2026학년도 수시 면접·구술고사

수학 기출

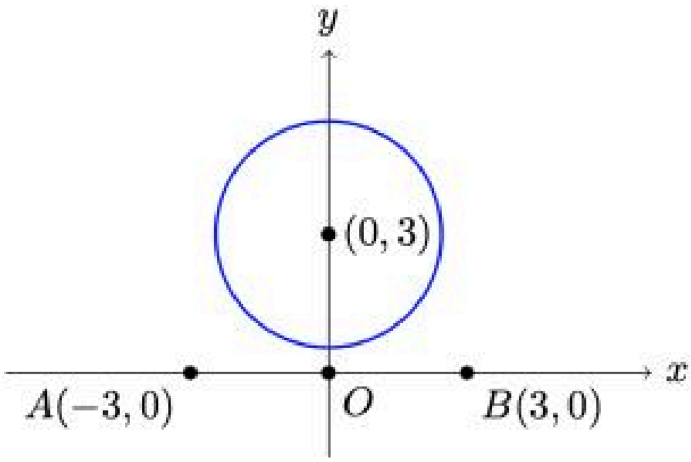
문항 · 채점 기준 · 예시 답안

한국과학기술원 (KAIST)

한국과학기술원(KAIST) 문항정보 1

문항 및 제시문

> 좌표평면 위에 세 점 $A(-3,0)$, $B(3,0)$, $O(0,0)$ 와 점 $(0,3)$ 을 중심으로 하고 반지름이 $\sqrt{3}$ 인 원이 아래 그림과 같이 주어져 있다.



(1) 점 C 가 주어진 원 위 또는 내부에 있다고 하자. 이때 $|\overline{AC}-\overline{BC}|$ 값의 범위를 구하시오. (2점)

(2) 좌표평면 위의 어떤 점 D 에 대하여 $|\overline{AD}-\overline{BD}|$ 값이 (1)에서 구한 범위 안에 있다. 모든 실수 k 에 대해 다음 조건을 만족하면 D 를 '좋은 점'이라 부르자. (3점)

> < 조건 >
>
> 등식 $k \cdot \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE_k}$ 을 만족하는 점 E_k 에 대해, $|\overline{AE_k}-\overline{BE_k}|$ 값은 (1)에서 구한 범위 안에 있다.

원점이 아닌 임의의 두 '좋은 점' D_1 과 D_2 에 대하여

$$\left|\frac{\overrightarrow{OD_1}}{|\overrightarrow{OD_1}|}\cdot\frac{\overrightarrow{OD_2}}{|\overrightarrow{OD_2}|}\right|$$

의 최솟값을 구하시오.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ 가 원과 접하고 초점이 $(\pm 3,0)$ 인 쌍곡선의 방정식임을 알고, $\lvert\overline{AC}-\overline{BC}\rvert$ 값의 범위를 $[0,4]$ 로 구함.	2점
(2)	좋은 점이 있을 수 있는 영역이 그림과 같이 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ 의 두 점근선 $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$ 사이의 회색 영역임을 알고, D_1 과 D_2 가 두 점근선에서 하나씩 택했을 때 $\left\lvert\frac{\overrightarrow{OD_1}}{\lvert\overrightarrow{OD_1}\rvert}\cdot\frac{\overrightarrow{OD_2}}{\lvert\overrightarrow{OD_2}\rvert}\right\rvert$ 의 값이 최소임을 알며, 그 값이 $\left(\frac{2}{3},\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3},\frac{\sqrt{5}}{3}\right)=\frac{1}{9}$ 임을 안다.	3점

예시 답안

(1) 상수 $k \geq 0$ 에 대하여 $|\overline{AC'} - \overline{BC'}| = k$ 를 만족하는 점 C' 가 이루는 도형을 생각하자. $k = 0$ 일 때는 선분 AB 의 수직이등분선이 되고 $k > 0$ 일 때는 A 와 B 를 초점으로 하는 쌍곡선이 된다. (또한 $k = 6$ 인 경우는 x 축 위의 점들 중에서 선분 AB 바깥의 점들이다. $k > 6$ 일 수는 없다.) 즉, 주어진 원 안에 있는 점 C 는 어떤 쌍곡선 위에 놓이느냐에 따라 $|\overline{AC} - \overline{BC}|$ 값이 달라진다.

$0 < k < 6$ 일 때, 점 C' 가 이루는 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (단, $a, b > 0$, $k = 2a$) 이며, 초점이 $(\pm 3, 0)$ 이므로 관계식 $a^2 + b^2 = 9$ 을 만족한다. 그러한 쌍곡선과 그 쌍곡선의 점근선 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 는 아래 그림과 같다.

예를 들어, 상수 a 가 $1, 2, 3, 4$ 일 때 아래 그림과 같이 쌍곡선이 그려진다. 그러므로 주어진 원 안의 점 C 가 원에 접하는 쌍곡선과의 접점일 때, $|\overline{AC} - \overline{BC}|$ 가 최대이다. 따라서 초점이 $(\pm 3, 0)$ 이고 원 $x^2 + (y-3)^2 = 3$ 과 두 점에서 만나는 쌍곡선의 방정식을 찾으면 되고, 그 쌍곡선의 주축 길이를 $2a$ 라 할 때, $[0, 2a]$ 가 $|\overline{AC} - \overline{BC}|$ 값의 범위이다.

이때, 쌍곡선이 원과 두 점에서 만난다는 조건을 이용하자. 쌍곡선의 방정식 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 을 x^2 에 대하여 풀면

$$x^2 = a^2\left(1 + \frac{y^2}{b^2}\right) = a^2 + \left(\frac{a^2}{b^2}\right)y^2$$

이를 원의 방정식 $x^2 + (y-3)^2 = 3$ 에 대입하면

$$a^2 + \left(\frac{a^2}{b^2}\right)y^2 + (y-3)^2 = 8$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)y^2 - 6y + (a^2 + 1) = 0$$

그런데, $1 + \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2+b^2}{b^2} = \frac{9}{b^2}$ 이므로,

$$\frac{9}{b^2}y^2 - 6y + (a^2 + 1) = 0$$

이는 쌍곡선과 원의 교점의 y 좌표에 대한 이차방정식이다. 쌍곡선은 y 축 대칭도형이므로 쌍곡선이 원과 만나는 두 점의 y 좌표는 같고, 따라서 이 이차방정식은 중근을 가져야 한다. 즉, 판별식은 0 이다. 이를 이용하면

$$36 - 4 \times \left(\frac{9}{b^2}\right) \times (a^2 + 1) = 0 \Rightarrow b^2 = a^2 + 1$$

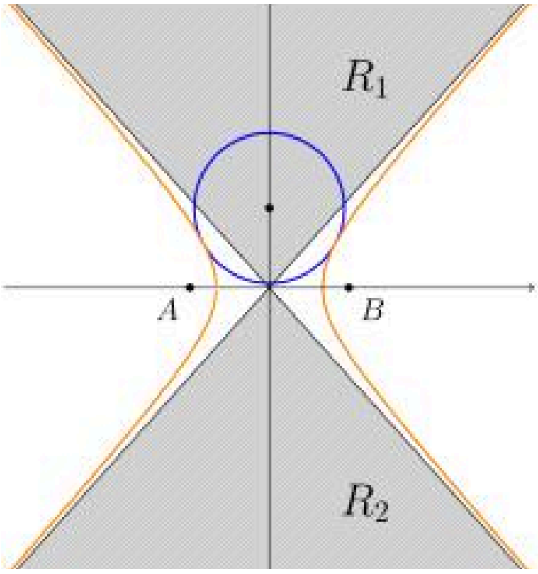
이를 관계식 $a^2 + b^2 = 9$ 과 연립하여 풀면, $a^2 = 4$ 이고 $b^2 = 5$ 이다. 따라서 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

이고 $|\overline{AC} - \overline{BC}|$ 값의 범위는 닫힌구간 $[0, 2a] = [0, 4]$ 임을 알 수 있다.

(2) 앞 문제의 풀이에서 k 가 커짐에 따라 $|\overline{AC'} - \overline{BC'}| = k$ 를 만족하는 점 C' 가 이루는 도형이 어떻게 변하는지 관찰하였다. 이에 따르면 "점 D 에 대하여 $|\overline{AD} - \overline{BD}|$ 값이 (1)에서 구한 범위 안에 있다."는 가정을 만족하기 위해서 D 는 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 이 세 개 영역으로 분할하는 좌표평면 중 원점을 포함하는 영역에 있어야 함을 알 수 있다. 이 영역을 편의상 R 이라 부르자.

특히 에 의해 임의의 '좋은 점' D 에 대해서 선분 OD 를 포함하는 직선 위의 점 모두가 R 안에 있어야 함을 알 수 있다. 이 조건을 만족하려면 '좋은 점' D 는 아래 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 의 두 점근선 $y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$ 사이인 회색 영역에 있어야 한다. 즉, 좋은 점이 있을 수 있는 영역은 아래 그림에 표시된 영역 R_1 과 R_2 의 합집합에 포함된다 (경계선 포함).

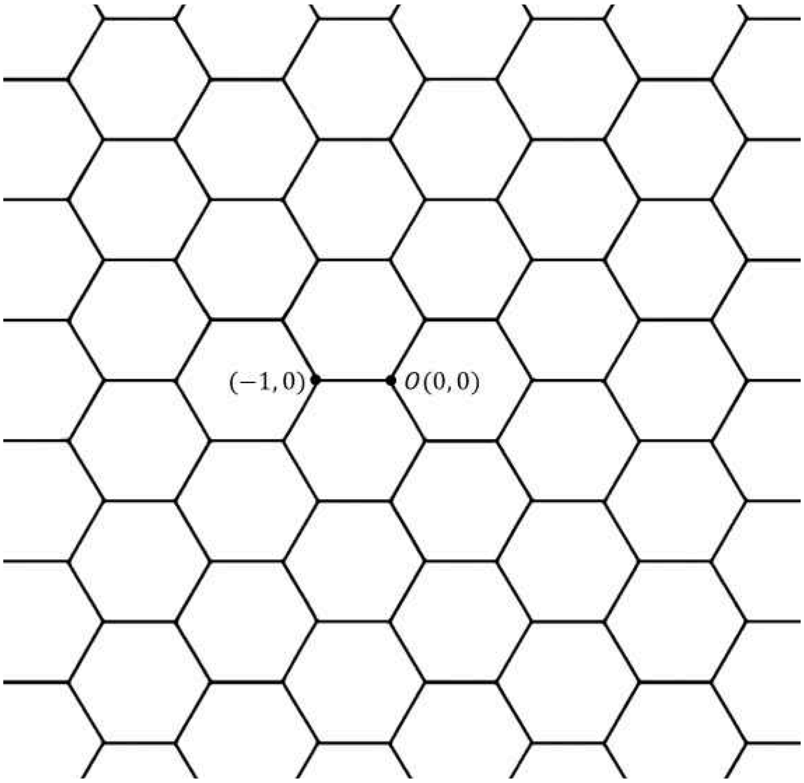


역으로 R_1 과 R_2 의 합집합 안의 모든 점이 좋은 점임을 쉽게 확인 가능하다. 이 영역에서 원점이 아닌 두 점 D_1 과 D_2 를 택하자. R_2 는 R_1 의 원점대칭이므로 $\left|\frac{\overrightarrow{OD_1}}{|\overrightarrow{OD_1}|}\cdot\frac{\overrightarrow{OD_2}}{|\overrightarrow{OD_2}|}\right|$ 의 값의 범위는, 두 점 모두 R_1 에 있다고 가정하고 구해도 충분하다. 이를 가정하자. 두 점근선 기울기 절댓값이 1보다 크므로 $\overrightarrow{OD_1}$ 와 $\overrightarrow{OD_2}$ 사이의 각도는 예각이며 $\left|\frac{\overrightarrow{OD_1}}{|\overrightarrow{OD_1}|}\cdot\frac{\overrightarrow{OD_2}}{|\overrightarrow{OD_2}|}\right|$ 의 값은 D_1 과 D_2 가 두 점근선 위에 각각 있을 때 최소가 된다. 그 최솟값은 $\left(\frac{2}{3},\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3},\frac{\sqrt{5}}{3}\right)=\frac{1}{9}$ 이다.

한국과학기술원(KAIST) 문항정보 2

문항 및 제시문

> 좌표평면 위에 모든 변의 길이가 1인 정육각형 타일이 그림과 같이 무한히 반복되어 있다. 모든 정육각형의 꼭짓점들의 집합을 S 라 하고, 원점 $O(0,0)$ 와 점 $(-1,0)$ 이 S 에 포함되어 있다고 하자. 로봇이 원점 O 에서 출발하여 1초마다 현재 위치에서 인접한 S 의 다른 세 개의 점 중 하나를 똑같은 확률로 골라 이동한다고 한다. 자연수 n 에 대하여, n 초 후 로봇이 도달한 점을 D_n 이라 하자.



(1) n 초 후 선분의 길이 $\overline{OD_n}$ 가 가질 수 있는 값 중 가장 큰 값을 구하시오. (2점)
(2) n 초 후 선분의 길이 $\overline{OD_n}$ 가 가질 수 있는 값 중 가장 큰 값을 가질 확률을 구하시오. (1점)
(3) n 초 후 D_n 이 원점일 확률을 $p(n)$ 이라 하자. $p(4), p(5), p(6)$ 을 구하시오. (2점)

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	n 이 짝수인 경우와 홀수인 경우로 구분하여 코사인법칙과 기하적 성질을 적용해 n 이 짝수인 경우 $\overline{OD_n}$ 의 최댓값이 $\frac{n}{2}\sqrt{3}$, n 이 홀수인 경우 $\overline{OD_n}$ 의 최댓값이 $\sqrt{\frac{3n^2+1}{4}}$ 임을 구함.	2점
(2)	경우의 수를 바탕으로 $\overline{OD_n}$ 이 최댓값을 가질 확률을 $n=1$ 일 때 확률은 1 이고 $n \geq 2$ 일 때 확률은 $\frac{2}{3^{n-1}}$ 로 올바르게 구함.	1점
(3)	홀수, 짝수 시간에 따른 이동 특성을 구분하여 원점으로 복귀 가능한 경우를 분류하고 각 경우의 수를 체계적으로 나누어 확률의 덧셈정리를 이용해 $p(4)=\frac{5}{27}, p(5)=0, p(6)=\frac{31}{243}$ 을 정확하게 구한 경우.	2점

예시 답안

(1) 정육각형 모양의 타일 구조에 의해 S 의 모든 점은 홀수 초 후에 도달할 수 있는 점과 짝수 초 후에 도달할 수 있는 점, 두 종류로 나눌 수 있다. n 초 후 원점으로부터 가장 멀리 도달하기 위해서는 다음 그림과 같은 형태의 경로 $O \to A_1 \to B_2 \to A_3 \to B_4 \to A_5 \to B_6 \to \cdots$ 로 움직여야 한다.

로봇의 위치와 원점 사이의 거리 $\overline{OD_n}$ 가 갖는 최댓값을 편의상 $d(n)$ 이라 하자. 짝수 초 후에 도달할 수 있는 점(B_2, B_4, B_6 $\cdots$)까지의 거리를 구하기 위해, 원점으로부터 B_2 까지의 거리를 생각하면 $\sqrt{3}$ 과 같다. 이는 이등변삼각형 OA_1B_2 에서 각 OA_1B_2 가 $120°$ 인 사실을 이용해 코사인법칙을 적용하여 구할 수 있다.

$$\overline{OB_2}^2 = \overline{OA_1}^2 + \overline{A_1B_2}^2 - 2\overline{OA_1} \times \overline{A_1B_2} \times \cos(120°) = 3, \quad \cos(120°) = -\frac{1}{2}$$

(또는, $\overline{OB_2}$ 가 한 변의 길이가 1인 정삼각형의 한 점에서 마주보는 변에 내린 수선의 길이($\frac{\sqrt{3}}{2}$)의 2배라는 점을 이용하면 쉽게 구할 수 있다.)

따라서, n 이 짝수인 경우 $\overline{OD_n}$ 의 최댓값은 $d(n) = \frac{n}{2}\sqrt{3}$ 과 같다. (또는 $d(2k) = k\sqrt{3}$).

이제 n 이 홀수($n = 2k+1$)인 경우, 가장 멀리 도달할 수 있는 점들(A_1, A_3, A_5, $\cdots$)을 생각해보자 (위 그림에서는 편의상 $A_5 = A_{2k+1}$ 인 경우를 생각하자). $\overline{OA_{2k+1}}$ 의 길이를 구하기 위해 삼각형 $OB_{2k}A_{2k+1}$ 를 생각하고, $\overline{OB_{2k}} = k\sqrt{3}$, $\overline{B_{2k}A_{2k+1}} = 1$, 각 $OB_{2k}A_{2k+1}$ 의 크기가 $150°$ 임을 이용하여 코사인법칙을 적용하면, $\left(\cos(150°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\overline{OA_{2k+1}}^2 = \overline{OB_{2k}}^2 + \overline{B_{2k}A_{2k+1}}^2 - 2\overline{OB_{2k}} \times \overline{B_{2k}A_{2k+1}} \times \cos(150°)$$

$$= 3k^2 + 1 - 2 \times k\sqrt{3} \times 1 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3k^2 + 3k + 1$$

이를 $n = 2k+1$ 에 대해 정리하면, n 이 홀수인 경우 $d(n) = \sqrt{\frac{3n^2+1}{4}}$ (또는 $d(2k+1) = \sqrt{3k^2+3k+1}$)이다.

정답: n 이 짝수인 경우 $\frac{n}{2}\sqrt{3}$ (또는 $n = 2k$ 라 하면 $k\sqrt{3}$, $k \geq 1$)

n 이 홀수인 경우 $\sqrt{\frac{3n^2+1}{4}}$ (또는 $n = 2k+1$ 이라 하면 $\sqrt{3k^2+3k+1}$, $k \geq 0$, 또는 $n = 2l-1$ 이라 하면 $\sqrt{3l^2-3l+1}$, $l \geq 1$.)

(2) n 초 후 로봇의 위치와 원점 사이의 거리 $\overline{OD_n}$ 가 최댓값을 가질 확률을 $q(n)$ 이라 하자. 먼저 (1)번 풀이의 그림에서, 1초 후 도달할 수 있는 세 점(A_1, C_1, E_1)까지의 거리는 항상 1과 같으므로 $q(1) = 1$ 임을 알 수 있다. 2초 후에는 1초 후 위치에서 원점으로 되돌아오지만 않으면 최대 거리인 $d(2)$ 만큼 떨어진 점에 도달할 수 있으므로, $q(2) = \frac{2}{3}$ 임을 알 수 있다. 2초 후의 위치가 정해진 이후로, 원점으로부터 최대한 멀리 떨어진 점으로 이동하려면 처음 2초 동안 움직인 방향대로 계속 움직여야 한다(위 그림의 경로인 경우, 벡터 $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{A_1B_2}$ 와 같은 방향으로 계속 움직여야 한다). 즉, 2초 이후에 움직일 수 있는 방향은 유일하게 정해지므로 매초 $\frac{1}{3}$ 의 확률을 계속 곱해가야 한다. 따라서, n 이 2 이상인 경우,

$$q(n) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} = \frac{2}{3^{n-1}}$$

와 같다.

정답: $n = 1$ 일 때 확률은 1, $n \geq 2$ 일 때 확률은 $\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} = \frac{2}{3^{n-1}}$

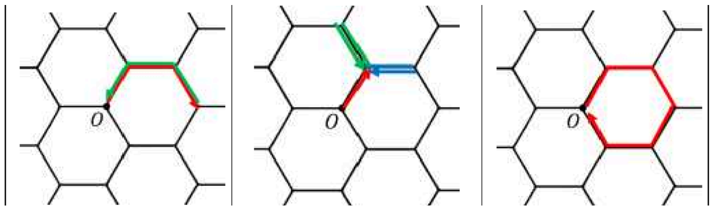
(3) 우선, 홀수 초 후에는 원점으로 되돌아올 수 없으므로, $p(5) = 0$ 이다.

$p(4)$ 의 값을 구하기 위해 다음과 같은 경우로 나누어 셀 수 있다.

원점에 있는 시각	설명	총 경우의 수
2, 4초	2초마다 원점으로 돌아와야 한다. 2초 후 원점으로 돌아오는 경우의 수는 3가지, 4초 후 원점으로 다시 돌아오는 경우도 3가지이므로 총 경우의 수는 $3^2 = 9$.	9
4초	2초 후 원점으로 돌아오지 않으려면 1초, 2초 후 가능한 이동 방향의 수는 각각 3가지, 2가지이다. 이후 왔던 길을 따라 되돌아가야 하므로 총 경우의 수는 $3 \times 2 = 6$ 가지.	6

최종적으로, $p(4) = \frac{9+6}{3^4} = \frac{15}{81} = \frac{5}{27}$ 이다.

이제 $p(6)$ 의 값을 구하기 위해 다음과 같은 경우로 나누어 셀 수 있다.

원점에 있는 시각	설명	총 경우의 수
2, 4, 6초	2초마다 원점으로 돌아와야 한다. 2초 후 원점으로 돌아오는 경우의 수는 3가지이므로 총 경우의 수는 $3^3 = 27$ 가지.	27
2, 6초	2초 후 원점으로 돌아오는 경우의 수는 3가지이다. 이후 4초일 때 원점에 돌아오지 않고 6초일 때 돌아오는 경우의 수는 $3 \times 2 = 6$ 가지이다. 따라서 총 경우의 수는 $3 \times 6 = 18$ 가지.	18
4, 6초	비슷하게 2초에 원점에 돌아오지 않고 4초에 원점에 돌아오는 경우의 수는 6가지, 이후 2초 만에 다시 원점에 돌아오는 경우는 3가지이므로 총 18 가지.	18
6초	다음의 세 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다. (i) 1, 2, 3초 후 로봇의 위치가 모두 다르고, 그 이후로는 왔던 길을 되돌아가는 경우: $3 \times 2 \times 2 = 12$ 가지. (ii) 1초, 3초, 5초 후 로봇의 위치가 같은 경우: 1초 후 로봇의 위치 3가지, 2초 후 로봇의 위치 2가지, 4초 후 로봇의 위치도 2가지이므로 총 $3 \times 2 \times 2 = 12$ 가지. (iii) 정육각형을 돌아서 원점에 들어오는 경우: 원점을 꼭짓점으로 갖는 정육각형이 3개 있고, 시계 방향과 반시계 방향으로 돌 수 있으므로 총 6가지.  종합하면 $12 + 12 + 6 = 30$ 가지 경우의 수가 있다.	30

최종적으로, $p(6) = \frac{27+18+18+30}{3^6} = \frac{93}{729} = \frac{31}{243}$ 이다.