
AMC 10

실전 모의고사

제 5 회

해설

정답표 • 출처 • 단계별 풀이

정답표와 출처

번호	정답	출처	영역
1	C	2012 AMC 10B 1번	대수
2	C	2002 AMC 10A 2번	대수
3	B	2007 AMC 10B 3번	대수
4	B	2019 AMC 10A 4번	경우의 수와 확률
5	E	2019 AMC 10B 5번	기하
6	D	2016 AMC 10A 6번	정수론
7	B	2000 AMC 10 7번	기하
8	D	2012 AMC 10A 8번	대수
9	B	2001 AMC 10 9번	대수
10	E	2018 AMC 10B 10번	기하
11	C	2006 AMC 10B 11번	정수론
12	D	2010 AMC 10B 12번	대수
13	E	2013 AMC 10B 13번	대수
14	D	2008 AMC 10A 14번	기하
15	B	2015 AMC 10A 15번	정수론
16	B	2014 AMC 10B 16번	경우의 수와 확률
17	B	2003 AMC 10B 17번	기하
18	D	2015 AMC 10B 18번	경우의 수와 확률
19	E	2010 AMC 10A 19번	기하
20	C	2016 AMC 10B 20번	기하
21	A	2005 AMC 10B 21번	경우의 수와 확률
22	C	2006 AMC 10A 22번	정수론
23	C	2005 AMC 10A 23번	기하
24	A	2014 AMC 10A 24번	대수
25	A	2013 AMC 10A 25번	경우의 수와 확률

1 대수

출처: 2012 AMC 10B 1번

펠 크릭 초등학교의 3학년 교실에는 각각 학생 18명과 애완 토끼 2마리가 있다. 3학년 교실 4개 전체에서 학생은 토끼보다 몇 명 더 많은가?

- (A) 48 (B) 56 (C) 64 (D) 72 (E) 80

핵심 아이디어. 먼저 교실 하나에서의 차이를 구한 다음, 교실 수를 곱합니다.

교실 하나에서는 학생이 토끼보다 $18 - 2 = 16$ 명 더 많습니다.

교실 4개는 모두 똑같으므로, 전체 차이는 $4 \times 16 = 64$ 입니다.

먼저 전부 세어도 됩니다. 학생은 $4 \times 18 = 72$ 명, 토끼는 $4 \times 2 = 8$ 마리이고, $72 - 8 = 64$ 입니다.

주의. 학생 수 $4 \times 18 = 72$ 에서 멈추면 (D)를 고르게 됩니다. 문제는 학생이 토끼보다 **몇 명 더 많은지**를 묻고 있습니다.

정답: (C) 64

2 대수

출처: 2002 AMC 10A 2번

0이 아닌 수 a, b, c 에 대하여 다음과 같이 정의한다.

$$(a, b, c) = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

$(2, 12, 9)$ 의 값을 구하시오.

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

핵심 아이디어. 정의에 $a = 2, b = 12, c = 9$ 를 대입하고, 각 분수를 약분한 다음 통분하여 더합니다.

$a = 2, b = 12, c = 9$ 일 때

$$(2, 12, 9) = \frac{2}{12} + \frac{12}{9} + \frac{9}{2} = \frac{1}{6} + \frac{4}{3} + \frac{9}{2}.$$

공통분모는 6이므로

$$\frac{1}{6} + \frac{8}{6} + \frac{27}{6} = \frac{36}{6} = 6.$$

주의. 순서가 중요합니다. 각 문자를 **다음** 문자로 나누며, 마지막 분수는 $\frac{a}{c}$ 가 아니라 $\frac{c}{a} = \frac{9}{2}$ 입니다.

정답: (C) 6

3 대수

출처: 2007 AMC 10B 3번

한 대학생이 주말을 맞아 소형차를 몰고 120마일을 달려 집에 갔는데, 연비는 평균 갤런당 30마일이었다. 돌아오는 길에는 부모님의 SUV를 몰았고, 연비는 평균 갤런당 20마일에 불과했다. 왕복 전체의 평균 연비는 갤런당 몇 마일인가?

- (A) 22 (B) 24 (C) 25 (D) 26 (E) 28

핵심 아이디어. 평균 연비는 총 주행 거리를 총 연료량(갤런)으로 나눈 값입니다. 각 구간에서 쓴 연료의 양을 구해 봅시다.

갈 때: 갤런당 30마일로 120마일을 달리면 $\frac{120}{30} = 4$ 갤런을 씁니다.

올 때: 갤런당 20마일로 120마일을 달리면 $\frac{120}{20} = 6$ 갤런을 씁니다.

왕복 거리는 240마일이고 연료는 $4 + 6 = 10$ 갤런이므로, 평균 연비는 다음과 같습니다.

$$\frac{240}{10} = 24 \text{ (마일/갤런)}$$

주의. 두 연비의 평균 $\frac{30+20}{2} = 25$ 를 답하면 (C)를 고르게 됩니다. 연비가 낮은 SUV 구간에서 연료를 더 많이 쓰므로 갤런당 20마일 구간이 더 큰 비중을 차지하기 때문에, 이것은 틀린 답입니다.

정답: (B) 24

4 경우의 수와 확률

출처: 2019 AMC 10A 4번

상자 안에 빨간 공 28개, 초록 공 20개, 노란 공 19개, 파란 공 13개, 흰 공 11개, 검은 공 9개가 들어 있다. 상자에서 공을 다시 넣지 않고 꺼낼 때, 같은 색의 공이 적어도 15개 나오는 것을 보장하려면 최소 몇 개의 공을 꺼내야 하는가?

- (A) 75 (B) 76 (C) 79 (D) 84 (E) 91

핵심 아이디어. 가장 운이 나쁜 경우를 상상해 봅시다. 어떤 색도 15개에 이르지 **않도록** 최대한 많이 꺼내면, 거기서 한 개만 더 꺼내도 반드시 그렇게 됩니다.

1단계. 한 색이 15개가 되지 않게 하려면 각 색을 최대 14개까지 꺼낼 수 있습니다. 파란 공, 흰 공, 검은 공은 15개보다 적으므로 모두 꺼낼 수 있습니다. 이것이 $13 + 11 + 9 = 33$ 개입니다.

2단계. 빨간 공, 초록 공, 노란 공은 각각 15개 이상이므로 14개씩만 꺼냅니다. 이것이 $3 \times 14 = 42$ 개입니다.

3단계. 이렇게 $33 + 42 = 75$ 개를 꺼내도 15개에 이른 색은 없습니다. 남은 공은 빨간 공, 초록 공, 노란 공뿐이므로, 다음 공을 꺼내면 그 색이 15개가 됩니다. 답은 $75 + 1 = 76$ 입니다.

주의. 75, 즉 (A)를 답하면 최악의 경우는 셋지만 15번째 공을 **보장**하는 데 필요한 한 개를 빠뜨린 것입니다.

정답: (B) 76

5 기하

출처: 2019 AMC 10B 5번

삼각형 ABC 는 제1사분면에 있다. 점 A, B, C 를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 각각 A', B', C' 이라 하자. 삼각형의 꼭짓점 중 어느 것도 직선 $y = x$ 위에 있지 않다고 가정한다. 다음 중 항상 참이 **아닌** 것은?

- (A) 삼각형 $A'B'C'$ 은 제1사분면에 있다. (B) 삼각형 ABC 와 $A'B'C'$ 의 넓이는 같다.
- (C) 직선 AA' 의 기울기는 -1 이다. (D) 직선 AA' 과 CC' 의 기울기는 같다.
- (E) 직선 AB 와 $A'B'$ 은 서로 수직이다.

핵심 아이디어. 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동하면 좌표가 서로 바뀔 뿐입니다. 즉 $(x, y) \mapsto (y, x)$ 입니다. 이 규칙으로 각 명제를 확인하고, 간단한 반례 하나를 찾아봅시다.

(A)와 (B). $x > 0$ 이고 $y > 0$ 이면, 좌표를 바꾼 점 (y, x) 도 두 좌표가 모두 양수이므로 $A'B'C'$ 은 제1사분면에 그대로 있습니다. 대칭이동은 길이를 바꾸지 않으므로 넓이도 변하지 않습니다. 두 명제 모두 항상 참입니다.

(C)와 (D). $x \neq y$ 인 $A = (x, y)$ 의 상은 $A' = (y, x)$ 이고, AA' 의 기울기는 다음과 같습니다.

$$\frac{x - y}{y - x} = -1.$$

모든 꼭짓점에서 마찬가지이므로 AA' 과 CC' 의 기울기는 모두 -1 입니다. 두 명제 모두 항상 참입니다.

(E). $A = (2, 1), B = (3, 2), C = (4, 1)$ 로 잡아 봅시다. 모두 제1사분면에 있고, 어느 것도 $y = x$ 위에 있지 않습니다. 그러면 $A' = (1, 2), B' = (2, 3)$ 입니다. 직선 AB 의 기울기는 $\frac{2-1}{3-2} = 1$ 이고 직선 $A'B'$ 의 기울기는 $\frac{3-2}{2-1} = 1$ 입니다. 두 직선은 수직이 아니라 평행하므로 (E)는 성립하지 않습니다.

사실 $y = x$ 에 대하여 대칭이동하면 기울기가 $m \neq 0$ 인 직선은 기울기가 $\frac{1}{m}$ 인 직선이 됩니다. 두 기울기의 곱은 -1 이 아니라 1 이므로 이 두 직선은 절대 수직이 아닙니다. AB 가 수평일 때만 그 상 $A'B'$ 이 수직선이 되어 두 직선이 수직이 됩니다. 따라서 (E)는 성립할 때도 있지만 항상 성립하지는 않습니다.

정답: (E) 직선 AB 와 $A'B'$ 은 서로 수직이다

6 정수론

출처: 2016 AMC 10A 6번

히메나는 정수 1부터 30까지를 한 번씩 적는다. 에밀리오는 히메나가 적은 수를 옮겨 적되, 숫자 2가 나올 때마다 모두 숫자 1로 바꾸어 적는다. 히메나는 자신이 적은 수를 모두 더하고, 에밀리오도 자신이 적은 수를 모두 더한다. 히메나의 합은 에밀리오의 합보다 얼마나 더 큰가?

- (A) 13 (B) 26 (C) 102 (D) 103 (E) 110

핵심 아이디어. 목록을 직접 더할 필요는 없습니다. 숫자 2를 숫자 1로 바꿀 때마다 수가 얼마나 작아지는지만 따라가면 됩니다. 그 크기는 2가 어느 자리에 있느냐에 따라 달라집니다.

일의 자리. 일의 자리 숫자 2를 1로 바꾸면 수가 1만큼 작아집니다. 1부터 30까지의 수 중 일의 자리 숫자가 2인 수는 2, 12, 22이므로, 3만큼 줄어듭니다.

십의 자리. 십의 자리 숫자 2를 1로 바꾸면 수가 10만큼 작아집니다. 십의 자리 숫자가 2인 수는 20, 21, ..., 29의 열 개이므로, $10 \times 10 = 100$ 만큼 줄어듭니다.

모두 합하면 에밀리오의 합은 히메나의 합보다 $3 + 100 = 103$ 만큼 작습니다. (검산: 히메나의 합은 465, 에밀리오의 합은 362입니다.)

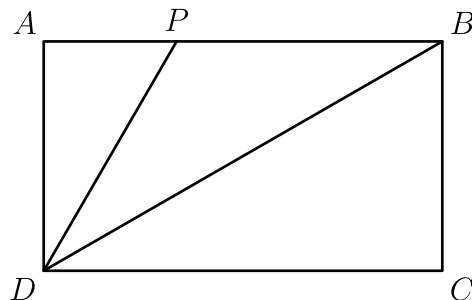
주의. 22에는 2가 두 개 있어서 10이 아니라 11만큼 줄어듭니다. 이를 한 번만 세면 102, 즉 (C)가 됩니다. 바뀐 숫자마다 1씩 줄어든다고 세면 13, 즉 (A)가 됩니다.

정답: (D) 103

7 기하

출처: 2000 AMC 10 7번

직사각형 $ABCD$ 에서 $AD = 1$ 이고, 점 P 는 $\overline{AB}$ 위에 있으며, $\overline{DB}$ 와 $\overline{DP}$ 는 $\angle ADC$ 를 삼등분한다. $\triangle BDP$ 의 둘레의 길이는?



- (A) $3 + \frac{\sqrt{3}}{3}$ (B) $2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}$ (C) $2 + 2\sqrt{2}$ (D) $\frac{3 + 3\sqrt{5}}{2}$ (E) $2 + \frac{5\sqrt{3}}{3}$

핵심 아이디어. 직각을 삼등분하면 30° 인 각 세 개 생기므로, 삼각형 ADP 와 ADB 는 길이를 아는 변 $AD = 1$ 을 가진 30-60-90 삼각형입니다.

1단계. $\angle ADC = 90^\circ$ 는 30° 인 각 세 개로 나뉘므로 $\angle ADP = 30^\circ$, $\angle ADB = 60^\circ$ 입니다.

2단계. 직각삼각형 ADP (A 에서 직각)에서 D 에서의 각이 30° 이므로 다음을 얻습니다.

$$AP = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad DP = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

3단계. 직각삼각형 ADB 에서 D 에서의 각이 60° 이므로 다음을 얻습니다.

$$AB = \tan 60^\circ = \sqrt{3}, \quad DB = \frac{1}{\cos 60^\circ} = 2.$$

4단계. 그러면 $PB = AB - AP = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 이고, 둘레의 길이는 다음과 같습니다.

$$DP + PB + DB = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} + 2 = 2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

주의. PB 대신 $AB = \sqrt{3}$ 전체를 쓰면 $2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = 2 + \frac{5\sqrt{3}}{3}$, 즉 (E)가 됩니다. $\triangle BDP$ 의 위쪽 변은 그 일부인 PB 뿐입니다.

정답: (B) $2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}$

8 대수

출처: 2012 AMC 10A 8번

세 정수에서 두 개씩 골라 더한 합이 12, 17, 19이다. 세 수 중 가운데 수는?

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

핵심 아이디어. 두 수의 합 세 개를 모두 더하면 각 수가 두 번씩 더해지므로, 세 수의 합을 한 번에 얻습니다.

세 수를 $a < b < c$ 라 합시다. (두 수의 합 세 개가 모두 다르므로 세 수도 모두 다릅니다.) 가장 작은 합은 가장 작은 두 수의 합이고, 가장 큰 합은 가장 큰 두 수의 합입니다.

$$a + b = 12, \quad a + c = 17, \quad b + c = 19.$$

세 식을 모두 더하면 $2(a + b + c) = 48$ 이므로 $a + b + c = 24$ 입니다.

가운데 수는 $a + c$ 에 빠져 있는 수이므로 $b = 24 - 17 = 7$ 입니다.

검산: $a = 24 - 19 = 5$, $c = 24 - 12 = 12$ 이고, 실제로 $5 + 7 = 12$, $5 + 12 = 17$, $7 + 12 = 19$ 입니다.

정답: (D) 7

9 대수

출처: 2001 AMC 10 9번

크리스틴이 사는 주의 주 소득세는 연 소득 중 처음 \$28000에 대해서는 $p\%$ 의 세율로, \$28000보다 많은 금액에 대해서는 $(p+2)\%$ 의 세율로 부과된다. 크리스틴은 자신이 낸 주 소득세가 연 소득의 $(p+0.25)\%$ 에 해당한다는 것을 알게 되었다. 크리스틴의 연 소득은 얼마인가?

- (A) \$28000 (B) \$32000 (C) \$35000 (D) \$42000 (E) \$56000

핵심 아이디어. 세금을 규칙에 따라 한 번, 크리스틴이 알아챈 사실에 따라 한 번, 두 가지로 나타내고 같다고 놓습니다. 미지의 세율 p 는 소거됩니다.

연 소득을 x 달러라 합시다. 크리스틴의 평균 세율 $(p+0.25)\%$ 는 $p\%$ 보다 크므로, 소득은 \$28000보다 많고 $x > 28000$ 입니다.

규칙에 따르면 세금은 $\frac{p}{100} \cdot 28000 + \frac{p+2}{100}(x - 28000)$ 입니다. 크리스틴이 알아챈 사실에 따르면 세금은 $\frac{p+0.25}{100}x$ 입니다. 두 식에 모두 100을 곱하면 다음과 같습니다.

$$28000p + (p+2)(x - 28000) = (p+0.25)x.$$

좌변을 전개하면 $28000p + px - 28000p + 2x - 56000 = px + 2x - 56000$ 이고, 우변은 $px + 0.25x$ 입니다. px 를 소거하면 다음을 얻습니다.

$$2x - 56000 = 0.25x \implies 1.75x = 56000 \implies x = 32000.$$

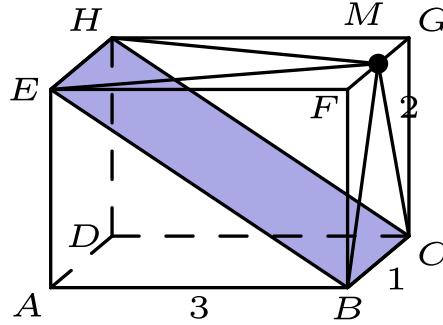
검산: 아무 p 나, 예를 들어 $p = 5$ 로 잡으면 세금 = $1400 + 7\% \cdot 4000 = 1680$ 이고, $5.25\% \cdot 32000 = 1680$ 입니다.

정답: (B) \$32000

10 기하

출처: 2018 AMC 10B 10번

그림의 직육면체에서 $AB = 3$, $BC = 1$, $CG = 2$ 이다. 점 M 은 FG 의 중점이다. 밑면이 $BCHE$ 이고 꼭짓점이 M 인 사각뿔의 부피는?



(A) 1

(B) $\frac{4}{3}$

(C) $\frac{3}{2}$

(D) $\frac{5}{3}$

(E) 2

핵심 아이디어. 부피 = $\frac{1}{3} \cdot (\text{밑넓이}) \cdot (\text{높이})$ 입니다. 밑면 $BCHE$ 는 직사각형이고, $\overline{FG}$ 가 밑면과 평행하므로 높이는 앞면에서 F 와 직선 EB 사이의 거리일 뿐입니다.

1단계: 밑면. $BCHE$ 는 두 변이 $BC = 1$ 과 BE 인 직사각형입니다. 앞면에서 $\triangle EFB$ 는 F 에서 직각이고 $EF = AB = 3$, $FB = CG = 2$ 이므로 $BE = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ 입니다. 밑면의 넓이는 $1 \cdot \sqrt{13} = \sqrt{13}$ 입니다.

2단계: 높이. 선분 $\overline{FG}$ 는 밑면이 놓인 평면 위의 $\overline{BC}$ 와 평행하므로, M 을 포함한 $\overline{FG}$ 위의 모든 점은 그 평면까지의 거리가 F 와 같습니다. 그 거리는 직각삼각형 EFB 에서 F 로부터 빗변 EB 에 내린 수선의 길이입니다. $\triangle EFB$ 의 넓이를 두 가지로 계산하면 $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{13} \cdot h$ 이므로 $h = \frac{6}{\sqrt{13}}$ 입니다.

3단계: 부피.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{13} \cdot \frac{6}{\sqrt{13}} = \frac{6}{3} = 2.$$

다른 풀이. 직육면체를 평면 $BCHE$ 로 자릅니다. F 와 G 를 포함하는 쪽 절반은 부피가 $\frac{1}{2}(3 \cdot 1 \cdot 2) = 3$ 인 삼각기둥입니다. 이 삼각기둥은 M (면 $EFGH$ 와 $BFGC$ 위에 있는 점)을 꼭짓점으로 하여 면 $BCHE$, $\triangle EFB$, $\triangle HGC$ 를 각각 밑면으로 하는 세 각뿔로 나뉩니다. 두 삼각형의 넓이는 각각 $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$ 이고 M 은 각 삼각형으로부터 $\frac{1}{2}$ 만큼 떨어져 있으므로, 그 두 각뿔의 부피는 각각 $\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 입니다. 구하는 각뿔의 부피는 $3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 2$ 입니다.

정답: (E) 2

11 정수론

출처: 2006 AMC 10B 11번

합 $7! + 8! + 9! + \cdots + 2006!$ 의 십의 자리 숫자는?

- (A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 6 (E) 9

핵심 아이디어. 마지막 두 자리만 중요합니다. 계승이 5와 10을 모두 인수로 가지면 끝이 00이 되어 더 이상 십의 자리 숫자에 영향을 주지 않습니다. 따라서 2000개의 항 대부분은 버려도 됩니다.

1단계. $n \geq 10$ 이면 곱 $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ 은 서로 다른 세 인수 2, 5, 10을 포함하고 이들의 곱이 100이므로, 이 수는 100의 배수이고 끝이 00입니다. 이런 수를 더해도 합의 마지막 두 자리는 바뀌지 않습니다.

2단계. 따라서 전체 합의 마지막 두 자리는 다음 수의 마지막 두 자리와 같습니다.

$$7! + 8! + 9! = 5040 + 40320 + 362880 = 408240.$$

각 항의 마지막 두 자리만 쓰면 $40 + 20 + 80 = 140$ 이고, 끝 두 자리는 40입니다.

십의 자리 숫자는 4입니다.

주의. $9! = 362880$ 은 끝이 00이 **아닙니다**. 인수 5가 하나뿐이기 때문입니다. $7!$ 부터 $9!$ 까지의 모든 항을 남겨야 합니다.

정답: (C) 4

12 대수

출처: 2010 AMC 10B 12번

학년 초에 웰스 선생님의 수학 수업을 듣는 학생 전체 중 50%는 “수학을 좋아합니까?”라는 질문에 “예”라고 답했고, 50%는 “아니요”라고 답했다. 학년 말에는 70%가 “예”, 30%가 “아니요”라고 답했다. 학년 초와 학년 말에 서로 다른 답을 한 학생은 전체의 $x\%$ 이다. x 의 값으로 가능한 것 중 최댓값과 최솟값의 차는?

- (A) 0 (B) 20 (C) 40 (D) 60 (E) 80

핵심 아이디어. (처음 답, 마지막 답)에 따라 학급을 네 그룹으로 나눕니다. 주어진 백분율이 행과 열의 합을 정하고, x 는 답을 “바꾼” 두 그룹의 합입니다. 따라서 이 합을 주어진 합계가 허용하는 한 가장 작게, 또 가장 크게 만들어 봅시다.

1단계: 식 세우기. 예→예라고 답한 학생을 $a\%$, 예→아니요를 $b\%$, 아니요→예를 $c\%$, 아니요→아니요를 $d\%$ 라 합시다. 그러면

$$a + b = 50, \quad c + d = 50, \quad a + c = 70, \quad b + d = 30,$$

이고 $x = b + c$ 입니다. 첫째 식과 셋째 식에서 $c = 70 - a$, $b = 50 - a$ 이므로 $x = 120 - 2a$ 입니다.

2단계: a 는 얼마나 클 수 있을까? 처음에 예라고 답한 학생은 50%뿐이므로 a 는 최대 50입니다. $a = 50$ 이면 $b = 0, c = 20, d = 30$ 으로 모두 가능합니다. 따라서 최솟값은 $x = 120 - 100 = 20$ 입니다. 즉 예를 50에서 70으로 늘리는 데 꼭 필요한 20%만 답을 바꾸는 경우입니다.

3단계: a 는 얼마나 작을 수 있을까? 처음에 아니요라고 답한 학생은 50%뿐이므로 $c = 70 - a$ 는 50을 넘을 수 없고, $a \geq 20$ 입니다. $a = 20$ 이면 $b = 30, c = 50, d = 0$ 으로 모두 가능합니다. 따라서 최댓값은 $x = 120 - 40 = 80$ 입니다. 즉 아니요라고 답한 학생은 모두 예로 바꾸고, $b = 30$, 곧 반 전체의 30%가 예에서 아니요로 바꾸는 경우입니다. 이는 처음에 예라고 답한 학생의 60%에 해당합니다.

차는 $80 - 20 = 60$ 입니다.

주의. 문제는 차를 묻고 있습니다. 최댓값 80에서 멈추면 (E)를, 최솟값 20에서 멈추면 (B)를 고르게 됩니다.

정답: (D) 60

13 대수

출처: 2013 AMC 10B 13번

조와 블레어가 번갈아 가며, 1부터 상대방이 마지막으로 말한 수보다 하나 큰 수까지 센다.

조가 먼저 “1”이라고 말하므로, 블레어는 이어서 “1, 2”라고 말한다. 그다음 조는 “1, 2, 3”이라고 말하고, 이런 식으로 계속한다.

말한 수 중 53번째 수는?

- (A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 6 (E) 8

핵심 아이디어. 각 차례는 바로 앞 차례보다 수가 하나 더 많으므로, 차례별 길이는 1, 2, 3, ... 입니다. 누적 합은 삼각수가 됩니다. 53번째 수 전에 끝나는 마지막 차례를 찾아봅시다.

1단계: 세는 방식. 차례는 1, 그다음 1, 2, 그다음 1, 2, 3, 이런 식으로 이어집니다. k 번째 차례는 목록 1, 2, ..., k 이고, 여기에는 수가 k 개 있습니다. 누가 말하는지는 상관없고, 수의 순서만 중요합니다.

2단계: 말한 수의 개수 세기. n 번의 차례가 끝난 뒤 말한 수의 총개수는 다음과 같습니다.

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$n = 9$ 이면 이 값은 $\frac{9 \cdot 10}{2} = 45$ 이고, $n = 10$ 이면 55입니다. $45 < 53 \leq 55$ 이므로 53번째 수는 10번째 차례에 나옵니다.

3단계: 위치 찾기. 10번째 차례는 1, 2, ..., 10이고, 그 첫 수는 전체에서 46번째로 말한 수입니다. 따라서 53번째 수는 이 차례의 $53 - 45 = 8$ 번째 수이며, 그 값은 8입니다.

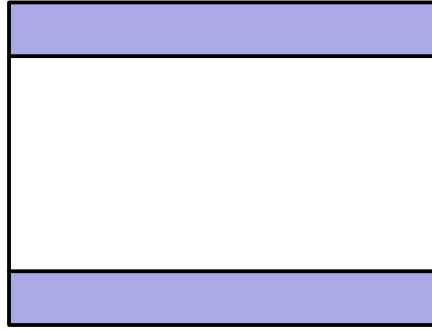
반대쪽에서 계산해 봅시다. 10번째 차례는 “10”으로 끝나고 이것이 55번째 수이므로, 54번째 수는 9이고 53번째 수는 8입니다.

정답: (E) 8

14 기하

출처: 2008 AMC 10A 14번

예전 텔레비전 화면의 화면비는 4 : 3이다. 즉, 가로 길이와 세로 길이의 비가 4 : 3이다. 많은 영화는 화면비가 4 : 3이 아니어서, 그림과 같이 화면의 위쪽과 아래쪽에 높이가 같은 띠를 어둡게 처리하는 “레터박스” 방식으로 텔레비전 화면에 상영하기도 한다. 화면비가 2 : 1인 영화를 대각선의 길이가 27인치인 예전 텔레비전 화면에 상영한다고 하자. 어둡게 처리된 띠 하나의 높이는 몇 인치인가?



- (A) 2 (B) 2.25 (C) 2.5 (D) 2.7 (E) 3

핵심 아이디어. 4 : 3인 직사각형은 가로, 세로, 대각선의 길이의 비가 4 : 3 : 5입니다(3-4-5 직각삼각형). 그래서 대각선 27인치로부터 화면의 가로와 세로 길이를 한 번에 구할 수 있습니다. 영화는 화면의 가로 전체를 사용합니다.

1단계: 화면. 가로 : 세로 : 대각선 = 4 : 3 : 5이고 대각선이 27이므로, 한 “몫”은 $\frac{27}{5} = 5.4$ 인치입니다. 가로는 $4 \times 5.4 = 21.6$ 인치, 세로는 $3 \times 5.4 = 16.2$ 인치입니다.

2단계: 영화. 영화는 화면보다 가로로 더 길쭉하므로 가로 21.6인치 전체를 채웁니다. 화면비가 2 : 1이므로 영화의 높이는 $\frac{21.6}{2} = 10.8$ 인치입니다.

3단계: 띠. 남은 높이는 $16.2 - 10.8 = 5.4$ 인치이고, 이것을 위아래 띠가 똑같이 나눕니다. 띠 하나의 높이는 $\frac{5.4}{2} = 2.7$ 인치입니다.

주의. 5.4인치는 어두운 부분의 전체 높이입니다. 문제는 띠 하나의 높이를 묻고 있으므로 반으로 나누어야 합니다.

정답: (D) 2.7

15 정수론

출처: 2015 AMC 10A 15번

x 와 y 가 서로소인 양의 정수일 때, 분수 $\frac{x}{y}$ 전체의 집합을 생각하자. 이 분수 중 분자와 분모를 모두 1씩 늘리면 분수의 값이 10% 증가하는 것은 몇 개인가?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 무수히 많다

핵심 아이디어. 조건을 x 와 y 에 대한 방정식으로 바꿉니다. 분모를 없애면 xy 항과 함께 x 항, y 항이 있는 방정식이 남는데, 이는 두 괄호의 곱이 상수가 되도록 인수분해하라는 신호입니다. 그러면 경우가 유한개만 남습니다.

1단계: 방정식. “10% 증가한다”는 것은 $\frac{11}{10}$ 을 곱한다는 뜻입니다.

$$\frac{x+1}{y+1} = \frac{11}{10} \cdot \frac{x}{y}.$$

교차하여 곱하면 $10y(x+1) = 11x(y+1)$, 즉 $10xy + 10y = 11xy + 11x$ 이고, 이를 정리하면 다음과 같습니다.

$$xy + 11x - 10y = 0.$$

2단계: 인수분해. $(x-10)(y+11) = xy + 11x - 10y - 110$ 이므로 방정식은 다음과 같이 바뀝니다.

$$(x-10)(y+11) = -110.$$

3단계: 경우 나누기. $y+11$ 은 11보다 큰 양의 정수이므로 $x-10$ 은 음수여야 합니다. 즉 $1 \leq x \leq 9$ 입니다. 그러면 $y+11$ 은 110의 약수 중 11보다 큰 것, 즉 22, 55, 110 중 하나입니다.

- $y+11 = 22$ 이면 $x-10 = -5$ 이고, 분수는 $\frac{5}{11}$ 입니다.
- $y+11 = 55$ 이면 $x-10 = -2$ 이고, 분수는 $\frac{8}{44}$ 입니다.
- $y+11 = 110$ 이면 $x-10 = -1$ 이고, 분수는 $\frac{9}{99}$ 입니다.

4단계: 서로소 조건. $\frac{8}{44}$ 와 $\frac{9}{99}$ 는 기약분수가 아닙니다(각각 $\gcd = 4, 9$). $\frac{5}{11}$ 만 조건을 만족합니다. 검산: $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ 이고 $\frac{11}{10} \cdot \frac{5}{11} = \frac{1}{2}$ 입니다.

주의. x 와 y 가 서로소여야 한다는 조건을 잊으면 세 쌍을 모두 세어 3, 즉 (D)를 고르게 됩니다.

정답: (B) 1

16 경우의 수와 확률

출처: 2014 AMC 10B 16번

공정한 정육면체 주사위 네 개를 던진다. 네 개의 주사위 중 적어도 세 개에서 같은 눈이 나올 확률은?

- (A) $\frac{1}{36}$ (B) $\frac{7}{72}$ (C) $\frac{1}{9}$ (D) $\frac{5}{36}$ (E) $\frac{1}{6}$

핵심 아이디어. “적어도 세 개”는 겹치지 않는 두 경우로 깔끔하게 나뉩니다. **정확히** 세 개가 같은 경우와 **네 개 모두** 같은 경우입니다. 각 경우에서 순서를 고려한 결과의 수를 세어 6^4 로 나눕니다.

1단계. 주사위는 서로 구별되므로(빨강, 파랑, 초록, 흰색 주사위라고 생각합시다), 순서를 고려한 결과는 모두 $6^4 = 1296$ 가지이고 각각 일어날 가능성이 같습니다.

2단계: 정확히 세 개가 같은 경우. 이런 결과는 세 가지를 차례로 골라서 만듭니다. 반복되는 눈(6가지), 다른 하나의 눈(반복되는 눈과 달라야 하므로 5가지), 그리고 네 주사위 중 어느 것에서 다른 눈이 나오는지(4가지)입니다. 따라서 $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ 가지입니다.

3단계: 네 개 모두 같은 경우. 공통인 눈은 6가지 중 아무것이나 될 수 있으므로 6가지입니다.

4단계. 두 경우는 겹치지 않으므로 확률은 다음과 같습니다.

$$P = \frac{120 + 6}{1296} = \frac{126}{1296} = \frac{7}{72}.$$

주의. 어느 주사위가 다른 눈인지 고르는 것을 잊으면 2단계에서 $6 \cdot 5 = 30$ 가지만 세게 되어 $\frac{30+6}{1296} = \frac{1}{36}$, 즉 (A)가 됩니다. 반대로 “같은 눈이 나올 주사위 세 개를 고르고(4가지) 네 번째 주사위는 아무 눈이나 나오게 한다(6가지)”라고 세면 $6 \cdot 4 \cdot 6 = 144$ 가 되는데, 이는 네 개 모두 같은 경우를 각각 네 번씩 센 것입니다. $\frac{144}{1296} = \frac{1}{9}$ 은 (C)입니다.

정답: (B) $\frac{7}{72}$

17 기하

출처: 2003 AMC 10B 17번

아이스크림콘은 바닐라 아이스크림으로 된 구와, 그 구와 지름이 같은 직원뿔로 이루어져 있다. 아이스크림이 녹으면 원뿔을 정확히 가득 채운다. 녹은 아이스크림의 부피는 얼어 있는 아이스크림 부피의 75%라고 가정한다. 원뿔의 높이와 반지름의 비는? (참고: 반지름이 r , 높이가 h 인 원뿔의 부피는 $\frac{\pi r^2 h}{3}$ 이고, 반지름이 r 인 구의 부피는 $\frac{4\pi r^3}{3}$ 이다.)

- (A) 2 : 1 (B) 3 : 1 (C) 4 : 1 (D) 16 : 3 (E) 6 : 1

핵심 아이디어. “원뿔을 정확히 가득 채운다”는 것은 두 부피 사이의 등식입니다. 원뿔과 구는 지름이 같으므로 반지름 r 도 같습니다. 따라서 이 등식에는 다른 미지수가 h 하나뿐이고, 이를 풀면 비 $h : r$ 이 바로 나옵니다.

1단계. 공통 반지름을 r 이라 합시다. 얼어 있는 구의 부피는 $\frac{4}{3}\pi r^3$ 입니다. 녹으면 부피가 그 75% = $\frac{3}{4}$ 로 줄어듭니다.

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \pi r^3.$$

2단계. 이 녹은 아이스크림이 반지름이 r 이고 높이가 h 인 원뿔을 정확히 가득 채웁니다.

$$\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

3단계. 양변을 πr^2 (0이 아님)으로 나누면 $r = \frac{1}{3}h$ 이므로 $h = 3r$ 입니다. 높이와 반지름의 비는 3 : 1입니다.

주의. 75%를 무시하고 $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ 로 놓으면 $h = 4r$, 즉 (C)가 됩니다. 75%를 거꾸로 적용하여 $\frac{3}{4}$ 을 곱하는 대신 나누면 $\frac{16}{9}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ 가 되어 $h = \frac{16}{3}r$, 즉 (D)가 됩니다.

정답: (B) 3 : 1

18 경우의 수와 확률

출처: 2015 AMC 10B 18번

요한은 공정한 동전 64개를 가지고 있다. 요한은 동전을 모두 던진다. 뒷면이 나온 동전은 다시 던진다. 두 번째 던졌을 때 뒷면이 나온 동전은 세 번째로 던진다. 이제 앞면이 나와 있는 동전의 개수의 기댓값은?

- (A) 32 (B) 40 (C) 48 (D) 56 (E) 64

핵심 아이디어. 모든 동전은 다른 동전과 독립적으로 같은 규칙에 따라 다루어지므로, 동전 **하나**가 최종적으로 앞면일 확률을 구해 64를 곱하면 됩니다(기댓값의 선형성). 동전 하나에 대해서는 여사건을 생각하는 것이 가장 간단합니다. 동전이 최종적으로 뒷면인 것은 그 동전을 던질 때마다 **매번** 뒷면이 나온 경우뿐입니다.

1단계. 동전 하나를 따라가 봅시다. 이 동전은 뒷면이 나왔을 때만 다시 던지고, 늦어도 세 번째 던진 뒤에는 멈춥니다. 따라서 최종적으로 뒷면인 것은 첫째, 둘째, 셋째 던지기가 모두 뒷면일 때이고, 그 확률은 다음과 같습니다.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

그 밖의 경우에는 어느 시점에 앞면이 나와서 거기서 멈추었으므로, 최종적으로 앞면일 확률은 $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ 입니다.

2단계. 앞면의 개수의 기댓값은 64개의 동전 각각이 최종적으로 앞면일 확률을 모두 더한 것입니다.

$$64 \cdot \frac{7}{8} = 56.$$

주의. 두 번째 던진 뒤에 멈춘다고 생각하면 동전이 뒷면으로 끝날 확률이 $\frac{1}{4}$ 가 되어 $64 \cdot \frac{3}{4} = 48$, 즉 (C)를 얻습니다. 문제를 꼼꼼히 읽어야 합니다. 앞면이 나올 기회는 **세 번**입니다.

다른 풀이. 각 회차의 기대 개수를 따라가 봅시다. 평균적으로 64개의 동전 중 절반인 32개는 첫 번째 던지기에서 앞면이 나오고, 32개는 다시 던집니다. 그중 절반인 16개는 앞면이 나오고 16개는 세 번째로 던지며, 다시 그중 절반인 8개가 앞면이 나옵니다. 기대 총합은 $32 + 16 + 8 = 56$ 입니다.

정답: (D) 56

19 기하

출처: 2010 AMC 10A 19번

모든 내각의 크기가 같은 육각형 $ABCDEF$ 의 변의 길이에 대하여 다음이 성립한다.

$$AB = CD = EF = 1$$

$$BC = DE = FA = r.$$

$\triangle ACE$ 의 넓이는 육각형의 넓이의 70%이다. 가능한 모든 r 의 값의 합은?

- (A) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (B) $\frac{10}{3}$ (C) 4 (D) $\frac{17}{4}$ (E) 6

핵심 아이디어. 육각형을 $\overline{AC}$, $\overline{CE}$, $\overline{EA}$ 를 따라 자르면 $\triangle ACE$ 와 귀퉁이 삼각형 세 개가 남고, 각 귀퉁이 삼각형은 길이가 1과 r 인 두 변이 120° 의 각을 끼고 있습니다. 따라서 두 넓이 모두 r 만으로 나타낼 수 있습니다. “가능한 모든 값의 합”이라는 표현은 70% 조건이 r 에 대한 이차방정식이 된다는 신호이고, 그러면 근과 계수의 관계로 방정식을 풀지 않고도 합을 구할 수 있습니다.

1단계: 귀퉁이 삼각형. 모든 내각의 크기가 같은 육각형에서 각 내각의 크기는 $\frac{(6-2) \cdot 180^\circ}{6} = 120^\circ$ 입니다. 삼각형 ABC , CDE , EFA 는 각각 길이가 1과 r 인 두 변과 그 끼인각 120° 를 가지므로 서로 합동입니다 (SAS 합동). 각 삼각형의 넓이는 다음과 같습니다.

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot r \cdot \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} r.$$

2단계: $\triangle ACE$. 세 삼각형이 합동이므로 $AC = CE = EA$ 이고, 따라서 $\triangle ACE$ 는 정삼각형입니다. $\triangle ABC$ 에서 $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ 을 이용하여 코사인법칙을 쓰면

$$AC^2 = 1^2 + r^2 - 2 \cdot 1 \cdot r \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = r^2 + r + 1,$$

이므로 $[ACE] = \frac{\sqrt{3}}{4} AC^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (r^2 + r + 1)$ 입니다.

3단계: 육각형. 귀퉁이 삼각형 세 개를 더하면 다음과 같습니다.

$$[ABCDEF] = \frac{\sqrt{3}}{4} (r^2 + r + 1) + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} r = \frac{\sqrt{3}}{4} (r^2 + 4r + 1).$$

4단계: 조건. $[ACE] = \frac{7}{10} [ABCDEF]$ 입니다. 양변에서 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 을 약분하고 10을 곱하면 다음과 같습니다.

$$10(r^2 + r + 1) = 7(r^2 + 4r + 1) \implies 3r^2 - 18r + 3 = 0 \implies r^2 - 6r + 1 = 0.$$

5단계. 판별식은 $36 - 4 = 32 > 0$ 이므로 두 실근 $r = 3 \pm 2\sqrt{2}$ 가 있습니다. 두 근 모두 양수이므로 ($2\sqrt{2} \approx 2.83 < 3$) 둘 다 실제로 육각형을 만들고, 각각 넓이의 비를 정말로 70%로 만듭니다. 근과 계수의 관계에 의해 두 근의 합은 6입니다.

주의. 근 하나에서 멈추면 안 됩니다. 큰 값 $3 + 2\sqrt{2} \approx 5.83$ 만 취하면 맞는 선택지가 없습니다. 문제는 가능한 모든 값의 합을 묻고 있으며, 작은 근 $3 - 2\sqrt{2} \approx 0.17$ 도 똑같이 유효합니다.

다른 풀이. 육각형의 넓이는 변 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ 를 연장하여 구할 수도 있습니다. 세 직선은 정삼각형을 이루고, 잘려 나간 각 귀퉁이는 한 변의 길이가 r 인 정삼각형입니다(세 각이 모두 60° 이므로). 큰 삼각형의 한 변의 길이는 $r + 1 + r = 2r + 1$ 이므로 $[ABCDEF] = \frac{\sqrt{3}}{4}((2r + 1)^2 - 3r^2) = \frac{\sqrt{3}}{4}(r^2 + 4r + 1)$ 이고, 3 단계의 결과와 같습니다.

정답: (E) 6

20 기하

출처: 2016 AMC 10B 20번

평면에서의 확대·축소 변환, 즉 배율이 양수인 크기 변환이 중심이 $A(2, 2)$ 이고 반지름이 2인 원을 중심이 $A'(5, 6)$ 이고 반지름이 3인 원으로 옮긴다. 이 변환에 의하여 원점 $O(0, 0)$ 이 움직인 거리는?

- (A) 0 (B) 3 (C) $\sqrt{13}$ (D) 4 (E) 5

핵심 아이디어. 확대·축소 변환은 배율과 중심, 두 가지로 결정됩니다. 반지름이 $2 \rightarrow 3$ 으로 바뀌므로 배율은 $k = \frac{3}{2}$ 이고, 이 변환은 원의 중심을 상이 되는 원의 중심으로 옮기므로 $A \mapsto A'$ 으로부터 변환의 중심을 찾을 수 있습니다. 변환을 알고 나면 O 가 어디로 가는지 계산하기만 하면 됩니다.

1단계: 배율. 모든 길이에 같은 수가 곱해지고 반지름은 2에서 3으로 바뀌므로 $k = \frac{3}{2}$ 입니다.

2단계: 중심. 중심이 C 이고 배율이 k 인 변환은 점 P 를 $C + k(P - C)$ 로 옮깁니다. 이 변환은 $A = (2, 2)$ 를 $A' = (5, 6)$ 으로 옮겨야 합니다.

$$C + \frac{3}{2}((2, 2) - C) = (5, 6) \implies (3, 3) - \frac{1}{2}C = (5, 6) \implies C = (-4, -6).$$

(검산: C, A, A' 은 한 직선 위에 있고, $CA = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$, $CA' = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15 = \frac{3}{2} \cdot 10$ 입니다.)

3단계: 원점의 상. $O = (0, 0)$ 은 다음 점으로 옮겨집니다.

$$C + \frac{3}{2}(O - C) = -\frac{1}{2}C = (2, 3).$$

4단계. 원점은 $(0, 0)$ 에서 $(2, 3)$ 으로 이동하고, 그 거리는 $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ 입니다.

주의. 확대·축소 변환은 평행이동이 아니므로, 모든 점이 같은 거리만큼 움직이지는 않습니다. O 가 A 만큼 움직인다고 가정하면 $AA' = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, 즉 (E)를 얻게 됩니다. 각 점은 중심으로부터의 거리의 $(k - 1)$ 배만큼 움직이므로, C 근처의 점은 거의 움직이지 않고 먼 점은 많이 움직입니다.

다른 풀이. 배율이 k 인 확대·축소 변환은 고정된 벡터 b 에 대하여 $P \mapsto kP + b$ 꼴입니다. $A \mapsto A'$ 에서 $(5, 6) = \frac{3}{2}(2, 2) + b$ 이므로 $b = (5, 6) - (3, 3) = (2, 3)$ 입니다. 원점은 $\frac{3}{2}(0, 0) + b = (2, 3)$ 으로 옮겨지고, 이동 거리는 $\sqrt{13}$ 입니다. 중심을 구할 필요가 없습니다.

정답: (C) $\sqrt{13}$

21 경우의 수와 확률

출처: 2005 AMC 10B 21번

모자 안에 쪽지 40장이 들어 있다. 각 쪽지에는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 중 하나의 수가 적혀 있으며, 각 수는 네 장의 쪽지에 적혀 있다. 모자에서 쪽지 네 장을 임의로, 다시 넣지 않고 꺼낸다. 네 장의 쪽지에 모두 같은 수가 적혀 있을 확률을 p 라 하자. 쪽지 두 장에는 수 a 가, 나머지 두 장에는 수 $b \neq a$ 가 적혀 있을 확률을 q 라 하자. $\frac{q}{p}$ 의 값은?

- (A) 162 (B) 180 (C) 324 (D) 360 (E) 720

핵심 아이디어. 문제는 두 확률의 비를 묻고 있습니다. 두 확률 모두 “조건에 맞는 경우의 수 ÷ 가능한 모든 경우의 수” 이고, 분모는 둘 다 $\binom{40}{4}$ 로 같으므로 약분됩니다. 즉 $\frac{q}{p}$ 는 조건에 맞는 두 경우의 수의 비일 뿐입니다. 큰 수를 다룰 필요가 없습니다.

1단계: 공통 분모. 40장의 쪽지를 서로 구별되는 것으로 보고(각 쪽지는 물리적으로 서로 다른 물건입니다), 쪽지 4장으로 이루어진 순서 없는 묶음의 개수를 셉니다. 4장으로 이루어진 모든 묶음은 뽑힐 가능성이 같고, 그 개수는 $\binom{40}{4}$ 입니다. 따라서 다음과 같습니다.

$$p = \frac{N_p}{\binom{40}{4}}, \quad q = \frac{N_q}{\binom{40}{4}}, \quad \frac{q}{p} = \frac{N_q}{N_p}.$$

2단계: N_p 세기. 네 장의 쪽지에 모두 같은 수가 적혀 있는 경우입니다. 수를 고르고(10가지), 그 수가 적힌 쪽지 네 장을 모두 뽑아야 하는데, 그 방법은 $\binom{4}{4} = 1$ 가지입니다. 따라서 $N_p = 10$ 입니다.

3단계: N_q 세기. 쪽지 두 장에는 a , 두 장에는 $b \neq a$ 가 적혀 있는 경우입니다. 먼저 수의 쌍 $\{a, b\}$ 를 고르는 방법은 $\binom{10}{2} = 45$ 가지입니다. (순서 없는 쌍입니다. “3 두 장과 7 두 장”은 “7 두 장과 3 두 장”과 같은 결과입니다.) 그다음 a 가 적힌 쪽지 네 장 중 어느 두 장을 뽑을지 $\binom{4}{2} = 6$ 가지, b 가 적힌 쪽지 네 장 중 어느 두 장을 뽑을지 또 6가지를 곱합니다.

$$N_q = 45 \cdot 6 \cdot 6 = 1620.$$

4단계. $\frac{q}{p} = \frac{1620}{10} = 162$ 입니다.

주의. a 를 먼저 고르고(10가지) 그다음 b 를 고르면(9가지) 수의 쌍 하나를 (a, b) 로 한 번, (b, a) 로 한 번, 두 번씩 세게 됩니다. 그러면 $90 \cdot 36 = 3240$ 이 되어 비가 324, 즉 (C)가 됩니다. 사건은 “두 장에는 한 수, 다른 두 장에는 또 다른 수”라는 것뿐이므로 a 와 b 의 순서는 상관없습니다.

다른 풀이. 쪽지를 한 장씩 뽑아 봅시다. 첫 번째 쪽지는 아무것이든 됩니다. p 의 경우, 나머지 세 장이 모두 첫 번째 쪽지와 같아야 하므로 $p = \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} \cdot \frac{1}{37}$ 입니다. q 의 경우, 네 자리가 같은 수끼리 두 쌍으로 나뉘고, 첫 번째 쪽지를 포함하는 쌍은 $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}$ 중 하나이므로 3가지 패턴이 있습니다. 패턴 $\{1, 2\}, \{3, 4\}$ 의 경우, 2번 쪽지는 1번 쪽지와 같고($\frac{3}{39}$), 3번 쪽지는 새로운 수이며($\frac{36}{38}$), 4번 쪽지는 3번 쪽지와 같습니다($\frac{3}{37}$). 나머지 두 패턴도 확률이 같으므로 다음과 같습니다.

$$\frac{q}{p} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 36 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{972}{6} = 162.$$

정답: (A) 162

22 정수론

출처: 2006 AMC 10A 22번

두 농부는 돼지 한 마리는 \$300, 염소 한 마리는 \$210의 가치가 있다고 합의한다. 한 농부가 다른 농부에게 빚을 지면 돼지나 염소로 빚을 갚고, 필요하면 “거스름돈”을 염소나 돼지로 받는다. (예를 들어, \$390의 빚은 돼지 두 마리로 갚고 거스름돈으로 염소 한 마리를 받을 수 있다.) 이런 방법으로 해결할 수 있는 가장 작은 양의 빚은 얼마인가?

- (A) \$5 (B) \$10 (C) \$30 (D) \$90 (E) \$210

핵심 아이디어. 건네준 가축은 양수로, 거스름돈으로 받은 가축은 음수로 세면, 해결할 수 있는 빚은 정확히 p, g 가 (부호에 상관없는) 정수일 때 $300p + 210g$ 꼴의 수입니다. 두 가지만 관찰하면 끝납니다. 이런 수는 모두 $\gcd(300, 210)$ 의 배수이고, 300과 210에 유클리드 호제법을 적용하면 그 최대공약수를 실제로 만드는 방법을 알 수 있습니다.

1단계: 갚을 수 있는 금액. 빚진 사람이 돼지 p 마리와 염소 g 마리를 건네준다고 합시다. 여기서 음수는 거스름돈으로 받은 가축을 뜻합니다. 그러면 실제로 오가는 금액은 다음과 같습니다.

$$D = 300p + 210g.$$

문제의 예는 $p = 2, g = -1$ 인 경우로, $600 - 210 = 390$ 입니다.

2단계: 하한. $300 = 30 \cdot 10, 210 = 30 \cdot 7$ 이므로 $D = 30(10p + 7g)$ 는 항상 30의 배수입니다. 30의 양의 배수는 30 이상이므로, \$30보다 작은 양의 빚은 해결할 수 없습니다. 특히 \$5나 \$10의 빚은 불가능합니다.

3단계: \$30의 빚은 해결 가능. 유클리드 호제법을 흉내 냅니다.

$$300 - 210 = 90, \quad 210 - 2 \cdot 90 = 30.$$

첫째 식을 둘째 식에 대입하면 $30 = 210 - 2(300 - 210) = 3 \cdot 210 - 2 \cdot 300$ 입니다. 따라서 \$30의 빚은 염소 3마리(\$630)를 주고 거스름돈으로 돼지 2마리(\$600)를 받아서 갚을 수 있습니다.

4단계. 두 가지가 모두 확인되었습니다. 해결할 수 있는 빚은 모두 30의 배수이고, 30 자체도 가능합니다. 가장 작은 양의 빚은 \$30입니다.

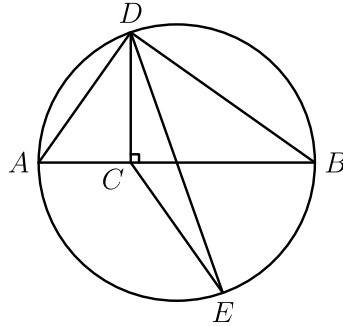
주의. 가장 눈에 띄는 거래, 즉 돼지 한 마리를 주고 거스름돈으로 염소 한 마리를 받는 거래로는 $300 - 210 = \$90$ 의 빚이 해결되며, 이는 (D)입니다. 해결할 수 있는 빚이기는 하지만 가장 작은 빚은 아닙니다. 가축을 더 많이 쓰면 실제로 오가는 금액을 \$30까지 줄일 수 있습니다.

정답: (C) \$30

23 기하

출처: 2005 AMC 10A 23번

AB 는 원의 지름이고, 점 C 는 AB 위의 점으로 $2 \cdot AC = BC$ 이다. 점 D 와 E 는 원 위의 점으로 $DC \perp AB$ 이고 DE 는 또 다른 지름이다. $\triangle DCE$ 의 넓이는 $\triangle ABD$ 의 넓이의 몇 배인가?



- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{2}{3}$

핵심 아이디어. 선분 DC 는 $\triangle ABD$ 의 높이이므로, 모든 것을 DC 와 비교해 봅시다. 그림의 두 가지 특징이 방법을 알려 줍니다. 중심 O 는 AB 위에서 C 바로 옆에 있고, O 는 지름 DE 의 중점입니다. 따라서 CO 는 $\triangle DCE$ 의 중선이고, 이 중선은 삼각형을 넓이가 같은 두 부분으로 나누며, 그중 $\triangle DCO$ 는 $\triangle ABD$ 와 높이 DC 를 공유합니다.

1단계: C 의 위치. 원의 중심을 O 라 합시다. $AC + BC = AB$ 와 $BC = 2 \cdot AC$ 에서 $3 \cdot AC = AB$ 이므로 $AC = \frac{1}{3}AB$ 입니다. 중심은 $AO = \frac{1}{2}AB$ 인 곳에 있으므로 다음과 같습니다.

$$CO = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{3}AB = \frac{1}{6}AB.$$

2단계: $\triangle DCO$ 와 $\triangle ABD$ 의 비교. 두 삼각형은 모두 밑변이 직선 AB 위에 있고, 높이 DC 가 같습니다 ($DC \perp AB$ 이므로).

$$[DCO] = \frac{1}{2} \cdot CO \cdot DC, \quad [ABD] = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot DC,$$

따라서 $[DCO] = \frac{CO}{AB}[ABD] = \frac{1}{6}[ABD]$ 입니다.

3단계: $\triangle DCO$ 에서 $\triangle DCE$ 로. O 는 DE 의 중점이므로 $\overline{CO}$ 는 $\triangle DCE$ 의 중선입니다. 중선은 삼각형을 밑변의 길이가 같고 ($DO = OE$) C 로부터의 높이가 같은 두 삼각형으로 나누므로, 두 삼각형의 넓이는 같습니다. 즉 $[DCE] = 2[DCO]$ 입니다.

4단계. 이를 종합하면 $[DCE] = 2 \cdot \frac{1}{6}[ABD] = \frac{1}{3}[ABD]$ 이므로 비는 $\frac{1}{3}$ 입니다. (D 가 AB 의 위쪽에 있든 아래쪽에 있든 상관없습니다. 두 그림은 서로 거울에 비친 모양입니다.)

주의. 2단계에서 멈추면 $[DCO] : [ABD] = \frac{1}{6}$, 즉 (A)를 얻습니다. 문제에서 묻는 삼각형은 $\triangle DCE$ 로, 원의 반대편에 있는 E 까지 뻗어 있어서 $\triangle DCO$ 의 두 배입니다.

다른 풀이. 반지름을 3으로 놓고 좌표를 사용합시다. $A = (-3, 0)$, $B = (3, 0)$, $O = (0, 0)$ 이고, $AC = 2$ 이므로 $C = (-1, 0)$ 입니다. 그러면 $1 + 8 = 9$ 이므로 $D = (-1, \sqrt{8})$ 은 원 위에 있고, $E = -D = (1, -\sqrt{8})$ 입니다. $[ABD] = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{8} = 3\sqrt{8}$ 입니다. $\triangle DCE$ 에서 세로 변 DC (길이 $\sqrt{8}$)를 밑변으로 잡으면, E 는 이 변으로부터 가로 방향으로 $1 - (-1) = 2$ 만큼 떨어져 있으므로 $[DCE] = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{8} \cdot 2 = \sqrt{8}$ 입니다. 비는 $\frac{\sqrt{8}}{3\sqrt{8}} = \frac{1}{3}$ 입니다.

정답: (C) $\frac{1}{3}$

24 대수

출처: 2014 AMC 10A 24번

자연수로 이루어진 수열을 다음과 같이 만든다. 처음 4개를 쓰고, 그다음 하나를 건너뛰고, 다음 5개를 쓰고, 2개를 건너뛰고, 6개를 쓰고, 3개를 건너뛰는 식으로, n 번째 반복에서는 $n + 3$ 개를 쓰고 n 개를 건너뛰는. 이 수열은 다음과 같이 시작한다.

1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 13.

이 수열의 500,000번째 수는?

- (A) 996,506 (B) 996,507 (C) 996,508 (D) 996,509 (E) 996,510

핵심 아이디어. 완전한 반복 n 번이 끝난 뒤의 누적 합계 두 가지를 관리합니다. 지금까지 쓴 수의 개수와, 사용한(쓰거나 건너뛰는) 자연수의 개수입니다. 쓴 수의 개수로 500,000번째 항이 몇 번째 반복에 들어 있는지 알 수 있고, 사용한 수의 개수로 그 반복이 어디서 시작하는지 알 수 있습니다. 선택지끼리 1씩 차이 나므로, 마지막 단계는 어렵지 않거나 정확한 셈이 필요하다는 강한 경고입니다.

1단계: 두 합계. k 번째 반복에서는 $k + 3$ 개의 수를 쓰고 k 개를 건너뛰므로, $2k + 3$ 개의 수를 사용합니다. n 번 반복한 뒤에는 다음과 같습니다.

$$\text{쓴 수} = \sum_{k=1}^n (k+3) = \frac{n(n+1)}{2} + 3n = \frac{n(n+7)}{2}, \quad \text{사용한 수} = \sum_{k=1}^n (2k+3) = n(n+1) + 3n = n^2 + 4n.$$

$n = 2$ 로 확인해 봅시다. 쓴 수 = 9, 사용한 수 = 12 이고, 이는 1-4, 5 건너뛰, 6-10, 11, 12 건너뛰와 일치합니다.

2단계: 몇 번째 반복인가? $\frac{n(n+7)}{2} < 500,000$, 즉 $n(n+7) < 1,000,000$ 을 만족하는 가장 큰 n 을 찾아야 합니다. $n(n+7) \approx n^2$ 이므로 n 은 1000보다 조금 작습니다. 확인해 보면 다음과 같습니다.

$$996 \cdot 1003 = 998,988 < 10^6, \quad 997 \cdot 1004 = 1,000,988 > 10^6.$$

따라서 996번의 완전한 반복이 끝난 뒤 쓴 수는 정확히 $\frac{998,988}{2} = 499,494$ 개이고, 500,000번째 항은 997번째 반복에서 나옵니다.

3단계: 쓰는 부분에 들어 있을까? 997번째 반복에서는 수를 건너뛰기 전에 먼저 $997 + 3 = 1000$ 개의 수를 씁니다. 우리가 구하는 것은 그중 $500,000 - 499,494 = 506$ 번째 수이고 $506 \leq 1000$ 이므로, 이 수는 건너뛰는 부분이 아니라 그 블록에서 쓰는 부분에 들어 있습니다.

4단계: 블록의 시작점. 996번 반복한 뒤 사용한 수는 $996^2 + 4 \cdot 996 = 992,016 + 3,984 = 996,000$ 개입니다. 따라서 997번째 반복에서는 996,001, 996,002, ... 를 연속해서 씁니다.

5단계. 996,001에서 시작하는 연속된 수들 중 506번째 수는 $996,001 + 505 = 996,506$ 입니다.

주의. 하나 차이 오류에 주의합시다. 블록의 1번째 수는 $996,001 + 0$ 이므로 506번째 수는 $996,001 + 505$ 입니다. 506을 더하면 996,507, 즉 (B)가 됩니다.

정답: (A) 996,506

25 경우의 수와 확률

출처: 2013 AMC 10A 25번

정팔각형에 20개의 대각선을 모두 그린다. 정팔각형의 내부(경계 위는 제외)에서 두 개 이상의 대각선이 만나는 서로 다른 점은 몇 개인가?

- (A) 49 (B) 65 (C) 70 (D) 96 (E) 128

핵심 아이디어. 모든 교점은 꼭짓점 4개를 고르는 데서 생기므로 “일반적인” 개수는 $\binom{8}{4} = 70$ 입니다. 하지만 **서로 다른**이라는 표현과 정팔각형의 높은 대칭성은 여러 대각선이 한 점을 지날 수 있다는 경고입니다. 중심은 당연하고, 다른 점도 있을 수 있습니다. 그러므로 70을 센 다음, 세 개 이상의 대각선이 만나는 점을 모두 찾아 중복해서 센 만큼 빼 줍니다.

1단계: 교차하는 쌍. 끝점을 공유하는 두 대각선은 그 꼭짓점, 즉 경계에서만 만납니다. 끝점이 네 개 모두 다른 두 대각선은 팔각형의 둘레를 따라 끝점이 번갈아 놓일 때, 그리고 그때에만 내부에서 교차합니다. 고른 꼭짓점 4개를 두 쌍으로 짝짓는 세 가지 방법 중 정확히 하나(그 네 점이 이루는 사각형의 두 대각선)만 번갈아 놓입니다. 따라서 교차하는 쌍은 $\binom{8}{4} = 70$ 개이고, 세 대각선이 한 점에서 만나는 일이 전혀 없다면 답은 70이 됩니다.

2단계: 좌표와 세 종류의 대각선. $a = 1 + \sqrt{2}$ 로 놓고, 꼭짓점이 다음과 같은 정팔각형(한 변의 길이 2)을 잡습니다.

$$\begin{aligned} V_0 &= (a, 1), & V_1 &= (1, a), & V_2 &= (-1, a), & V_3 &= (-a, 1), \\ V_4 &= (-a, -1), & V_5 &= (-1, -a), & V_6 &= (1, -a), & V_7 &= (a, -1). \end{aligned}$$

회전을 무시하면 대각선은 **짧은 것**(V_7V_1 같은 것, 8개), **중간 길이인 것**(V_0V_3 같은 것, 8개), **지름**(V_0V_4 같은 것, 4개)으로 나뉩니다. 세 개 이상의 대각선이 지나가는 점을 **бом비는 점**이라 합시다. бом비는 점은 어떤 대각선 ℓ 위에 있고, 다른 두 대각선이 바로 그 점에서 ℓ 과 교차합니다. 따라서 ℓ 의 종류별로 확인합니다.

3단계: 짧은 대각선. V_7V_1 은 V_0 만 잘라 내므로, 이와 교차하는 대각선은 V_0 에서 $V_2, \dots, V_6$ 으로 가는 5개입니다. 이들 중 어느 두 개도 V_0 에서만 만나므로, 이들은 V_7V_1 과 서로 다른 5개의 점에서 교차합니다. 짧은 대각선 위에는 бом비는 점이 없습니다.

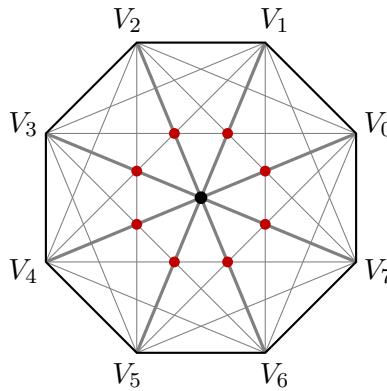
4단계: 중간 길이의 대각선. V_0V_3 은 직선 $y = 1$ 입니다. 이 직선과 교차하는 것은 V_1 또는 V_2 에서 $V_4, \dots, V_7$

로 가는 8개의 대각선입니다. 각 대각선이 $y = 1$ 과 만나는 점의 x 좌표는 다음과 같습니다.

	끝점 V_4	끝점 V_5	끝점 V_6	끝점 V_7
시작점 V_1	$1 - \sqrt{2}$	$\sqrt{2} - 1$	1	$3 - \sqrt{2}$
시작점 V_2	$\sqrt{2} - 3$	-1	$1 - \sqrt{2}$	$\sqrt{2} - 1$

예를 들어 V_1V_6 은 $x = 1$ 이고, V_1V_4 는 $y = x + \sqrt{2}$ 이므로 $x = 1 - \sqrt{2}$ 를 얻습니다. 지름 V_1V_5 는 $y = ax$ 이므로 $x = \frac{1}{a} = \sqrt{2} - 1$ 을 얻습니다. 둘째 행은 첫째 행을 y 축에 대하여 대칭시킨 것입니다. 정확히 두 값 $x = \pm(\sqrt{2} - 1)$ 이 반복되고, 이 두 점은 지름 V_2V_6 과 V_1V_5 위에 있습니다. 따라서 붉은 점은 모두 지름 위에 있습니다.

5단계: 지름. V_0V_4 는 $y = (\sqrt{2} - 1)x$ 입니다. 이와 교차하는 대각선은 V_1, V_2, V_3 중 하나와 V_5, V_6, V_7 중 하나를 잇습니다. 그중 셋은 지름으로, 중심 O 에서 만납니다. 나머지 여섯 개 중 $V_1V_6(x = 1)$ 과 $V_2V_7(x + y = \sqrt{2})$ 은 둘 다 $(1, \sqrt{2} - 1)$ 에서 만나고, V_2V_5 와 V_3V_6 은 둘 다 $(-1, 1 - \sqrt{2})$ 에서 만납니다. 마지막으로 V_1V_7 과 V_3V_5 는 각각 홀로 $x = \pm\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ 에서 만납니다. 따라서 각 지름 위에는 중심(4개의 대각선 위에 있음)과, 정확히 3개의 대각선 위에 있는 다른 붉은 점이 정확히 두 개 있습니다. 두 지름은 O 만 공유하므로, 이들은 서로 다른 $4 \cdot 2 = 8$ 개의 점입니다(아래 그림의 빨간 점).



6단계: 개수 바로잡기. m 개의 대각선 위에 있는 점은 70개의 쌍 중에서 $\binom{m}{2}$ 번 세어졌습니다. 중심은 $\binom{4}{2} = 6$ 번, 각 빨간 점은 $\binom{3}{2} = 3$ 번 세어졌지만, 각 점은 한 번씩만 세어야 합니다.

$$70 - (6 - 1) - 8(3 - 1) = 70 - 5 - 16 = 49.$$

주의. 세 대각선이 한 점에서 만나는 일이 없다고 가정하면 $\binom{8}{4} = 70$, 즉 (C)를 얻습니다. 중심은 찾았지만 세 대각선이 만나는 여덟 점을 놓치면 $70 - 5 = 65$, 즉 (B)를 얻습니다.

정답: (A) 49