2022학년도 수시 면접·구술고사

수학 기출

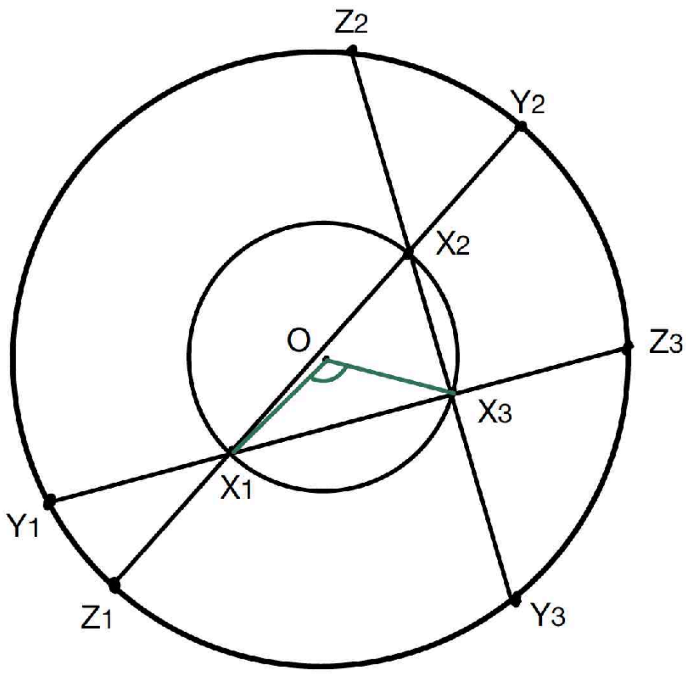
문항 · 채점 기준 · 예시 답안

한국과학기술원 (KAIST)

문제 1. 원과 코사인법칙, 삼각함수

문항 및 제시문

> 그림과 같이 점 O가 중심인 반지름이 1인 원 A와 반지름이 $\sqrt{5}$인 원 B가 있다. 원 A 위에서 세 점 X_1, X_2, X_3을 임의로 선택하여 중심 O가 X_1, X_2, X_3을 꼭짓점으로 가지는 삼각형의 내부 또는 변에 있도록 한다. 이 세 점 중 두 점을 지나는 세 직선을 그어, 그 선들과 원 B의 교점을 위에서와 같이 $Y_1, Y_2, Y_3, Z_1, Z_2, Z_3$이라 한다. (총 5점)



(1) 각 $\angle X_1OX_2$과 선분 Y_1Z_1의 길이 사이의 관계를 구하시오. (1점)

(2) 세 선분 Y_1Z_1, Y_2Z_2, Y_3Z_3의 길이의 제곱의 합의 최댓값을 구하시오. (4점)

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	코사인법칙이나 피타고라스 정리를 이용해서 큰 원의 현의 길이에 관한 관계식을 구한다.	1점
(2)	세 선분의 길이의 제곱 합을 세 각 $\angle X_1OX_2$, $\angle X_2OX_3$, $\angle X_3OX_1$을 이용하여 나타내고, 코사인값의 합의 최솟값을 구해야 함을 설명한다. 코사인값의 합을 평면벡터나 내적을 사용하거나 또는 삼각함수의 공식을 적절히 이용하여 제곱의 합으로 바꾼다. 얻은 식을 분석하여 최댓값을 정확히 찾아낸다.	4점

예시 답안

(1) 그림과 같이 Y_1에서 원 A에 접선을 그어 접점을 P라고 하면 피타고라스 정리에 의해서 선분 PY_1의 길이는 2이다. $\theta_1 = \frac{1}{2}\angle X_1OX_2$로 두면 X_1X_2의 길이는 $2\sin\theta_1$이다. 따라서 Y_1X_1의 길이를 x라 할 때 $\angle Y_1X_1O = \frac{\pi}{2} + \theta_1$이므로 삼각형 $\triangle Y_1X_1O$에 코사인법칙을 사용하면 $x^2 + 2x\sin\theta_1 = 4$를 얻는다. 이 방정식을 풀면 $x = -\sin\theta_1 \pm \sqrt{\sin^2\theta_1 + 4}$이다. 이때 x는 0보다 크므로, $x = -\sin\theta_1 + \sqrt{\sin^2\theta_1 + 4}$이고, 이로부터 우리는

$$Y_1Z_1 = 2\sqrt{\sin^2\theta_1 + 4} = 2\sqrt{5 - \cos^2\theta_1} = \sqrt{18 - 2\cos^2\theta_1} = \sqrt{18 - 2\cos(\angle X_1OX_2)}$$

를 얻는다.

다른 풀이: $\theta_1 = \frac{1}{2}\angle X_1OX_2$로 두자. 중심 O에서 선분 Y_1Z_1에 수선을 그려 교점을 Q라 하고 중심 O와 점 Y_1을 연결해서 삼각형 $\triangle OY_1Q$를 생각하자. 선분 OQ의 길이는 $\cos\theta_1$이므로 피타고라스 정리에 의해 선분 Y_1Q의 길이는 $\sqrt{5 - \cos^2\theta_1}$이다. 따라서 선분 Y_1Z_1의 길이는 $2\sqrt{5 - \cos^2\theta_1}$이다.

(2) 세 각 $\angle X_1OX_2, \angle X_2OX_3, \angle X_3OX_1$의 크기를 각각 $2\theta_1, 2\theta_2, 2\theta_3$로 두자. 중심 O가 삼각형 $\triangle X_1X_2X_3$의 내부 또는 변에 있으므로 세 각의 합은 2π이다. 즉, $2\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 = 2\pi$가 성립한다. 구하려는 길이의 제곱의 합은

$$60 - 4(\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3)$$

이다. 삼각함수의 덧셈정리에 의해서 $\cos(a+a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$이므로 $\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$이고, 이를 이용하면 위의 식을 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$60 - 4(\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3) = 54 - 2(\cos(2\theta_1) + \cos(2\theta_2) + \cos(2\theta_3))$$

따라서 이 식의 최댓값을 구하기 위해서는 우선 $2\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 = 2\pi$일 때 $M = \cos(2\theta_1) + \cos(2\theta_2) + \cos(2\theta_3)$의 최솟값을 구해야 한다. M의 값을 구할 수 있는 풀이를 아래에 두 개 소개한다.

풀이 1. 평면벡터를 사용해서 아래와 같이 M의 값을 구할 수 있다. 사잇각이 각각 $2\theta_1, 2\theta_2, 2\theta_3$이고 길이가 1인 세 평면벡터 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$를 생각하자. 그러면 평면벡터의 내적의 성질에 따라 $\vec{a}\cdot\vec{b} = \cos\theta_1$ 대신 $\vec{a}\cdot\vec{b} = \cos 2\theta_1$, $\vec{b}\cdot\vec{c} = \cos 2\theta_2$, $\vec{a}\cdot\vec{c} = \cos 2\theta_3$이 성립하고, 이를 이용하면

$$\begin{aligned} M &= \cos(2\theta_1) + \cos(2\theta_2) + \cos(2\theta_3) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{a}\cdot\vec{c} \\ &= \frac{1}{2}\Big(\big(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\big)\cdot\big(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\big) - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2\Big) \\ &= \frac{1}{2}\big(|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2 - 3\big) \geq -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

를 얻는다. 그리고 실제 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$일 때 $M = -\frac{3}{2}$가 성립하여 M의 최솟값이 $-\frac{3}{2}$임을 알 수 있다. 따라서 $54 - 2(\cos(2\theta_1) + \cos(2\theta_2) + \cos(2\theta_3)) = 54 - 2M$의 최댓값은 $54 - 2(-\frac{3}{2}) = 57$이다.

풀이 2. 삼각함수의 덧셈정리를 사용해서 아래와 같이 M의 값을 구할 수 있다. $x = 2\theta_1$, $y = 2\theta_2$로 두자. 그러면 $2\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 = 2\pi$이고 $\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$이므로 삼각함수의 덧셈정리와 $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = 1$의 성질을 이용하면

$$\begin{aligned} 2M + 3 &= 2\cos(2\theta_1) + 2\cos(2\theta_2) + 2\cos(2\theta_1 + 2\theta_2) + 3 \\ &= 2\cos x + 2\cos y + 2\cos(x+y) + 3 \\ &= 2\cos x + 2\cos y + 2\cos x\cos y + 2\sin x\sin y + 3 \\ &= 2\cos x + 2\cos y + 2\cos x\cos y + 2\sin x\sin y + \cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 y + \sin^2 y + 1 \end{aligned}$$

이다. 이를 다시 정리하면, 제곱수는 항상 0보다 크거나 같으므로,

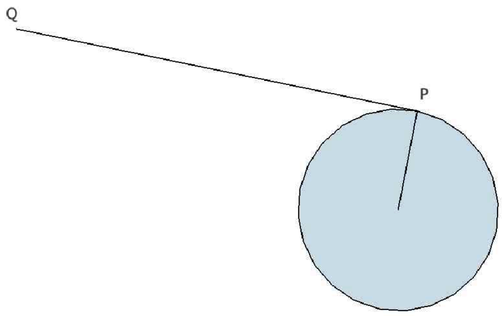
$$\begin{aligned} 2M + 3 &= (\cos^2 x + \cos^2 y + 1 + 2\cos x + 2\cos y + 2\cos x\cos y) + (\sin^2 x + 2\sin x\sin y + \sin^2 y) \\ &= (\cos x + \cos y + 1)^2 + (\sin x + \sin y)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

따라서 $M \geq -\frac{3}{2}$을 얻는다. 그리고 실제 $x = 2\theta_1 = \frac{2\pi}{3}$, $y = 2\theta_2 = \frac{2\pi}{3}$이면 $M = -\frac{3}{2}$이 됨을 확인할 수 있다. 따라서 M의 최솟값은 $-\frac{3}{2}$이고, $54 - 2(\cos(2\theta_1) + \cos(2\theta_2) + \cos(2\theta_3)) = 54 - 2M$의 최댓값은 $54 - 2(-\frac{3}{2}) = 57$이다.

문제 2. 곡선의 길이와 극한

문항 및 제시문

(1) 반지름이 a미터인 원의 한 점 P에 길이 1미터인 줄을 매달아 줄을 팽팽하게 유지하면서 방향으로 감으면, 이때 줄의 다른 끝점 Q를 반시계 방향으로 감아 나가려고 한다. 이때 점 Q의 궤적의 총 길이를 구하시오. (아래 그림과 같이 줄이 원에 접하고 있는 상태에서 시작한다고 하자.) (2점)



(2) 아래 그림과 같이 둘레의 길이가 1미터인 오각형의 한 꼭짓점 P에 길이 1미터인 줄이 한 변의 연장선에 매어져 있다. 이 오각형을 자연수 n에 대하여 닮음비 $1/n$로 축소시킨 뒤 (1)번과 같은 작업을 한다고 하자. 줄 끝점(점 Q)의 궤적의 길이를 $R(n)$이라고 할 때, 극한값

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R(n)}{n}$$

을 구하시오. (3점)

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	전체 배점은 2점. $(x(\theta), y(\theta))$의 좌표를 구하면 1점 부여. 길이 구하는 공식을 아는데 계산을 실수하면 0.5점을 감점.	2점
(2)	전체 배점은 3점. 한 바퀴 도는 동안의 줄 끝 궤적의 길이를 구하는 식을 구하면 1점. 정적분 계산 실수는 1점만 감점.	3점

예시 답안

(1) 원의 중심을 원점에 두고 점 P를 좌표 $(a,0)$이라고 하자. 원의 둘레를 따라 평행한 줄을 각 θ만큼 반시계 방향으로 감으면, 이때 줄이 원과 접하는 점의 좌표는 $(a\cos\theta, a\sin\theta)$이다 (아래 그림 참고). 이때, 잡고 있는 줄 끝의 좌표 $(x(\theta), y(\theta))$를 구해 보면, 감고 남은 줄의 길이가 $1-a\theta$이고 접점에서 점 Q 방향의 단위 벡터는 $(-\sin\theta, \cos\theta)$이므로

$$\begin{aligned}(x(\theta), y(\theta)) &= (a\cos\theta, a\sin\theta) + ((1-a\theta)(-\sin\theta), (1-a\theta)\cos\theta)\\ &= (a\cos\theta - (1-a\theta)\sin\theta,\ a\sin\theta + (1-a\theta)\cos\theta)\end{aligned}$$

이 좌표가 이루는 궤적의 길이를 적분을 통하여 구해 보면

$$\sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2} = \sqrt{(-\cos\theta + a\theta\cos\theta)^2 + (-\sin\theta + a\theta\sin\theta)^2} = |1-a\theta|$$

$$R = \int_0^{1/a} (1-a\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2a}$$

이 된다.

(2) 오각형 둘레의 길이는 닮음비에 따라 $\frac{1}{n}$이 되므로 길이 1인 줄로 감아 나갈 때 n번 감을 수 있다. 줄이 오각형의 외각을 회전하는 호는 남은 줄의 길이만큼의 반지름으로 그린 후에, 호의 반지름이 오각형 해당 변의 길이만큼 줄어들어 다음 호를 그리게 된다. 이때,

호의 길이 = 반지름의 길이 × 호의 중심각의 크기

오각형을 한 바퀴 감았을 때는 줄의 길이는 다각형 둘레의 길이인 $\frac{1}{n}$만큼 줄어들게 된다. 오각형의 외각의 크기를 각각 θ_1, θ_2라고 하고 각 변의 길이를 $\frac{a_i}{n}$라고 하자. 전체 둘레의 길이가 $\frac{1}{n}$이므로 $(a_1 + a_2 + \cdots + a_5)/n = 1/n$임을 알 수 있다. k바퀴를 감고 남은 길이가 $1 - \frac{k}{n}$인 줄이 다음 한 바퀴를 돌 때의 Q점의 궤적의 길이는

$$\theta_1\left(1-\frac{k}{n}\right) + \theta_2\left(1-\frac{k}{n}-\frac{a_1}{n}\right) + \cdots + \theta_5\left(1-\frac{k}{n}-\frac{a_1}{n}-\frac{a_2}{n}-\cdots-\frac{a_4}{n}\right)$$

가 되는데 다각형 외각의 총합은 2π임을 이용하여 다음 부등식

$$2\pi\left(1-\frac{k+1}{n}\right) \le \theta_1\left(1-\frac{k}{n}\right) + \cdots + \theta_5\left(1-\frac{k}{n}-\frac{a_1}{n}-\frac{a_2}{n}-\cdots-\frac{a_4}{n}\right) \le 2\pi\left(1-\frac{k}{n}\right)$$

을 얻을 수 있다. 따라서 전체 궤적의 길이는

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\theta_1\left(1-\frac{k}{n}-\frac{a_1}{n}\right) + \cdots + \theta_5\left(1-\frac{k}{n}-\frac{a_1}{n}-\frac{a_2}{n}-\cdots-\frac{a_5}{n}\right)\right\}$$

로 주어지는데 부등식을 상수 혹은 하단의 극한값으로 대체할 수 있다.

두 경우 극한값이 같은데 상단의 극한값을 정적분으로 바꾸어 계산하면 $\frac{k}{n} \to x$, $\frac{1}{n} \to \mathrm{d}x$, 적분구간은 $[0,1]$에서의 적분이 되어

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R(n)}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} 2\pi\cdot\left(1-\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} \to \int_0^1 2\pi(1-x)\,\mathrm{d}x = \pi$$

이 된다. 하단의 극한값도

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} 2\pi\cdot\left(1-\frac{k+1}{n}\right)\frac{1}{n} \to \int_0^1 2\pi(1-x)\,\mathrm{d}x = \pi$$

같은 값을 갖는다.

(다른 풀이) 위의 부등식을 이용하지 않고 각 항을 같은 방법으로 정적분으로 바꾸어 계산한 후이때, $\frac{k}{n} \to x$, $\frac{1}{n} \to \mathrm{d}x$이므로 $\frac{1}{n^2}$은 0으로 무시된다.)

$$\sum_{k=0}^{n-1}\theta_j\cdot\left(1-\frac{k}{n}-\frac{a_1}{n}-\cdots-\frac{a_j}{n}\right)\frac{1}{n} \to \int_0^1 \theta_j(1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{\theta_j}{2}$$

외각의 합 $\left(\sum_{j=1}^{5} \theta_j = 2\pi\right)$이 2π임을 이용하여 구할 수 있다.