

2025학년도 수시 면접·구술고사

수학 기출

문항 · 채점 기준 · 예시 답안

한국과학기술원 (KAIST)

문항 및 제시문

실수 c 와 다항식 $p(x)$ 에 대하여, 수열 $\{a_n\}$ 이

$$\begin{cases} a_1 = c \\ a_{n+1} = p(a_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

와 같이 귀납적으로 정의된다. 수열에 대한 용어를 아래와 같이 정의한다.

<정의>

- 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+1} \geq a_n$ 이면, 수열 $\{a_n\}$ 을 증가수열이라 한다.
- 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+1} \leq a_n$ 이면, 수열 $\{a_n\}$ 을 감소수열이라 한다.
- 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+1} = a_n$ 이면, 수열 $\{a_n\}$ 을 상수수열이라 한다.

(1) 다음 명제의 참, 거짓을 판별하고 그 이유를 설명하시오.

주어진 실수 β 에 대하여 $p(x) = x^3 + \beta$ 일 때, 임의의 실수 c 에 대하여 수열 $\{a_n\}$ 은 증가수열 또는 감소수열이다.

(1점)

(2) $p(x) = x^3$ 일 때, 수열 $\{a_n\}$ 이 증가수열이 되는 c 의 범위와 감소수열이 되는 c 의 범위를 각각 구하시오. (2점)

(3) $p(x) = x^3 + \beta$ 이고 $\beta > 0$ 일 때, 수열 $\{a_n\}$ 이 상수수열이 되는 c 의 개수를 구하시오. (2점)

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	수학적 귀납법과 문제의 지문에서 제시한 증가수열 및 감소수열의 정의를 정확히 이해하고, $p(c)$ 와 c 의 대소관계에 따라 증가수열 또는 감소수열이 됨을 논리적인 방법으로 보인 경우	1점
(2)	증가수열이 되는 c 의 범위와 감소수열이 되는 c 의 범위를 올바르게 구하고, 정답을 구하는 과정을 논리적으로 설명한 경우	2점
(3)	수열 $\{a_n\}$ 이 상수수열이 되는 c 의 개수를 올바르게 구하고, 그 이유를 논리적으로 설명한 경우	2점

예시 답안

(1) $p'(x) = 3x^2 \geq 0$ 이므로, $p(x)$ 는 증가함수이다.

만약 $c \leq p(c)$ 이면, $a_1 \leq a_2$ 이다.

따라서, $a_2 = p(a_1) \leq p(a_2) = a_3$.

$n = k$ 일 때, $a_k \leq a_{k+1}$ 이라 가정하면

$$a_{k+1} = p(a_k) \leq p(a_{k+1}) = a_{k+2}$$

이므로 수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 n 에 대해 $a_n \leq a_{n+1}$, 즉 $\{a_n\}$ 이 증가수열이다.

만약 $c \geq p(c)$ 이면, $a_1 \geq a_2$ 이다.

따라서, $a_2 = p(a_1) \geq p(a_2) = a_3$.

$n = k$ 일 때, $a_k \geq a_{k+1}$ 이면

$$a_{k+1} = p(a_k) \geq p(a_{k+1}) = a_{k+2}$$

이므로 수학적 귀납법에 의해, 모든 자연수 n 에 대해 $a_n \geq a_{n+1}$, 즉 $\{a_n\}$ 이 감소수열이다.

정답 : 참

$$(2) p(x) = x^3, \begin{cases} a_1 = c \\ a_{n+1} = p(a_n) \quad (n=1,2,3,\dots) \end{cases}$$

$$a_{n+1} - a_n = p(a_n) - a_n = a_n^3 - a_n = a_n(a_n - 1)(a_n + 1)$$

- $a_n \leq -1$ 또는 $0 \leq a_n \leq 1$ 이면, $a_{n+1} \leq a_n$
- $-1 \leq a_n \leq 0$ 또는 $a_n \geq 1$ 이면, $a_{n+1} \geq a_n$

i. $c = \pm 1$ 이거나 $c = 0$ 이면, $p(c) = c$. 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n = c$, 즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 상수수열이다. (상수수열은 증가수열이자 감소수열이다.)

ii. $0 < c < 1$ 이면, $0 < a_2 < a_1 < 1$ 이다. 부분문제 1)에서 설명한 것과 같이, 수학적 귀납법에 의하여, 모든 자연수 n 에 대하여 $0 < a_{n+1} < a_n < 1$ 을 만족한다.

iii. $c > 1$ 이면, $a_2 > a_1 > 1$ 이므로, 귀납법에 의하여 $a_{n+1} > a_n$, 즉, $\{a_n\}$ 은 증가수열

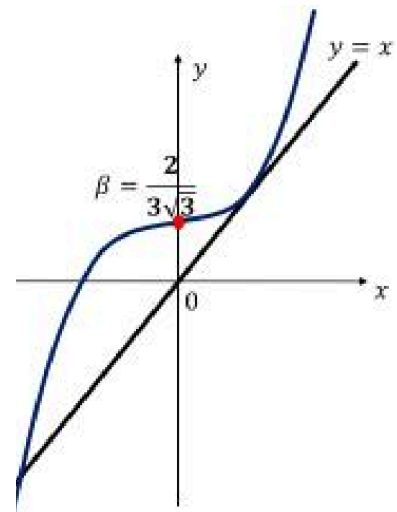
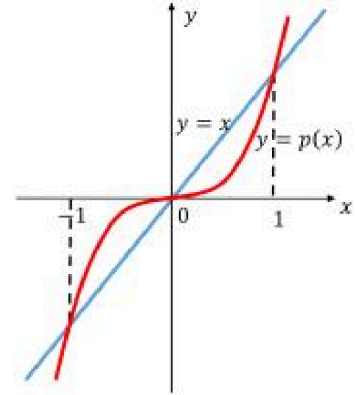
iv. $-1 < c < 0$ 이면, $\{a_n\}$ 은 증가수열

v. $c < -1$ 이면, $\{a_n\}$ 은 감소수열

정답 : $\begin{cases} c \leq -1 \text{ 또는 } 0 \leq c \leq 1 \text{ 이면, } \{a_n\} \text{ 은 감소수열} \\ -1 \leq c \leq 0 \text{ 또는 } c \geq 1 \text{ 이면, } \{a_n\} \text{ 은 증가수열} \end{cases}$

(3) $p(c) = c$ 를 만족하는 c 에 대해 수열 $\{a_n\}$ 은 상수수열이고, 상수수열을 만드는 다른 경우는 없다. 따라서 $\beta > 0$ 의 값에 따라 방정식 $p(x) = x$, 즉 방정식 $x^3 + \beta = x$ 의 해의 개수를 구하면 된다.

$y = x^3 + \beta$ 의 그래프와 $y = x$ 의 그래프가 한 점에서 접할 때의 β 의 값은 $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ (또는 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$)이다.



왜냐하면, 방정식 $p(x) - x = 0$ 의 두 개의 해 중, 양수 해 x_0 에서 $y = p(x)$ 와 $y = x$ 의 그래프는 접한다. $y = x$ 의 접선의 기울기는 항상 1이므로, $p'(x_0) = 3x_0^2 = 1$ 을 만족하는 양수 $x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 가 방정식 $p(x) - x = 0$ 의 양수해가 된다. 이 때, $p(x_0) = x_0$ 이고, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 을 만족해야 하고, 이로부터 $\beta = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ 을 얻는다.

접할 때의 β 를 기준으로 정답 (i), (ii), (iii) 이 된다.

정답 :

(i) $0 < \beta < \frac{2}{3\sqrt{3}}$ (또는 $0 < \beta < \frac{2\sqrt{3}}{9}$) 일 때, 상수수열 개수는 3개

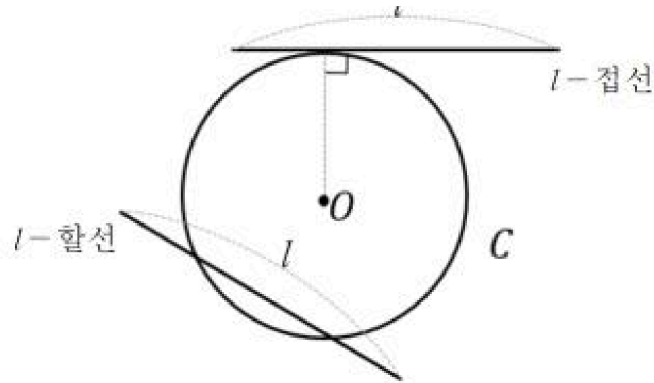
(ii) $\beta = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ (또는 $\beta = \frac{2\sqrt{3}}{9}$)일 때, 상수수열 개수는 2개

(iii) $\beta > \frac{2}{3\sqrt{3}}$ (또는 $\beta > \frac{2\sqrt{3}}{9}$) 일 때, 상수수열 개수는 1개

문항 및 제시문

평면 위에 중심이 O 이고 반지름의 길이가 1인 원 C 가 있다. 길이가 l 이고 원 C 와 한 점에서 접하는 선분을 l -접선이라 한다.

길이가 l 이고 원 C 와 서로 다른 두 점에서 만나는 선분을 l -할선이라 한다. 아래 그림은 l -접선과 l -할선의 한 예시를 보여준다.



T 는 모든 l -접선 위의 모든 점들로 이루어진 집합이고, S 는 모든 l -할선 위의 모든 점들로 이루어진 집합이다. 여기서 l 은 주어진 양수이고 “엘”로 읽는다.

- (1) T 에 포함된 점 p 에 대하여, 점 p 를 지나는 l -접선이 무한히 많지 않은 경우에만 점 p 를 지나는 모든 l -접선의 개수를 $a(p)$ 라 정의하자. $a(p)$ 가 정의되는 점 p 를 모두 찾고, $a(p)$ 를 구하시오. (2점)
- (2) S 에 포함된 점 p 에 대하여, 점 p 를 지나는 l -할선이 무한히 많지 않은 경우에만 점 p 를 지나는 모든 l -할선의 개수를 $b(p)$ 라 정의하자. $b(p)$ 가 정의되는 점 p 를 모두 찾고, $b(p)$ 를 구하시오. (3점)

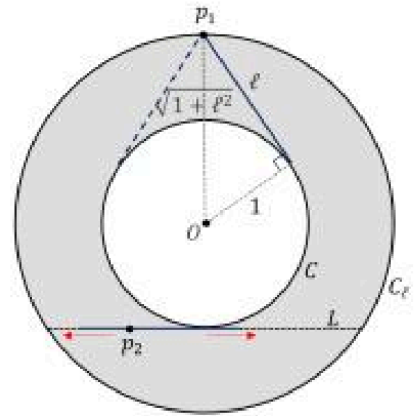
채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	$a(p)$ 가 정의되는 점 p 와 $a(p)$ 의 값을 모두 올바르게 찾고, 그 과정이 논리적인 경우	2점
(2)	$b(p)$ 가 정의되는 점 p 와 $b(p)$ 의 값을 모두 올바르게 찾고, 그 과정이 논리적인 경우	3점

예시 답안

(1) 원 C 의 중심 O 로부터 가장 멀리 떨어진 T 의 점 p_1 은 l -접선의 한 끝점이며 다른 끝점은 원 C 와의 접점이다. 피타고라스 정리에 의해 p_1 과 O 의 거리는 $\sqrt{1+l^2}$ 이다. 점 p_1 을 지나는 l -접선은 2개이므로 $a(p_1) = 2$ 이다.

점 O 를 중심으로 반지름(의 길이가)이 $\sqrt{1+l^2}$ 인 원 C_l 과 원 C 사이에 있는 영역을 생각하자. 이 영역 내부 또는 원 C 위의 점 p_2 를 지나며 원 C 와 접하는 직선을 L 이라 하자. L 을 따라 p_2 를 지나는 l -접선을 무한히 많이 잡을 수 있다.



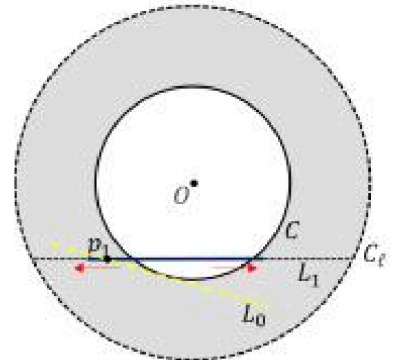
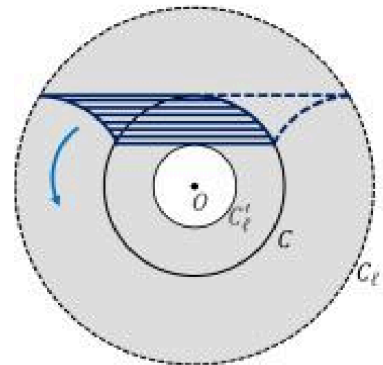
또한, T 는 C_l 과 C 사이에 있는 영역임을 알 수 있다(영역의 경계인 두 원 모두 포함). 따라서, $a(p)$ 가 정의되는 점 p 의 집합은 C_l 이고, $a(p) = 2$ 이다.

정답 : T 는 위 그림과 같이 원 C_l (중심: O , 반지름: $\sqrt{1+l^2}$)과 원 C 사이에 있는 영역이다. $a(p)$ 가 정의되는 점 p 의 집합은 C_l 이고, $a(p) = 2$ 이다.

(2) 원 C_l 또는 바깥에 있는 점은 l -할선이 지날 수 없다. 원 C_l 과 원 C 사이에 있는 영역 또는 원 C 위의 점 p_1 을 고려하자. 이 점을 지나며 원 C 와 접하는 직선 L_0 을 따라 p_1 을 지나는 l -할선을 무한히 많이 잡을 수 있다.

이제 원 C 의 내부에 대해 고려하자.

$l < 2$ 인 경우를 고려하자. 점 O 로부터 가장 가까운 S 의 점 p_2 는 현이 되는 l -할선의 중심(중점)이다. 피타고라스 정리에 의해 p_2 와 O 의 거리는 $\sqrt{1-\frac{1}{4}l^2}$ 이다. 점 p_2 를 지나는 l -할선의 개수는 1이다.



이제 O 를 중심으로 반지름의 길이가 $\sqrt{1 - \frac{1}{4}l^2}$ 인 원 C_l 과 원 C 사이에 있는 영역을 고려하자. 이 영역 내부에 있는 점 p_3 를 지나며 이 영역 내부를 통과하는 직선을 L_3 라 하자. L_3 를 따라 p_3 를 지나는 l -할선을 무수히 많이 잡을 수 있다. 이로부터 S 는 원 C_l 과 원 C 사이의 영역이며 원 C_l 은 포함되지 않고 원 C 은 포함된다. 따라서, $b(p)$ 가 정의되는 점 p 의 집합은 C_l 이고, $b(p) = 1$ 이다.

$l \geq 2$ 인 경우를 고려하자. 이 경우 원 C 내부가 모두 S 에 포함된다. S 는 C_l 내부 영역이며 경계는 포함되지 않는다. $l > 2$ 이면 위의 논의에 따라 $b(p)$ 가 정의되는 점 p 가 없다. $l = 2$ 이고 원점이 아닌 경우 마찬가지로 $b(p)$ 가 정의되는 점 p 가 없다. $l = 2$ 이고 원점인 경우 원 C 의 지름은 모두 2-할선이므로 $b(p)$ 가 정의되지 않는다. 따라서, $b(p)$ 가 정의되는 점 p 는 없다.

