2024학년도 수시 면접·구술고사

수학 기출

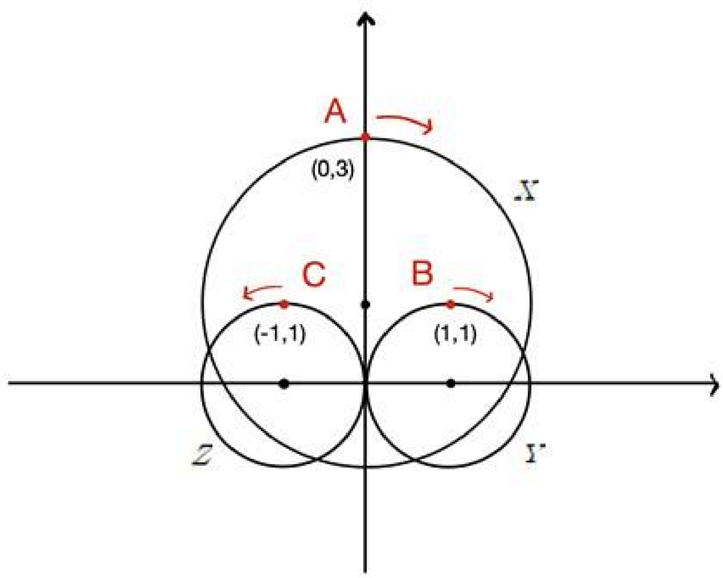
문항 · 채점 기준 · 예시 답안

한국과학기술원 (KAIST)

한국과학기술원(KAIST) 문항정보 1

문항 및 제시문

> 아래 그림과 같이 중심이 $(0,1)$이고 반지름이 2인 원 X, 중심이 $(1,0)$이고 반지름이 1인 원 Y, 중심이 $(-1,0)$이고 반지름이 1인 원 Z가 있다. 점 A는 $(0,3)$에서 시작하여 원 X를 따라 시계방향으로, 점 B는 $(1,1)$에서 시작하여 원 Y를 따라 시계방향으로, 점 C는 $(-1,1)$에서 시작하여 원 Z를 따라 반시계 방향으로 각각 일정한 속력으로 이동한다. 세 점 A, B, C가 동시에 출발하며 각 점이 원을 한 바퀴 도는 데 걸리는 시간은 같다.



(1) 세 점 A, B, C가 각 원을 한 바퀴 도는 동안 한직선 위에 있는 횟수를 구하라. (2점)

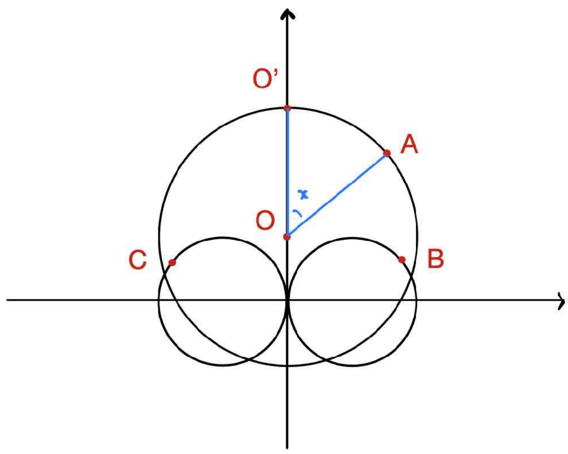
(2) 세 점 A, B, C가 각 원을 한 바퀴 도는 동안 만드는 삼각형 ABC 넓이의 최댓값을 구하라. (3점)

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	· 세 점이 일직선에 있는 두 가지 경우를 모두 찾고 각각에 대해 올바른 논증을 하면 2점. · 세 점이 일직선에 있는 한 가지 경우만 찾고 이를 논증하면 1점. · 세 점이 일직선에 있는 두 가지 경우를 모두 찾았지만 이를 논증하지 못하면 0점.	2점
(2)	· 삼각형 ABC 넓이의 공식 $f(x) = (\sin x + 1)(\cos x + 1)$ 과 그 미분식을 구하면 1점 · (ii) $\cos x + \sin x + 1 = 0$ 경우를 언급하지 않고 답만 맞으면 최대 2점. (만약, 삼각형 ABC 넓이의 공식은 틀렸지만 문제에서 제시한 도형을 옳게 설명하고 자신이 구한 넓이의 옳은 최댓값을 구하면 2번에서 최대 2점.)	3점

예시 답안

아래 그림과 같이, 점 O의 좌표를 $(0,1)$, 점 O'의 좌표를 $(0,3)$이라고 하고 $\angle AOO' = x$라고 하자. 각 점이 원을 한 바퀴 도는 데 걸린 시간이 같으므로 그러면 $A(2\sin x, 2\cos x+1)$, $B(\sin x+1, \cos x)$, $C(-\sin x-1, \cos x)$로 나타낼 수 있다. 그리고 점들이 원을 한 바퀴 돌기 때문에 $0 \le x < 2\pi$만 고려하면 된다.



(1) 점 A,B,C가 모두 한 점에서 만나는 경우는 없으므로 다음 두 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

점 A,B,C가 모두 다른 위치에 있는 경우: 점 B와 점 C의 y좌표가 같으므로 점 A,B,C가 한 직선 위에 있으려면 $\cos x = -1$이어야 한다. 점들이 원을 한 바퀴 도는 동안 $\cos x = -1$을 만족하는 $x=\pi$ 뿐이다. 즉, $x=\pi$일 때 A,B,C가 한 직선 위에 있게 된다. (1점)

점 A,B,C 중 두 점이 같은 위치에 있는 경우: 점 A와 B 그리고 점 A와 C가 만나지 않는다는 사실은 쉽게 알 수 있다. 점 B와 점 C는 $x=\frac{3\pi}{2}$일 때 만나기 때문에 점 A의 위치와 상관없이 점 A,B,C는 한 직선 위에 있게 된다. (1점)

정답: 2회, (논증하지 못하면 총 0점 부여)

(2) (1)에 의하여 (혹은, $2\cos x+1 \ge \cos x$를 통하여) 점 A의 y좌푯값이 점 B,C의 y좌푯값보다 항상 크거나 같다는 사실을 알 수 있다. 그러므로 삼각형 ABC의 넓이는 다음과 같으며 이를 $f(x)$라고 하겠다.

$$f(x) = \frac{1}{2}(\sin x+1-(-\sin x-1))(2\cos x+1-\cos x) = (\sin x+1)(\cos x+1).$$

미분하면

$$f'(x) = \cos x(\cos x+1) - (\sin x+1)\sin x = (\cos x - \sin x)(\cos x+\sin x+1)$$

[미분계수가 0인 조건을 사용하기 위해]

(i) $\cos x - \sin x = 0$인 경우

$0 \le x < 2\pi$에서 방정식 $\cos x = \sin x$의 해는 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5\pi}{4}$ 이다.

(ii) $\cos x+\sin x+1=0$ 인 경우

$\cos^2 x = 1+2\sin x+\sin^2 x$이고 $\cos^2 x+\sin^2 x = 1$임을 이용하여 방정식을 풀면 $\cos x=-1, \sin x=0$ 또는 $\cos x = 0, \sin x=-1$이므로 방정식의 해는 $x=\pi$ 또는 $x=\frac{3\pi}{2}$ 이다.

각각의 경우 $f(x)$를 계산하면 $f(\pi)=0=f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ 이고, $f(x)=(\sin x+1)(\cos x+1)$의 최댓값은 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5\pi}{4}$에서 갖는다.

직접 계산하면 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{2}+\sqrt{2}$ 이고 $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{3}{2}-\sqrt{2}$ 이므로 최댓값은 $\frac{3}{2}+\sqrt{2}$ 이다. (3점, (ii) $\cos x+\sin x+1=0$의 경우를 클리어해야 총 3점 부여. 이 경우를 고려하는 것을 빠트리고 답만 맞을 경우 2점 부여)

정답: $\frac{3}{2}+\sqrt{2}$

(다른 풀이) 삼각형 ABC의 넓이는 $f(x)=(\sin x+1)(\cos x+1)$가 된다.

$\cos^2 x+\sin^2 x=1$ 사용하면 $f(x)=(\sin x+1)(\cos x+1)=\frac{(\sin x+\cos x+1)^2}{2}$ 라는 사실을 알 수 있다. (1점)

더 나아가 $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x \leq 2$이므로 $\sin x + \cos x$의 최댓값은 $\sqrt{2}$이고 $x = \frac{\pi}{4}$에서 최댓값을 갖는다.

즉, 삼각형 ABC 넓이 $f(x) = \frac{(\sin x + \cos x + 1)^2}{2}$의 최댓값은 $x = \frac{\pi}{4}$일 때, $\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{2} = \frac{3}{2} + \sqrt{2}$ 이다. (3점)