와 같으므로 $f(x) = 0$ 입니다.

경우 3: x 가 정수가 아닌 음수일 때. k 는 음이 아닌 정수, $0 < t < 1$ 로 하여 $x = -k - t$ 로 씁니다. 그러면 $|x| = k + t$ 이므로 $\lfloor |x| \rfloor = k$ 입니다. 그런데 x 를 내림하면 영에서 더 멀어집니다. $\lfloor x \rfloor = -k - 1$ 이므로 $\lfloor |x| \rfloor = k + 1$ 입니다. 따라서 $f(x) = k - (k + 1) = -1$ 입니다.

예를 들어 $x = -2.5$ 이면 $\lfloor 2.5 \rfloor = 2$ 이고 $\lfloor -2.5 \rfloor = -3$ 이므로 $f(-2.5) = -1$ 입니다.

0과 -1 두 값이 모두 나오고 다른 값은 나올 수 없으므로, 치역은 $\{-1, 0\}$ 입니다.

주의. 양수만(또는 정수만) 대입해 보면 항상 0이 나와서 선택지 (D)를 고르게 됩니다. $\lfloor -2.5 \rfloor = -3$ 이지 -2 가 아니라는 점을 기억합시다.

정답: (A) $\{-1, 0\}$

10 대수

출처: 2014 AMC 10A 10번

a 로 시작하는 연속한 다섯 개의 양의 정수의 평균이 b 이다. b 로 시작하는 연속한 5개의 정수의 평균은?

- (A) $a + 3$ (B) $a + 4$ (C) $a + 5$ (D) $a + 6$ (E) $a + 7$

핵심 아이디어. 연속한 다섯 정수의 평균은 가운데 수이고, 이는 첫째 수에 2를 더한 값입니다.

1단계. 정수 $a, a + 1, a + 2, a + 3, a + 4$ 의 합은 $5a + 10$ 이므로, 평균은 다음과 같습니다.

$$b = \frac{5a + 10}{5} = a + 2.$$

2단계. 같은 방법으로, b 로 시작하는 연속한 다섯 정수의 평균은 $b + 2$ 입니다.

3단계. $b = a + 2$ 를 대입하면 $b + 2 = (a + 2) + 2 = a + 4$ 입니다.

검산. $a = 1$ 이면 1, 2, 3, 4, 5의 평균은 $b = 3$ 이고, 3, 4, 5, 6, 7의 평균은 $5 = 1 + 4$ 입니다.

정답: (B) $a + 4$

11 기하

출처: 2006 AMC 10A 11번

방정식 $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ 의 그래프를 바르게 설명한 것은?

- (A) 공집합 (B) 한 점 (C) 두 직선 (D) 원 (E) 평면 전체

핵심 아이디어. 제곱을 전개합니다. 이 방정식은 $(x + y)^2$ 과 $x^2 + y^2$ 을 비교하는데, 둘의 차이는 가운데 항 $2xy$ 뿐입니다. 따라서 모든 것은 이 항이 언제 사라지는지에 달려 있습니다.

1단계. 좌변을 전개하면 다음과 같습니다.

$$x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + y^2.$$

2단계. 양변에서 $x^2 + y^2$ 을 빼면 $2xy = 0$, 즉 $xy = 0$ 입니다.

3단계. 곱이 영이 되는 것은 인수 중 하나가 영일 때뿐이므로, 이 방정식은 $x = 0$ 또는 $y = 0$ 일 때, 그리고 그때에만 성립합니다. $x = 0$ 인 점들은 y 축을 이루고, $y = 0$ 인 점들은 x 축을 이룹니다.

따라서 그래프는 두 좌표축, 즉 (원점에서 만나는) 두 직선입니다. 예를 들어 $(0, 5)$ 는 $25 = 0 + 25$ 이므로 성립하지만, $(1, 1)$ 은 $4 \neq 2$ 이므로 성립하지 않습니다.

주의. 모든 x, y 에 대해 $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ 이라고 믿으면($2xy$ 를 잊으면) 방정식이 어디서나 성립하는 것처럼 보여 선택지 (E)를 고르게 됩니다. 시험 삼아 넣어 본 점 $(1, 1)$ 이 그렇지 않음을 보여 줍니다.

정답: (C) 두 직선

12 경우의 수와 확률

출처: 2016 AMC 10A 12번

1 이상 2016 이하의 정수 중에서 서로 다른 세 정수를 임의로 택한다. 세 정수의 곱이 홀수일 확률 p 에 대한 설명으로 옳은 것은?

- (A) $p < \frac{1}{8}$ (B) $p = \frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{8} < p < \frac{1}{3}$ (D) $p = \frac{1}{3}$ (E) $p > \frac{1}{3}$

핵심 아이디어. 곱이 홀수가 되는 것은 모든 인수가 홀수일 때뿐입니다. 서로 다른이라는 말이 중요합니다. 정수를 비복원으로 뽑으므로, 정확한 확률을 “독립적인 동전 던지기”의 값 $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$ 과 비교해 봅시다.

1단계. 1부터 2016까지 홀수는 1008개, 짝수는 1008개입니다. 택한 세 정수의 곱이 홀수인 것은 세 정수가 모두 홀수일 때뿐입니다.

2단계. 정수를 하나씩 뽑아 봅시다. 첫째 수가 홀수일 확률은 $\frac{1008}{2016}$ 입니다. 그렇게 되었을 때 남은 2015개 중 홀수는 1007개이고, 그다음에는 2014개 중 1006개입니다. 따라서 확률은 다음과 같습니다.

$$p = \frac{1008}{2016} \cdot \frac{1007}{2015} \cdot \frac{1006}{2014}.$$

3단계. 각 인수를 $\frac{1}{2}$ 과 비교합니다. 첫째 인수는 $\frac{1}{2}$ 입니다. 둘째 인수는 $2 \cdot 1007 = 2014 < 2015$ 이므로 $\frac{1}{2}$ 보다 작습니다. 셋째 인수는 $2 \cdot 1006 = 2012 < 2014$ 이므로 $\frac{1}{2}$ 보다 작습니다.

따라서 $p < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ 입니다. (실제로 $p = \frac{503}{4030} \approx 0.1248$ 로, 0.125보다 아주 조금 작습니다.)

주의. 세 번의 선택을 독립으로 보고 각각 홀수일 확률을 $\frac{1}{2}$ 로 두면 $p = \frac{1}{8}$, 즉 선택지 (B)가 됩니다. 정수가 서로 다르므로 홀수를 하나 뽑을 때마다 남은 홀수가 조금씩 줄어들고, 그래서 p 는 조금 더 작습니다.

정답: (A) $p < \frac{1}{8}$

13 대수

출처: 2010 AMC 10B 13번

다음 방정식의 모든 해의 합은

$$x = |2x - |60 - 2x||?$$

- (A) 32 (B) 60 (C) 92 (D) 120 (E) 124

핵심 아이디어. 중첩된 절댓값은 한 겹씩 벗겨 내며, 겹마다 두 가지 경우가 생깁니다. 또 좌변은 x 이고 우변은 절댓값이므로, 모든 해는 $x \geq 0$ 을 만족해야 합니다. 이 사실로 마지막에 잘못된 후보를 걸러 낼 수 있습니다.

1단계: 바깥쪽 절댓값. $A = 2x - |60 - 2x|$ 라 할 때, $x = |A|$ 이려면 $A = x$ 또는 $A = -x$ 여야 합니다. 즉

$$2x - |60 - 2x| = x \quad \text{또는} \quad 2x - |60 - 2x| = -x,$$

이고, 이를 정리하면 다음과 같습니다.

$$|60 - 2x| = x \quad \text{또는} \quad |60 - 2x| = 3x.$$

2단계: 첫째 방정식 $|60 - 2x| = x$. $60 - 2x = x$ 이면 $3x = 60$ 이므로 $x = 20$ 입니다. $60 - 2x = -x$ 이면 $x = 60$ 입니다.

3단계: 둘째 방정식 $|60 - 2x| = 3x$. $60 - 2x = 3x$ 이면 $5x = 60$ 이므로 $x = 12$ 입니다. $60 - 2x = -3x$ 이면 $x = -60$ 입니다.

4단계: 검산. 원래 방정식의 우변은 절댓값이므로 x 는 음수가 아니어야 하고, 따라서 $x = -60$ 은 버립니다. (직접 확인하면 $x = -60$ 일 때 우변은 $|-120 - 180| = 300 \neq -60$ 입니다.) 나머지 세 값은 모두 성립합니다.

$$x = 12 : |24 - 36| = 12,$$

$$x = 20 : |40 - 20| = 20,$$

$$x = 60 : |120 - 60| = 60.$$

해의 합은 $12 + 20 + 60 = 92$ 입니다.

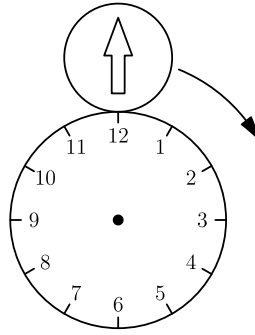
주의. 무언근 $x = -60$ 을 남겨 두면 $12 + 20 + 60 - 60 = 32$, 즉 선택지 (A)가 됩니다. 절댓값이 들어 있는 방정식에서는 후보를 반드시 원래 식에 대입해 확인합시다.

정답: (C) 92

14 기하

출처: 2015 AMC 10A 14번

아래 그림은 반지름이 20 cm인 원 모양의 시계판과, 12시 위치에서 시계판에 외접하는 반지름 10 cm인 원판을 나타낸 것이다. 원판에는 화살표가 그려져 있고, 처음에 화살표는 수직 위쪽을 가리킨다. 원판을 시계판 둘레를 따라 시계 방향으로 굴린다. 화살표가 다음번에 다시 수직 위쪽을 가리킬 때, 원판이 시계판과 접하는 곳은 시계판의 어느 위치인가?



- (A) 2시 (B) 3시 (C) 4시 (D) 6시 (E) 8시

핵심 아이디어. 화살표는 두 가지 이유로 회전합니다. 원판은 시계의 테두리를 따라 구르므로 **자전**하고, 또 시계 둘레를 **공전**하는데 이것만으로도 회전이 생깁니다. “외접 ... 둘레를 따라 굴린다”라는 표현이 두 효과가 더해진다는 신호입니다.

1단계: 움직임에 이름 붙이기. 접점이 12시에서부터 움직인 각을 시계의 중심에서 시계 방향으로 잰 값은 θ 라 합시다. 시각 눈금 사이의 간격은 $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$ 입니다.

2단계: 구르는 부분. 미끄러지지 않고 구른다는 것은 원판의 테두리와 시계의 테두리가 같은 길이만큼 지나간다는 뜻입니다. 접점은 시계 위에서 길이 20θ 인 호를 따라 움직였습니다. 원판의 테두리도 같은 길이만큼 그 위를 굴렀으므로, 원판은 **두 중심을 잇는 직선에 대하여** $\frac{20\theta}{10} = 2\theta$ 만큼 회전합니다.

3단계: 이동하는 부분. 두 중심을 잇는 직선 자체도 시계 방향으로 θ 만큼 회전했습니다. 따라서 화살표가 시계 방향으로 회전한 총량은 다음과 같습니다.

$$2\theta + \theta = 3\theta.$$

(달리 보면, 원판의 중심은 반지름 $20 + 10 = 30$ 인 원을 따라 움직이므로 그 경로의 길이는 30θ 이고, $\frac{30\theta}{10} = 3\theta$ 입니다.)

4단계: 화살표는 언제 다시 위를 가리키는가? 화살표가 다시 똑바로 위를 가리키는 첫 순간은 총 회전량인 한 바퀴가 될 때입니다. $3\theta = 360^\circ$ 이므로 $\theta = 120^\circ$ 입니다. 이는 12에서 시계 방향으로 $\frac{120^\circ}{30^\circ} = 4$ 칸 간 곳, 곧 4시입니다.

주의. 구르는 부분만 세면($2\theta = 360^\circ$ 이므로 $\theta = 180^\circ$) 6시, 즉 선택지 (D)가 됩니다. 원판이 시계 바깥을 돌면서 추가로 얻는 회전을 빠뜨린 것입니다. 같은 크기의 동전 둘레로 동전을 굴리면 한 바퀴가 아니라 두 바퀴 도는 것도 같은 이유입니다.

정답: (C) 4시

15 대수

출처: 2000 AMC 10 15번

영이 아닌 두 실수 a, b 가 $ab = a - b$ 를 만족시킬 때, 다음 식의 값이 될 수 있는 것은?

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab.$$

- (A) -2 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) 2

핵심 아이디어. 조건 $ab = a - b$ 는 어딘가에 대입하라고 주어진 식입니다. 주어진 식을 공통분모 ab 로 통분하면 $a^2 + b^2$ 이 생기고, $(ab)^2 = (a - b)^2$ 에도 $a^2 + b^2$ 이 들어 있으므로 서로 소거됩니다.

1단계: 한 분수로. 공통분모 ab 로 통분하면 다음과 같습니다.

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab = \frac{a^2 + b^2 - (ab)^2}{ab}.$$

2단계: 대입. 분자에서만 ab 를 $a - b$ 로 바꿉니다.

$$(ab)^2 = (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

따라서 분자는 $a^2 + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) = 2ab$ 입니다.

3단계: 정리. 식의 값은 $\frac{2ab}{ab} = 2$ 입니다. a 와 b 가 영이 아니므로 이렇게 약분할 수 있습니다.

다른 풀이. 문제는 가능한 값 하나만 묻고 있으므로 예 하나면 충분합니다. $ab = a - b$ 에서 $b(a + 1) = a$ 이므로 $b = \frac{a}{a+1}$ 입니다. $a = 1, b = \frac{1}{2}$ 로 두면 $ab = \frac{1}{2} = a - b$ 이고, 다음과 같습니다.

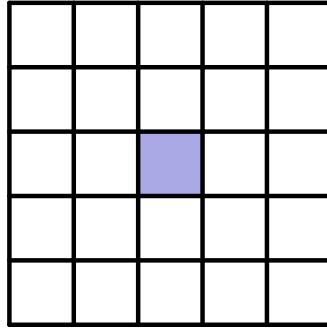
$$\frac{1}{1/2} + \frac{1/2}{1} - \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 2.$$

정답: (E) 2

16 경우의 수와 확률

출처: 2004 AMC 10A 16번

그림과 같은 5×5 격자에는 크기가 1×1 부터 5×5 까지인 정사각형들이 있다. 이 정사각형 중 색칠된 가운데 정사각형을 포함하는 것은 몇 개인가?



- (A) 12 (B) 15 (C) 17 (D) 19 (E) 20

핵심 아이디어. 정사각형을 크기별로 나누고, 크기마다 가운데 칸을 덮는 위치가 몇 개인지 셉니다. “가운데 칸을 포함한다”는 사실 두 조건입니다. 정사각형이 차지하는 행에 3행이 있어야 하고, 차지하는 열에 3열이 있어야 합니다. 따라서 행의 위치를 세고, 열의 위치를 세어 곱하면 됩니다.

1단계. 행에 1부터 5까지 번호를 붙이면 색칠된 칸은 3행에 있습니다. $k \times k$ 정사각형은 연속한 k 개의 행을 차지하며, 그중에 3행이 있어야 합니다.

- $k = 1$: 행 {3} 뿐이므로 1가지.
- $k = 2$: 행 {2, 3} 또는 {3, 4}로 2가지.
- $k = 3$: 행 {1, 2, 3}, {2, 3, 4}, {3, 4, 5}로 3가지.
- $k = 4$: 행 {1, 2, 3, 4} 또는 {2, 3, 4, 5}로 2가지.
- $k = 5$: 다섯 행 전체로 1가지.

2단계. 열도 똑같이 생각할 수 있고, 행의 선택과 열의 선택은 서로 독립입니다. 따라서 가운데 칸을 포함하는 $k \times k$ 정사각형의 개수는 행의 가짓수의 제곱입니다.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 1 + 4 + 9 + 4 + 1 = 19.$$

말로 하면, 가운데 칸 자체, 2×2 정사각형 네 개(가운데 칸의 각 꼭짓점마다 하나씩), 3×3 정사각형 아홉 개 전부, 4×4 정사각형 네 개 전부, 그리고 격자 전체입니다.

주의. 4×4 정사각형을 가장 빠뜨리기 쉽습니다. 어느 것도 색칠된 칸을 중심으로 하지 않지만, 각각 바깥쪽 행 하나와 열 하나만 빠지므로 네 개 모두 가운데 칸을 포함합니다. 이것들을 빼먹으면(또는 2×2 정사각형 네 개를 빼먹으면) $19 - 4 = 15$, 즉 선택지 (B)가 됩니다.

정답: (D) 19

17 기하

출처: 2012 AMC 10B 17번

제시는 반지름이 12인 원 모양의 종이를 두 반지름을 따라 잘라 두 개의 부채꼴을 만든다. 이때 작은 부채꼴의 중심각은 120° 이다. 각 부채꼴을 원뿔의 옆면으로 하여 두 개의 원뿔을 만든다. 큰 원뿔의 부피에 대한 작은 원뿔의 부피의 비는?

- (A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ (D) $\frac{\sqrt{5}}{6}$ (E) $\frac{\sqrt{10}}{5}$

핵심 아이디어. 부채꼴을 말아 원뿔을 만들면 두 가지가 그대로 옮겨 갑니다. 부채꼴의 반지름은 원뿔의 모선의 길이가 되고, 부채꼴의 호는 밑면의 둘레가 됩니다. 문제에는 반지름과 각이 정확히 주어져 있으므로 이 두 사실이면 충분하고, 그다음 피타고라스 정리로 각 원뿔의 높이를 구합니다.

1단계: 부채꼴. 두 부채꼴을 합치면 원 전체가 되므로, 큰 부채꼴의 중심각은 $360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$ 입니다. 둘 다 반지름이 12이므로 두 원뿔의 모선의 길이는 모두 12입니다.

2단계: 밑면의 반지름. 원 전체의 둘레는 $2\pi \cdot 12 = 24\pi$ 입니다. 120° 인 호의 길이는 그 $\frac{1}{3}$ 인 8π 이고, $2\pi r = 8\pi$ 로 놓으면 밑면의 반지름은 $r = 4$ 입니다. 240° 인 호의 길이는 그 $\frac{2}{3}$ 인 16π 이므로, 큰 원뿔의 밑면의 반지름은 8입니다.

3단계: 높이. 높이, 밑면의 반지름, 모선은 직각삼각형을 이룹니다.

$$h_{\text{소}} = \sqrt{12^2 - 4^2} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}, \quad h_{\text{대}} = \sqrt{12^2 - 8^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

4단계: 부피. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ 에서 비를 구할 때 $\frac{1}{3}\pi$ 는 약분됩니다.

$$\frac{V_{\text{소}}}{V_{\text{대}}} = \frac{4^2 \cdot 8\sqrt{2}}{8^2 \cdot 4\sqrt{5}} = \frac{128\sqrt{2}}{256\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}}{2 \cdot 5} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

주의. 두 원뿔은 닮음이 아닙니다. 모선의 길이 12가 같으므로 밑면이 좁은 쪽이 더 높습니다. 닮음이라고 보고 반지름의 비 $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ 을 세제곱하면 $\frac{1}{8}$, 즉 선택지 (A)가 되고, 밑넓이만 비교하여 $(\frac{1}{2})^2$ 을 구하면 $\frac{1}{4}$, 즉 선택지 (B)가 됩니다.

정답: (C) $\frac{\sqrt{10}}{10}$

18 정수론

출처: 2016 AMC 10B 18번

345를 두 개 이상의 연속한 양의 정수로 이루어진 증가하는 수열의 합으로 나타내는 방법은 몇 가지인가?

- (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 6 (E) 7

핵심 아이디어. 연속한 정수의 나열은 등차수열이므로, 그 합은 (항의 개수)×(평균)이라는 공식으로 구할 수 있습니다. 이 공식을 써 보면 “합이 345이다”가 “두 정수의 곱이 690이다”로 바뀌고, 어떤 수를 두 수의 곱으로 나타내는 방법의 수는 이미 셀 줄 아는 것입니다.

1단계: 식 세우기. 수열의 항이 $n \geq 2$ 개, 첫째 항이 $a \geq 1$ 이라 하면 항은 $a, a+1, \dots, a+n-1$ 입니다. 그 합은 n 에 첫째 항과 끝항의 평균을 곱한 것입니다.

$$n \cdot \frac{a + (a + n - 1)}{2} = 345 \implies n(2a + n - 1) = 690.$$

2단계: 두 인수가 만족해야 할 조건. 둘째 인수를 $m = 2a + n - 1$ 이라 합시다. 그러면 다음이 성립합니다.

- $m - n = 2a - 1$ 은 홀수이므로 n 과 m 은 홀짝이 다릅니다.
- $a \geq 1$ 이므로 $m - n \geq 1$, 즉 $n < m$ 입니다.
- 거꾸로, $n < m$ 이고 홀짝이 다른 인수분해 $690 = n \cdot m$ 이 있으면 $a = \frac{m-n+1}{2}$ 은 양의 정수가 되어 조건에 맞습니다.

3단계: 세기. $690 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 23$ 의 약수는 $2^4 = 16$ 개이므로, $n < m$ 인 인수 쌍은 8개입니다. 690에는 소인수 2가 정확히 하나 들어 있으므로, 모든 쌍에서 한 인수는 짝수이고 다른 인수는 홀수입니다. 즉 8쌍 모두 홀짝 조건을 통과합니다. 제외되는 것은 $n = 1, m = 690$ 인 쌍뿐인데, 이것은 항이 하나뿐인 “합” 345 자신이기 때문입니다. 따라서 7가지가 남습니다.

검산. 일곱 가지 합을 길이 n 별로 나타내면 다음과 같습니다.

n	2	3	5	6	10	15	23
항	172-173	114-116	67-71	55-60	30-39	16-30	4-26

예를 들어 $4 + 5 + \dots + 26$ 은 항이 23개이고 평균이 15이며, $23 \cdot 15 = 345$ 입니다.

주의. 345를 홀수 길이 n 으로 나누면 가운데 항이 나온다는 “가운데 항” 지름길로는 홀수 길이 3, 5, 15, 23만 찾을 수 있습니다. 172 + 173처럼 길이가 짝수인 경우는 가운데 항이 없지만 그래도 세어야 합니다. 그래서 345가 아니라 $2 \cdot 345 = 690$ 의 인수분해를 살펴봐야 합니다.

정답: (E) 7

19 경우의 수와 확률

출처: 2018 AMC 10A 19번

수 m 을 다음 집합에서 임의로 택하고

$$\{11, 13, 15, 17, 19\},$$

수 n 을 다음 집합에서 임의로 택한다.

$$\{1999, 2000, 2001, \dots, 2018\}.$$

m^n 의 일의 자리 숫자가 1 일 확률은?

- (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{3}{10}$ (D) $\frac{7}{20}$ (E) $\frac{2}{5}$

핵심 아이디어. 거듭제곱의 일의 자리 숫자는 밑의 일의 자리 숫자에만 의존하며, 짧은 주기(길이 1, 2 또는 4)로 반복됩니다. 2000 근처의 지수는 수 자체가 아니라 주기를 보라는 신호입니다. 그러니 m 은 끝자리로, n 은 주기 안에서의 위치로 바꾸어 생각합시다.

1단계: 순서쌍 세기. m 을 택하는 방법은 5 가지, n 을 택하는 방법은 $2018 - 1999 + 1 = 20$ 가지이므로, 일어날 가능성이 같은 순서쌍은 $5 \cdot 20 = 100$ 개입니다. 이 중 m^n 의 끝자리가 1 인 순서쌍을 셉니다.

2단계: 주기. 거듭제곱을 차례로 구할 때 일의 자리 숫자는 다음과 같습니다.

- 끝자리가 1 인 밑: 1, 1, 1, ... 이므로 항상 1 입니다.
- 끝자리가 3 인 밑: 3, 9, 7, 1, 3, ... 이므로 끝자리가 1 인 것은 정확히 $4 \mid n$ 일 때입니다.
- 끝자리가 5 인 밑: 항상 5 이므로 1 이 되는 일은 없습니다.
- 끝자리가 7 인 밑: 7, 9, 3, 1, 7, ... 이므로 끝자리가 1 인 것은 정확히 $4 \mid n$ 일 때입니다.
- 끝자리가 9 인 밑: 9, 1, 9, 1, ... 이므로 끝자리가 1 인 것은 정확히 n 이 짝수일 때입니다.

3단계: 지수. 연속한 20 개의 값 1999, ..., 2018 중에서 짝수는 10 개이고, 4 의 배수는 5 개입니다 (2000, 2004, 2008, 2012, 2016).

4단계: 더하기. 조건을 만족하는 순서쌍의 수는

$$\underbrace{20}_{m=11} + \underbrace{5}_{m=13} + \underbrace{0}_{m=15} + \underbrace{5}_{m=17} + \underbrace{10}_{m=19} = 40,$$

이므로 확률은 $\frac{40}{100} = \frac{2}{5}$ 입니다.

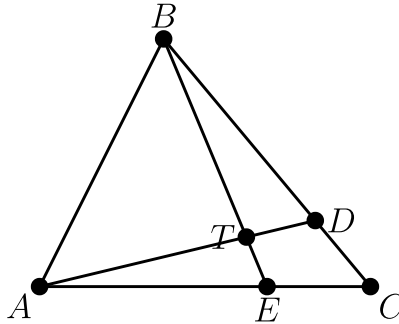
주의. 모든 홀수 끝자리의 주기가 4 라고 가정하지 마시다. 끝자리 9 의 주기는 2 이므로 ($9^2 = 81$), 19^n 은 모든 짝수 n 에 대해 1 로 끝납니다. 해당하는 지수는 5 개가 아니라 10 개입니다. 9 를 3, 7 과 같이 취급하면 $\frac{35}{100} = \frac{7}{20}$, 즉 선택지 (D) 가 됩니다.

정답: (E) $\frac{2}{5}$

20 기하

출처: 2004 AMC 10B 20번

$\triangle ABC$ 에서 점 D 와 E 는 각각 $\overline{BC}$ 와 $\overline{AC}$ 위에 있다. $\overline{AD}$ 와 $\overline{BE}$ 가 점 T 에서 만나고 $\frac{AT}{DT} = 3$, $\frac{BT}{ET} = 4$ 일 때, $\frac{CD}{BD}$ 의 값은?



- (A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{2}{9}$ (C) $\frac{3}{10}$ (D) $\frac{4}{11}$ (E) $\frac{5}{12}$

핵심 아이디어. 서로 엇갈리는 두 선분 위의 비는 **질량점**으로 다루는 것이 가장 쉽습니다. 각 선분이 T 에서 균형을 이루도록 꼭짓점에 무게를 얹어 봅시다.

1단계. $\overline{AD}$ 위에서 $AT : TD = 3 : 1$ 입니다. 지렛대는 (무게)×(거리)가 같을 때 균형을 이루므로, A 에 무게 1, D 에 무게 3을 줍니다.

2단계. $\overline{BE}$ 위에서 $BT : TE = 4 : 1$ 이므로, E 의 무게는 B 의 무게의 4배여야 합니다. B 의 무게를 b 라 하면 E 의 무게는 $4b$ 입니다.

3단계. D 는 $\overline{BC}$ 위에 있으므로, C 의 무게를 c 라 할 때 D 의 무게 3은 $b + c = 3$ 으로 나눕니다. 마찬가지로 E 는 $\overline{AC}$ 위에 있으므로 $1 + c = 4b$ 입니다.

$b + c = 3$ 과 $c = 4b - 1$ 을 연립하면 $5b = 4$ 이므로 $b = \frac{4}{5}$, $c = \frac{11}{5}$ 입니다.

4단계. $\overline{BC}$ 위에서 점 D 는 더 무거운 쪽에 가깝습니다. 따라서 $\frac{CD}{BD} = \frac{b}{c} = \frac{4/5}{11/5} = \frac{4}{11}$ 입니다.

주의. 무게는 거리에 **반비례**합니다. $\frac{CD}{BD} = \frac{c}{b}$ 로 쓰면 $\frac{11}{4}$ 가 나오는데, 이것은 선택지에조차 없습니다. 비를 뒤집었다는 신호입니다.

정답: (D) $\frac{4}{11}$

21 기하

출처: 2012 AMC 10A 21번

네 점 $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (0, 2, 0)$, $D = (0, 0, 3)$ 이 있다. 점 E, F, G, H 는 각각 선분 $\overline{BD}$, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{DC}$ 의 중점이다. $EFGH$ 의 넓이는?

- (A) $\sqrt{2}$ (B) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ (C) $\frac{3\sqrt{5}}{4}$ (D) $\sqrt{3}$ (E) $\frac{2\sqrt{7}}{3}$

핵심 아이디어. 중점이 네 개 나오면 중점 연결 선분을 떠올려야 합니다. 삼각형의 두 변의 중점을 이은 선분은 나머지 한 변과 평행하고 길이는 그 절반입니다. $EFGH$ 의 각 변은 사면체 $ABCD$ 의 한 면에서의 중점 연결 선분이므로, 각 변의 길이는 이미 아는 모서리 길이의 절반입니다. 각 면은 평평한 삼각형이므로 이 사실은 평면에서와 똑같이 3차원에서 성립합니다.

1단계: 중점 연결 선분 찾기.

- $\triangle ABD$ 에서 F 와 E 는 $\overline{AB}$ 와 $\overline{BD}$ 의 중점이므로 $\overline{FE} \parallel \overline{AD}$ 이고 $FE = \frac{1}{2}AD$ 입니다.
- $\triangle ACD$ 에서 G 와 H 는 $\overline{AC}$ 와 $\overline{DC}$ 의 중점이므로 $\overline{GH} \parallel \overline{AD}$ 이고 $GH = \frac{1}{2}AD$ 입니다.
- $\triangle ABC$ 에서 F 와 G 는 $\overline{AB}$ 와 $\overline{AC}$ 의 중점이므로 $\overline{FG} \parallel \overline{BC}$ 이고 $FG = \frac{1}{2}BC$ 입니다.

2단계: 도형의 모양. $\overline{FE}$ 와 $\overline{GH}$ 는 평행하고 길이가 같으며 같은 방향(밑면 ABC 에서 D 쪽 위로)을 향하므로, $EFGH$ 는 평행사변형이고 특히 평면도형입니다. 그 변들은 $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ 와 평행합니다. 그런데 $\overline{AD}$ 는 z 축 위에 있고 $\overline{BC}$ 는 xy 평면 위에 있으므로 둘은 수직입니다. 이웃한 두 변이 수직인 평행사변형은 직사각형입니다.

3단계: 변의 길이. $AD = 3$ 이므로 $FE = \frac{3}{2}$ 입니다. $BC = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ 이므로 $FG = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 입니다.

4단계: 넓이.

$$FE \cdot FG = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{4}.$$

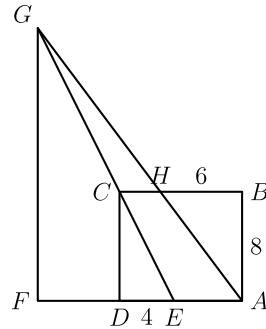
다른 풀이. 좌표로 직접 계산해도 됩니다. 양 끝점의 좌표를 평균하면 $E = (\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2})$, $F = (\frac{1}{2}, 0, 0)$, $G = (0, 1, 0)$, $H = (0, 1, \frac{3}{2})$ 입니다. 그러면 $\overrightarrow{FE} = (0, 0, \frac{3}{2})$ 과 $\overrightarrow{GH} = (0, 0, \frac{3}{2})$ 은 서로 같고, $\overrightarrow{FG} = (-\frac{1}{2}, 1, 0)$ 과 $\overrightarrow{HE} = (-\frac{1}{2}, 1, 0)$ 은 서로 같고, $\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{FG} = 0$ 입니다. 따라서 $EFGH$ 는 두 변의 길이가 $\frac{3}{2}$ 과 $\sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 인 직사각형이고, 넓이는 $\frac{3\sqrt{5}}{4}$ 입니다.

정답: (C) $\frac{3\sqrt{5}}{4}$

22 기하

출처: 2003 AMC 10A 22번

직사각형 $ABCD$ 에서 $AB = 8$, $BC = 9$ 이다. 점 H 는 $\overline{BC}$ 위에 있고 $BH = 6$ 이며, 점 E 는 AD 위에 있고 $DE = 4$ 이다. 직선 EC 와 직선 AH 는 점 G 에서 만나고, 점 F 는 직선 AD 위에 있으며 $\overline{GF} \perp \overline{AF}$ 이다. $\overline{GF}$ 의 길이를 구하시오.



(A) 16

(B) 20

(C) 24

(D) 28

(E) 30

핵심 아이디어. 직선 GE 와 GA 는 모두 G 에서 출발하여 직사각형의 **평행한** 두 변 $\overline{BC}$ 와 $\overline{AD}$ 를 지나합니다. 평행한 두 직선을 한 점을 지나는 두 직선이 자르면 언제나 닮은 삼각형이 생깁니다. 여기서는 $\triangle GCH \sim \triangle GEA$ 이고, 닮은 삼각형의 높이의 비는 밑변의 비와 같습니다. GF 가 바로 $\triangle GEA$ 의 높이이므로 이 비만 있으면 됩니다.

1단계: 두 밑변. 변 $\overline{BC}$ (길이 9) 위에서 $BH = 6$ 이므로 $CH = 9 - 6 = 3$ 입니다. 변 $\overline{AD}$ (길이 9) 위에서 $DE = 4$ 이므로 $EA = 9 - 4 = 5$ 입니다.

2단계: 닮은 삼각형. C 는 직선 GE 위에, H 는 직선 GA 위에 있고, $\overline{CH}$ 는 $\overline{EA}$ 와 평행합니다(직사각형의 마주 보는 변). 따라서 $\triangle GCH \sim \triangle GEA$ 이고 닮음비는 $CH : EA = 3 : 5$ 입니다.

3단계: 높이. $GF = h$ 라 합시다. 이는 G 에서 직선 AD 까지의 거리, 곧 $\triangle GEA$ 의 높이입니다. 직선 BC 는 G 에 8만큼 더 가까우므로 $\triangle GCH$ 의 높이는 $h - 8$ 입니다. 높이의 비는 밑변의 비와 같으므로 다음과 같습니다.

$$\frac{h-8}{h} = \frac{3}{5} \implies 5h - 40 = 3h \implies h = 20.$$

다른 풀이. 좌표를 이용합니다. $D = (0, 0)$, $A = (9, 0)$, $B = (9, 8)$, $C = (0, 8)$ 로 두면 $H = (3, 8)$, $E = (4, 0)$ 입니다. 직선 AH 의 기울기는 $\frac{8-0}{3-9} = -\frac{4}{3}$ 이므로 $y = -\frac{4}{3}(x-9) = -\frac{4}{3}x + 12$ 입니다. 직선 EC 의 기울기는 $\frac{8-0}{0-4} = -2$ 이므로 $y = -2x + 8$ 입니다. 두 식을 같게 놓으면 $-\frac{4}{3}x + 12 = -2x + 8$ 에서 $\frac{2}{3}x = -4$ 이므로 $x = -6$, $y = 20$ 입니다. 따라서 $G = (-6, 20)$ 이고, 직선 AD (x 축)까지의 거리는 $GF = 20$ 입니다.

주의. 두 직선이 실제로 잘라 내는 변의 조각, 즉 주어진 길이 BH 와 DE 가 아니라 $\overline{CH}$ 와 $\overline{EA}$ 를 사용해야 합니다. $CH = 3$ 을 $EA = 5$ 대신 $DE = 4$ 와 비교하면 $\frac{h-8}{h} = \frac{3}{4}$, 즉 $h = 32$ 가 나오는데, 이는 선택지에 없습니다.

23 경우의 수와 확률

출처: 2009 AMC 10B 23번

레이철과 로버트가 원형 트랙을 달린다. 레이철은 시계 반대 방향으로 달려 90초마다 한 바퀴를 돌고, 로버트는 시계 방향으로 달려 80초마다 한 바퀴를 돈다. 두 사람은 동시에 출발선에서 출발한다. 달리기 시작한 지 10분에서 11분 사이의 임의의 시각에, 트랙 안쪽에 서 있는 사진사가 출발선을 중심으로 트랙의 4분의 1이 담기는 사진을 찍는다. 레이철과 로버트가 모두 사진에 찍혀 있을 확률은?

- (A) $\frac{1}{16}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{3}{16}$ (D) $\frac{1}{4}$ (E) $\frac{5}{16}$

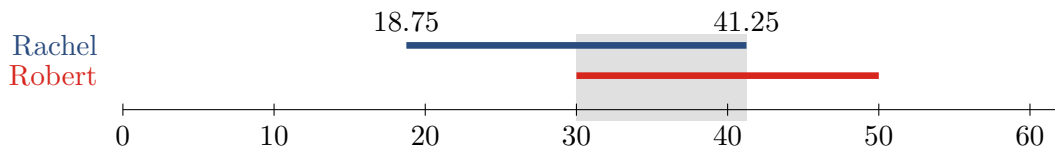
핵심 아이디어. 사진을 찍는 시각은 그 1분 안에서 균일하게 정해지므로, 확률은 (두 사람이 모두 보이는 시간(초))÷60입니다. 각 주자를 시간 구간으로 바꿉시다. 10분 시점에 각자 어디에 있는지 구한 다음, 언제 사진 범위 안에 있는지 구합니다. 답은 두 구간이 겹치는 부분입니다. 원 위의 위치도 “달린 시간(초)”으로 재면 간단한 계산이 됩니다.

1단계: 사진에 담기는 범위. 출발선을 중심으로 트랙의 4분의 1이라는 것은 출발선 양쪽으로 각각 $\frac{1}{8}$ 바퀴씩이라는 뜻입니다. 주자는 어느 쪽이든 출발선에서 $\frac{1}{8}$ 바퀴 이내에 있을 때 사진에 찍힙니다. 사진의 범위가 출발선에 대해 대칭이므로 달리는 방향은 상관없습니다.

2단계: 레이철, 한 바퀴 90초. 레이철은 $\frac{1}{8}$ 바퀴를 도는 데 $\frac{90}{8} = 11.25$ 초가 걸립니다. 600초 시점에 레이철은 $\frac{600}{90} = 6\frac{2}{3}$ 바퀴를 달렸으므로, 출발선까지 $\frac{1}{3}$ 바퀴, 즉 30초가 남았습니다. 따라서 630초에 출발선을 지납니다. 레이철이 사진에 찍히는 것은 $630 - 11.25 = 618.75$ 초부터 $630 + 11.25 = 641.25$ 초까지입니다. 그 앞뒤로 출발선을 지나는 시각은 540초와 720초로, 너무 멀어서 상관없습니다.

3단계: 로버트, 한 바퀴 80초. 로버트는 $\frac{1}{8}$ 바퀴를 도는 데 $\frac{80}{8} = 10$ 초가 걸립니다. 600초 시점에 로버트는 $\frac{600}{80} = 7\frac{1}{2}$ 바퀴를 달렸으므로 출발선까지 40초 거리에 있고, 640초에 출발선을 지납니다. 로버트가 사진에 찍히는 것은 630초부터 650초까지입니다. 그 앞뒤로 출발선을 지나는 시각은 560초와 720초로, 역시 범위 밖입니다.

4단계: 겹치는 부분. 10분 시점 이후의 시간(초)으로 나타내면 다음과 같습니다(그림의 Rachel은 레이철, Robert는 로버트).



두 사람이 모두 사진에 찍히는 것은 30초부터 41.25초까지, 즉 11.25초 동안입니다. 따라서 확률은 다음과 같습니다.

$$\frac{11.25}{60} = \frac{45}{240} = \frac{3}{16}.$$

주의. 두 사건은 독립이 아닙니다. 둘 다 사진을 찍는 같은 순간에 달려 있기 때문입니다. 레이철의 확률 $\frac{22.5}{60} = \frac{3}{8}$ 에 로버트의 확률 $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ 을 곱하면 $\frac{1}{8}$, 즉 선택지 (B)가 됩니다. 반드시 두 시간 구간의 교집합을 구해야 합니다.

정답: (C) $\frac{3}{16}$

24 대수

출처: 2017 AMC 10A 24번

어떤 실수 a, b, c 에 대하여 다항식

$$g(x) = x^3 + ax^2 + x + 10$$

은 서로 다른 세 근을 가지며, $g(x)$ 의 각 근은 다음 다항식의 근이기도 하다.

$$f(x) = x^4 + x^3 + bx^2 + 100x + c.$$

$f(1)$ 의 값은?

- (A) -9009 (B) -8008 (C) -7007 (D) -6006 (E) -5005

핵심 아이디어. “ g 의 모든 근이 f 의 근이다”는 인수에 관한 말로, $f(x)$ 가 $g(x)$ 로 나누어떨어진다는 뜻입니다. f 는 4차, g 는 3차이므로 몫은 일차식 $(x - r)$ 하나입니다. 그러면 문제는 계수 비교가 되는데, 문제에서 f 의 계수 두 개(x^3 의 계수 1, x 의 계수 100)를 알려 주므로 두 미지수 a 와 r 을 구하기에 딱 충분합니다.

1단계: 인수분해. g 의 근을 r_1, r_2, r_3 이라 합시다. 세 근은 서로 다르고 g 의 최고차항의 계수가 1이므로 $g(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$ 입니다. 각 r_i 는 f 의 근이므로 각 $(x - r_i)$ 는 f 의 인수이고, r_i 들이 서로 다르므로 그 곱 $g(x)$ 는 $f(x)$ 의 인수입니다. f 와 g 의 최고차항의 계수가 모두 1이므로 다음과 같이 쓸 수 있습니다.

$$f(x) = g(x)(x - r) \quad \text{적당한 수 } r.$$

2단계: 전개.

$$(x^3 + ax^2 + x + 10)(x - r) = x^4 + (a - r)x^3 + (1 - ar)x^2 + (10 - r)x - 10r.$$

3단계: 알려진 계수 비교.

- x 의 계수: $10 - r = 100$ 이므로 $r = -90$ 입니다.
- x^3 의 계수: $a - r = 1$ 이므로 $a = 1 + r = -89$ 입니다.

4단계: 값 구하기. b 와 c 를 구할 필요는 없습니다. 인수분해된 꼴에 $x = 1$ 을 대입하면 됩니다.

$$g(1) = 1 + a + 1 + 10 = 12 - 89 = -77, \quad 1 - r = 1 + 90 = 91,$$

$$f(1) = g(1)(1 - r) = (-77)(91) = -7007.$$

검산. 나머지 두 계수를 비교하면 $b = 1 - ar = 1 - (-89)(-90) = -8009$, $c = -10r = 900$ 입니다. 이것으로 직접 계산해도 $f(1) = 1 + 1 - 8009 + 100 + 900 = -7007$ 입니다. ($a = -89$ 일 때 g 는 실제로 $-0.33, 0.34, 89$ 근처에 서로 다른 세 근을 가집니다.)

주의. $(x - r)$ 을 전개할 때 r 의 부호에 주의합니다. x 의 계수는 $10 - r$ 이지 $10 + r$ 이 아니므로, r 은 음수가 됩니다. 대신 $r = 90$ 으로 잡으면 $a = 91$, $f(1) = 103 \cdot (-89) = -9167$ 이 되는데, 이는 선택지에 없으므로 어딘가 잘못되었다는 신호입니다.

정답: (C) -7007

25 정수론

출처: 2007 AMC 10A 25번

양의 정수 n 에 대하여 $S(n)$ 을 n 의 각 자리의 숫자의 합이라 하자. $n + S(n) + S(S(n)) = 2007$ 을 만족시키는 n 의 값은 몇 개인가?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

핵심 아이디어. 각 자리의 숫자의 합은 n 에 비해 **아주 작으므로**, n 은 2007보다 조금 작은 수여야 합니다. 그래서 찾아볼 범위가 좁아집니다. 또 자리의 숫자의 합이 나오면 9로 나누어떨어지는지를 생각합니다. 어떤 수와 그 수의 각 자리의 숫자의 합은 9로 나눈 나머지가 같습니다. 이를 이용하면 후보가 몇 개로 줄어들고, 그것들을 하나씩 확인하면 됩니다.

1단계: 범위 좁히기. $S(n) \geq 1$ 이므로 $n < 2007$, 즉 $n \leq 2006$ 이어야 합니다. $1, \dots, 2006$ 중 각 자리의 숫자의 합이 가장 큰 것은 $S(1999) = 28$ 이므로 $S(n) \leq 28$ 입니다. $1, \dots, 28$ 중 각 자리의 숫자의 합이 가장 큰 것은 $S(19) = 10$ 이므로 $S(S(n)) \leq 10$ 입니다. 따라서 다음이 성립합니다.

$$n = 2007 - S(n) - S(S(n)) \geq 2007 - 28 - 10 = 1969.$$

2단계: 9로 나눈 나머지 이용하기. 어떤 수와 그 수의 각 자리의 숫자의 합은 9로 나눈 나머지가 같습니다. 따라서 $n, S(n), S(S(n))$ 은 모두 나머지가 같고, 그 합은 $3n$ 과 나머지가 같습니다. $2007 = 9 \cdot 223$ 이므로 $3n$ 이 9의 배수여야 하고, 따라서 n 은 3의 배수입니다.

3단계: 2000부터 2006까지의 수. $n = 2000 + d$ ($0 \leq d \leq 6$)로 씁시다. 그러면 $S(n) = 2 + d$ 는 한 자리 수이므로 $S(S(n)) = 2 + d$ 이고, 다음이 성립합니다.

$$(2000 + d) + (2 + d) + (2 + d) = 2004 + 3d = 2007 \implies d = 1.$$

따라서 $n = 2001$ 은 조건을 만족하고($2001 + 3 + 3 = 2007$), 이 범위에서는 이것 하나뿐입니다.

4단계: 1969부터 1999까지의 수. 이 범위의 3의 배수는 $1971, 1974, \dots, 1998$ 입니다.

n	1971	1974	1977	1980	1983	1986	1989	1992	1995	1998
$S(n)$	18	21	24	18	21	24	27	21	24	27
$S(S(n))$	9	3	6	9	3	6	9	3	6	9
합	1998	1998	2007	2007	2007	2016	2025	2016	2025	2034

조건을 만족하는 것은 정확히 세 개, 1977, 1980, 1983입니다.

5단계: 세기. 해는 1977, 1980, 1983, 2001로, n 의 값은 네 개입니다.

주의. 1900번대의 수만 확인하고 멈추면 안 됩니다. 범위에 대해서는 $n \geq 1969$ 라는 것만 알 수 있으므로 2001–2006도 확인해야 합니다. 이 수들은 각 자리의 숫자의 합이 아주 작아서 2001이 끼어듭니다. 이를 놓치면 3, 즉 선택지 (C)가 됩니다.

정답: (D) 4