# 2021학년도 수시 면접·구술고사

# 수학 기출

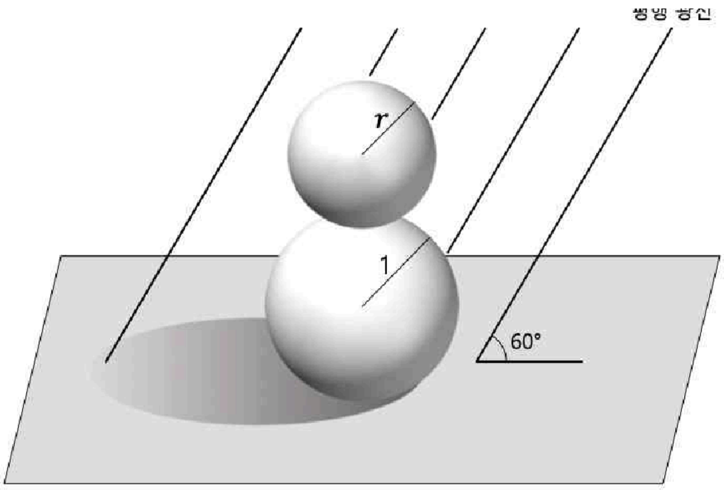
문항 · 채점 기준 · 예시 답안

한국과학기술원 (KAIST)

## [한국과학기술원(KAIST) 문항정보 1]

### 문항 및 제시문

> 반지름이 1인 구가 평평한 바닥에 놓여있고, 이 구의 가장 높은 점에 접하도록 반지름이 $r$인 구가 그 위에 올려져있는 눈사람이 있다. 지면과 60도의 각도를 이루고 평행 광선이 비추어 바닥에 눈사람의 그림자가 생기고 있다.



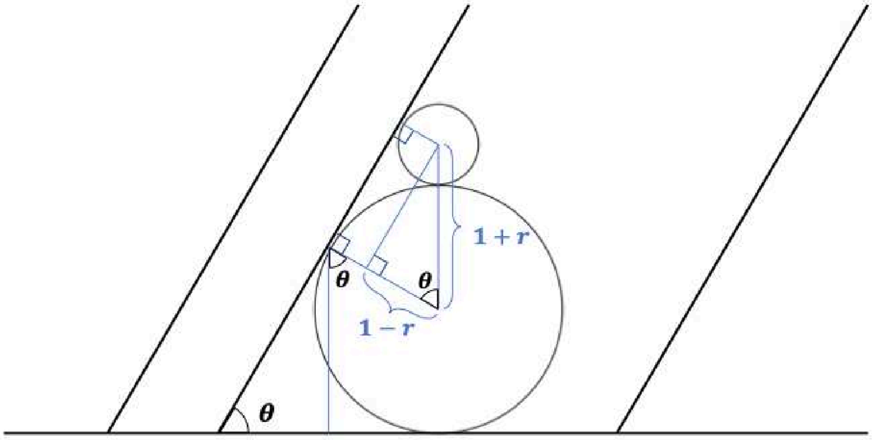

(1) 위쪽 구의 그림자가 아래쪽 구의 그림자에 완전히 포함되도록 하는 $r$값의 최댓값을 구하시오. (2점)
(2) $r$이 $1$일 때, 눈사람의 그림자의 넓이를 구하시오. (3점)

### 채점 기준

| 하위 문항 | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|
| (1) | – 2점: 정확한 답과 근거 제시<br>– 1점: 2차원 그림을 그려서 문제를 파악하면 1점 부여 가능 | 2점 |
| (2) | – 3점: 정확한 답과 근거 제시 (아래 ① ③ 까지 모두 제시)<br>– 부분 점수 요소<br>① 1점: 가상의 평면을 평행 광선에 수직하게 놓으면 이 평면상의 그림자는 반지름 1인 두 원이 합쳐져서 생기는 모양이며, 이를 계산하여 원래의 바닥에 정사영한 그림자 넓이를 구하면 계산이 쉬워진다.<br>② 1점: 두 원의 그림자가 겹쳐지는 부분의 모양을 보고 겹쳐지는 부분의 넓이를 구한다.<br>③ 1점: 정사영한 원래 바닥의 그림자 넓이를 정확히 구한다. | 3점 |

## 예시 답안

(1) $r$이 $1$보다 작으면서 두 구에 모두 접하는 광선이 존재할 때가 문제에서 요구하는 $r$값의 최댓값임을 쉽게 알 수 있다.




그림에서 보듯이 $\cos 60° = \frac{1-r}{1+r} = \frac{1}{2}$ 이므로, 이때의 $r$ 값은 $1/3$ 이다. (2점)

(2) 눈사람의 그림자는 두 타원이 합쳐서 생기는 모양이다. 문제를 쉽게 하기 위해 우선 원래 바닥 대신, 가상의 평면을 도입한다. 가상의 평면을 평행 광선에 수직하게 놓으면 이 평면상의 그림자는 반지름 1인 두 원이 합쳐져서 생기는 모양이며, 이를 계산하여 원래의 바닥에 정사영한 그림자 넓이를 구하면 계산이 쉬워진다.

원의 반지름이 1이니 원 전체의 넓이는 $\pi$이고 내각이 60도인 부채꼴의 넓이는 $\pi/6$이다. 두 원이 그림자가 겹쳐지는 부분의 모양을 보면, 이러한 부채꼴에서 각 변의 길이가 1인 정삼각형을 뺀 것과 같은 도형 4개와 각 변의 길이가 1인 정삼각형 2개로 이루어져 있다는 것을 알 수 있다.

각 변의 길이가 1인 정삼각형의 넓이는 $\sqrt{3}/4$ 이므로, 두 원이 그림자가 겹쳐지는 부분의 넓이는

$$4 \times \left( \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이다.

가상의 바닥에서 두 원의 그림자 전체의 넓이는

$$2\pi - \left( \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이다. (1점)

지금 그림자 넓이를 계산한 가상의 바닥과 실제 바닥이 30도의 각도를 이루며 만나므로, 광선을 따라 실제 바닥에 정사영한 넓이를 얻으려면 우리가 구한 넓이를 $\cos 30° = \sqrt{3}/2$ 로 나누어 주어야 한다.

따라서 정답은 $\left( \frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}\pi}{9} + 1$ 이다. (1점)

# [한국과학기술원(KAIST) 문항정보 2]

## 문항 및 제시문

> 2차원 평면 상의 점 $n$개가 $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$로 주어졌다. 실수 $r$을 기울기로 하는 직선 $L(r) = \{(x, y) : y = rx\}$을 고려하자.

(1) 점 $(x_i, y_i)$와 가장 가까운 직선 $L(r)$ 상의 점을 구하시오.
(추가설명 : 직선 $L(r)$ 상의 점 중 점 $(x_i, y_i)$과 가장 가까운 점을 구하시오)
(1점)

(2) 점 $(x_i, y_i)$와 직선 $L(r)$ 간의 거리 $d_i(r)$을 구하시오. (1점)

(3) $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$ 이고 $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \neq 0$일 때, $\sum_{i=1}^{n} d_i(r)^2$ 를 최소로 하는 기울기 $r$을 구하시오. (3점)

## 채점 기준

| 하위 문항 | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|
| (1) | 정확한 답 $Q(r)$을 제시 | 1점 |
| (2) | 정확한 답 $d_i(r)$을 제시 | 1점 |
| (3) | – 1점: $$\sum_{i=1}^{n} d_i(r)^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{r^2 x_i^2 - 2r x_i y_i + y_i^2}{1+r^2} = \frac{ar^2 - 2br + a}{1+r^2}$$ 이 식을 유도<br>– [미분을 사용하지 않는 풀이]<br>① $\sum_{i=1}^{n} d_i(r)^2 = \frac{ar^2-2br+a}{1+r^2} = t$로 두고, $r$이 실근을 갖는 조건으로부터 $t$의 범위는 $a - \lvert b\rvert \leq t \leq a + \lvert b\rvert$로 유도 가능 (이 범위를 유도하면 1점)<br>② 정확한 기울기 값 $r$을 구하면 1점<br>– [미분을 사용하는 풀이]<br>① $\sum_{i=1}^{n} d_i(r)^2 = \frac{ar^2-2br+a}{1+r^2} = t$로 두었을 때, $t$를 $r$로 미분하여 도함수를 정확히 구하면 1점<br>② 정확한 기울기 값 $r$을 구하면 1점 | 3점 |

## 예시 답안

(1) 점 $P=(x_i,y_i)$와 가장 가까운 직선 $L(r)$ 위의 점을 $Q=(z,rz)$라 하자. 그러면, 선분 $\overline{PQ}$와 직선 $L(r)$은 수직이어야 한다. 따라서 $\overline{OP}-\overline{OQ}=(x_i,y_i)-(z,rz)=(x_i-z,y_i-rz)$와 $(1,r)$의 내적이 0이고 이를 풀면

$$z=\frac{x_i+ry_i}{1+r^2}$$

이어서 $Q=\left(\frac{x_i+ry_i}{1+r^2},r\frac{x_i+ry_i}{1+r^2}\right)$이다.

답 :

$$Q=\left(\frac{x_i+ry_i}{1+r^2},\ r\frac{x_i+ry_i}{1+r^2}\right)$$

(2) $d_i(r)$은 $P=(x_i,y_i)$와 $Q=\left(\frac{x_i+ry_i}{1+r^2},r\frac{x_i+ry_i}{1+r^2}\right)$ 사이의 거리이므로

$$d_i(r)^2=\left(x_i-\frac{x_i+ry_i}{1+r^2}\right)^2+\left(y_i-r\frac{x_i+ry_i}{1+r^2}\right)^2=\frac{r^2x_i^2-2rx_iy_i+y_i^2}{1+r^2}=\frac{|rx_i-y_i|^2}{1+r^2}$$

로부터

답 :

$$d_i(r)=\sqrt{\frac{r^2x_i^2-2rx_iy_i+y_i^2}{1+r^2}}=\frac{|rx_i-y_i|}{\sqrt{1+r^2}}$$

(3) $a=\sum_{i=1}^n x_i^2=\sum_{i=1}^n y_i^2, b=\sum_{i=1}^n x_iy_i\neq 0$로 표시하자. 그러면,

$$\sum_{i=1}^n d_i(r)^2=\sum_{i=1}^n\frac{r^2x_i^2-2rx_iy_i+y_i^2}{1+r^2}=\frac{ar^2-2br+a}{1+r^2}$$

이다. (이 식을 유도하면 1점)

다음 단계는 미분의 사용 여부에 따라 두 가지 방법으로 풀 수 있다.
[풀이 1] [미분을 사용하지 않는 풀이]

$\sum_{i=1}^n d_i(r)^2=\frac{ar^2-2br+a}{1+r^2}=t$ 로 놓자. 그러면, $r$이 실근을 갖는 조건으로부터 $t$의 범위는

$$a-|b|\le t\le a+|b|$$

이다. (이 범위를 유도하면 1점)

(혹은 $b>0$일 때 $a-b\le t\le a+b$, $b<0$일 때 $a+b\le t\le a-b$로 서술할 수도 있다.)

이 범위는 다음 두 가지 방법으로 구할 수 있다:

· $r$에 대한 이차방정식 $(t-a)r^2+2br+(t-a)=0$의 해 $r$이 실근을 갖기 위한 조건은 판별식 $D=b^2-(t-a)^2\ge 0$을 만족하는 것이다. 이를 풀면 $(b+t-a)(b-t+a)\ge 0$이어서 $a-|b|\le t\le a+|b|$이다.

· 혹은 $t=\frac{ar^2-2br+a}{1+r^2}=a-\frac{2br}{1+r^2}$ 에서 $-1\le\frac{2r}{1+r^2}\le 1$이고 $\frac{2r}{1+r^2}$이 $-1$ 이상 $1$ 이하의 모든 실수를 취할 수 있으므로 $a-|b|\le t\le a+|b|$ 이다.

따라서 $t$의 최솟값은 $a-|b|$이고, 이 값을 실제 갖도록 $\sum_{i=1}^n d_i(r)^2=a-|b|$을 만족하는 $r$을 (근삿값이 아닌) 구하면 · $b>0$이면 $br^2-2br+b=b(r-1)^2=0$이어서 $r=1$이다. · $b<0$이면 $-br^2-2br-b=-b(r+1)^2=0$이어서 $r=-1$이다.

따라서, 거리 제곱의 합을 최소로 하는 기울기는 $\sum_{i=1}^n x_iy_i$가 양수이면 1, 음수이면 $-1$이다. (정확한 기울기 값 $r$을 구하면 1점)

[풀이 2] [미분을 사용하는 풀이]

우선 $t=a-\frac{2br}{1+r^2}$ 에서 $r\to\pm\infty$일 때 $t\to a$임을 알 수 있다. $t$를 $r$에 대해 미분하면

$$t'=\frac{(2ar-2b)(1+r^2)-(ar^2-2br+a)(2r)}{(1+r^2)^2}=\frac{2b(r^2-1)}{(1+r^2)^2}=\frac{2b(r+1)(r-1)}{(1+r^2)^2}$$

이므로 $r=\pm1$에서 최대값 또는 최솟값을 갖게 된다. (도함수를 정확히 구하면 1점)

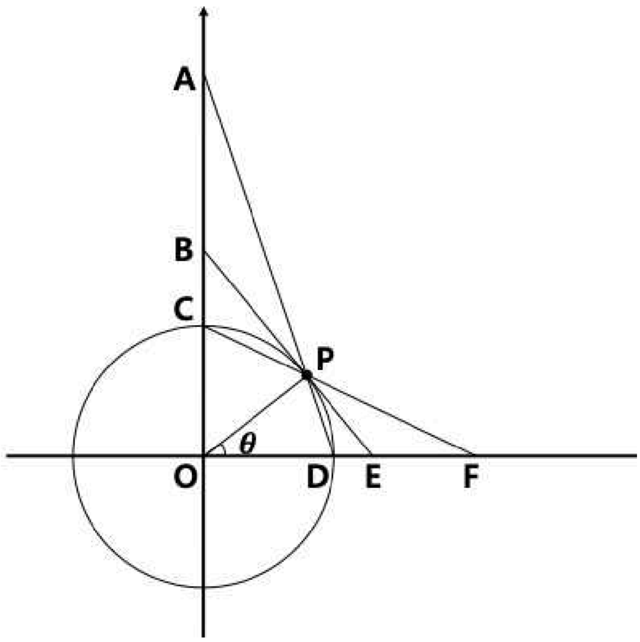
$r = \pm 1$전후로 도함수값의 변화를 살펴보면 $\cdot\, b > 0$: $r = 1$에서 최솟값 $a - b$을 갖는다. $\cdot\, b < 0$: $r = -1$에서 최솟값 $a + b$을 갖는다. (정확한 기울기 값 $r$을 구하면 1점)

# [한국과학기술원(KAIST) 문항정보 3]

## 문항 및 제시문

다음 그림과 같이 원점 $O$를 중심으로 하고 반지름이 1인 원이 있다.

$x$축과 각도 $\theta$를 이루는 직선이 원과 1사분면에서 만나는 점을 $P$라고 하자. 선분 $BE$는 이 원과 $P$에서의 접선이고, $C=(0,1), D=(1,0)$일 때, 선분 $CP$를 연장하여 $x$축과 만나는 점이 $F$, 선분 $DP$를 연장하여 $y$축과 만나는 점이 $A$이다. 삼각형 $ABP$의 넓이를 $S$, 삼각형 $EFP$의 넓이를 $T$라 하자.




(1) 점 $A$의 $y$좌표와 $F$의 $x$좌표를 각각 구하시오. (2점)

(2)

$$\lim_{\theta \to +0} \frac{S \times T}{\theta}$$

값을 구하시오. (3점)

## 채점 기준

| 하위 문항 | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|
| (1) | – 1점: $F$의 $x$좌표를 제시<br>– 1점: $A$의 $y$좌표를 제시 | 2점 |
| (2) | – 1점: 식을 정리하여, $T = \frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{\cos}\theta\sin\theta = \frac{1}{2}\tan\theta\sin\theta$를 구할 수 있다.<br>– 1점: 식을 정리하여, $S = \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{\sin}\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\cot\theta\cos\theta$를 구할 수 있다.<br>– 1점: $\lim_{\theta\to+0}\frac{S\times T}{\theta} = \frac{1}{4}$ 답을 구할 수 있다. | 3점 |

## 예시 답안

(1) 먼저 직선 $CF$의 방정식을 구하여 보자. $C=(0,1)$, $P(\cos\theta,\sin\theta)$이므로 기울기는 $\frac{\sin\theta-1}{\cos\theta}$이고 $y$절편은 1이다. 따라서 식은 $y=\frac{\sin\theta-1}{\cos\theta}x+1$이 된다.

이로부터 $F$의 $x$좌표는 $\cos\frac{\theta}{1-\sin\theta}$이다. (1점)

유사한 방식으로, 직선 $AD$의 방정식은 $D=(1,0)$, $P(\cos\theta,\sin\theta)$을 이용하여 구하면 $y=-\sin\frac{\theta}{1-\cos\theta}x+\sin\frac{\theta}{1-\cos\theta}$을 얻는다.

이로부터 $A$의 $y$좌표는 $\sin\frac{\theta}{1-\cos\theta}$이다. (1점)

(2) 삼각형 $EOP$는 직각삼각형이므로 $E$의 $x$좌표는 $\frac{1}{\cos}\theta$이다.

위에서 구한 $F$의 $x$좌표를 이용하면 $EF$의 길이가 $\cos\frac{\theta}{1-\sin\theta}-\frac{1}{\cos}\theta$ 임을 알 수 있다. 이는 삼각형 $EFP$의 밑변이며, 이 삼각형의 높이는 $\sin\theta$이므로 다음을 얻는다.

$$T=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{1-\sin\theta}-\frac{1}{\cos}\theta\right)\sin\theta$$

정리하면,

$$T=\frac{1}{2}\frac{\cos^2\theta-1+\sin\theta}{(1-\sin\theta)\cos\theta}\sin\theta=\frac{1}{2}\frac{\sin\theta-\sin^2\theta}{(1-\sin\theta)\cos\theta}\sin\theta=\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{\cos}\theta\sin\theta$$

이다. (여기서 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$을 이용했다.)

(학생이 답을 $T=\frac{1}{2}\tan\theta\sin\theta$의 형태로 할 수도 있다.) (1점)

유사하게 $S$를 구하기 위하여, 삼각형 $BOE$에서 $OE$의 길이는 1이고 $\angle BOE=\theta$이므로 $B$의 $x$좌표는 $\sin\frac{\theta}{1-\cos\theta}$이다.

또한 삼각형 $BOE$는 직각삼각형이므로 $B$의 $y$좌표는 $\frac{1}{\sin}\theta$이다.

이로부터 $S=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\theta}{1-\cos\theta}-\frac{1}{\sin}\theta\right)\cos\theta$ 이다.

$T$를 정리한 것과 유사하게 정리하면

$$S=\frac{1}{2}\frac{\sin^2\theta-1+\cos\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}\cos\theta=\frac{1}{2}\frac{\cos\theta-\cos^2\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}\cos\theta=\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{\sin}\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\cot\theta\cos\theta$$

(1점)

따라서 $S\times T=\frac{1}{4}\sin\theta\cos\theta$ 이므로 $\frac{S\times T}{\theta}=\frac{1}{4}\sin\frac{\theta}{\theta}\cos\theta$ 이다.

$\lim_{\theta\to+0}\sin\frac{\theta}{\theta}=1$ 이고 $\lim_{\theta\to+0}\cos\theta=1$ 인 것을 이용하면

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{S\times T}{\theta}=\frac{1}{4}\lim_{\theta\to+0}\sin\frac{\theta}{\theta}\lim_{\theta\to+0}\cos\theta=\frac{1}{4}$$

이다.

따라서 답은 $1/4$이다. (1점)

## [한국과학기술원(KAIST) 문항정보 4]

### 문항 및 제시문

> 1부터 6까지의 정수가 각각 $1/6$의 확률로 나오는 주사위를 두 번 던져서 나온 두 수 중 다른 수보다 크거나 같은 수를 $a$라 하고 작거나 같은 수를 $b$라 하자.

(1) 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$가 실근을 가지지 않을 확률은? (2점)

(2) ${}_aC_b$의 기댓값을 구하여라. (3점)

### 채점 기준

| 하위 문항 | 채점 기준 | 배점 |
| --- | --- | --- |
| (1) | 이차방정식의 판별식을 이용하여 구한 $a, b$ 사이의 관계식과 주어진 조건을 만족하는 $a, b$의 순서쌍을 구하고, 수학적 확률을 사용할 수 있는 표본공간을 결정하여 확률을 구하는 문항이다. | 2점 |
| (2) | (1)의 결과를 이용하여 ${}_aC_b$를 확률변수로 하는 확률분포표를 만들고 이산확률변수의 기댓값을 구하는 문항으로 기댓값을 계산하기 위해서는 $a$의 값을 기준으로 분류하여 정리한 후 이항정리를 이용해야 한다. | 3점 |

## 예시 답안

(주사위를 던져서 나온 첫 번째 수를 $x$, 두 번째 수를 $y$라고 하자. $a$는 둘 중 크거나 같은 숫자이고, $b$는 작거나 같은 숫자이다. $x$와 $y$는 독립적으로 1에서 6까지의 숫자 중 하나의 값을 각각 $1/6$의 확률로 가진다.)

(1) 이차방정식의 판별식을 이용하면 $a^2 - 4b < 0$이어야 함을 알 수 있다. $a$가 $b$보다 크거나 같으므로 $a$가 4 이상일 경우 $a^2 - 4b < 0$는 불가능하다. 또한 $b \le a - 1$이면, $a^2 - 4b \le a^2 - 4(a-1) = (a-2)^2 \ge 0$이므로 $a^2 - 4b < 0$는 불가능하다. 따라서 $a \le 3$이고 $a = b$인 경우만 확인해보면 되고, $(a,b) = (1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$의 세 가지 경우에만 $a^2 - 4b < 0$됨을 확인할 수 있다. 따라서 $(x,y)$가 $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$ 중에 하나여야 하므로 확률은 $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$이다.

(2) 우리가 원하는 기댓값은 $1 \le s \le t \le 6$를 만족하는 모든 정수 $s$와 $t$에 대해서 ${}_tC_s \times (a = t$ 이고 $b = s$일 확률)을 더하여 얻을 수 있다. 여기서 $a = t$ 이고 $b = s$일 확률은 $s$와 $t$가 서로 다를 때 $(x,y)$가 $(s,t)$이거나 $(t,s)$일 확률이므로 $\frac{2}{36}$이고, $s$와 $t$가 서로 같을 때는 $(x,y)$가 $(s,s)$일 확률이므로 $\frac{1}{36}$이다.

따라서 우리가 구하는 기댓값은 1에서 6까지의 각각의 정수 $t$에 대해 $\frac{2}{36}{}_tC_1 + \cdots + \frac{2}{36}{}_tC_{t-1} + \frac{1}{36}{}_tC_t$ 를 계산해서 더해주면 구할 수 있다. 이항정리를 사용하면 이 식을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\frac{2}{36}{}_tC_1 + \cdots + \frac{2}{36}{}_tC_{t-1} + \frac{1}{36}{}_tC_t = \frac{1}{36}(2(2^t - {}_tC_0 - {}_tC_t) + {}_tC_t) = \frac{1}{36}(2^{t+1} - 3)$$

이를 이용하여 기댓값을 구하면

$$\sum_{t=1}^{6} \frac{1}{36}(2^{t+1} - 3) = \frac{1}{9}(1 + 2 + \cdots + 2^5) - \frac{6 \cdot 3}{36} = \frac{2^6 - 1}{9} - \frac{1}{2} = 7 - \frac{1}{2} = \frac{13}{2}$$

이 된다.

따라서 답은 $\frac{13}{2} = 6\frac{1}{2} = 6.5$이다.