2023학년도 수시 면접·구술고사

수학 기출

문항 · 채점 기준 · 예시 답안

한국과학기술원 (KAIST)

한국과학기술원(KAIST) 문항정보 1

문항 및 제시문

> xyz 좌표공간에서 $x^2+y^2=4$, $z=6$ 을 만족시키는 점 (x,y,z) 들의 집합을 A라 하자. 집합 A의 임의의 점을 $P(x,y,z)$ 라고 하자.

(1) 점 $Q(2,4,2)$ 와 집합 A의 임의의 점 $P(x,y,z)$ 를 지나는 직선은 xy 평면과 한 교점에서 만난다. 이렇게 구해지는 교점들의 집합을 방정식으로 나타내시오. (1점)

(2) $z=2$ 평면에 변의 개수가 n 인 정다각형이 있고, 그 내부에 점 $R(2,2,2)$ 가 있다. 이 정다각형의 한 꼭짓점의 좌표는 $(2,4,2)$ 이고, 각 꼭짓점과 점 $R(2,2,2)$ 사이의 거리가 2라고 하자. 이 정다각형의 변 또는 내부에 있는 임의의 점과 집합 A의 임의의 점 P 를 지나는 직선은 xy 평면과 한 교점에서 만난다. 그 교점들을 모아놓은 도형의 넓이를 S_n 이라고 할 때, S_n 을 구하시오. (3점)

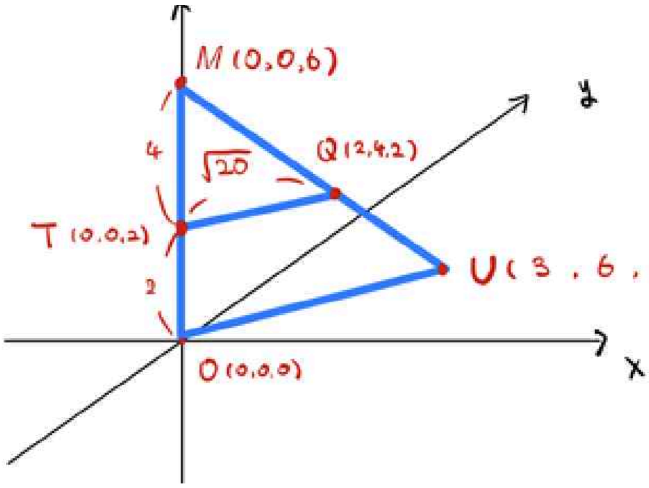
(3) $\lim_{n\to\infty} S_n$ 을 구하시오. (1점)

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	답을 구하면 1점	1점
(2)	S_n 식을 구하면 3점 (만약, S_n 의 식은 틀렸지만 옳은 도형을 설명하면 1점.)	3점
(3)	$\lim_{n\to\infty} S_n$ 을 구하면 1점. (2번의 S_n 식을 이용하거나 반지름이 4인 원의 넓이로 이해해서 답을 구하면 1점)	1점

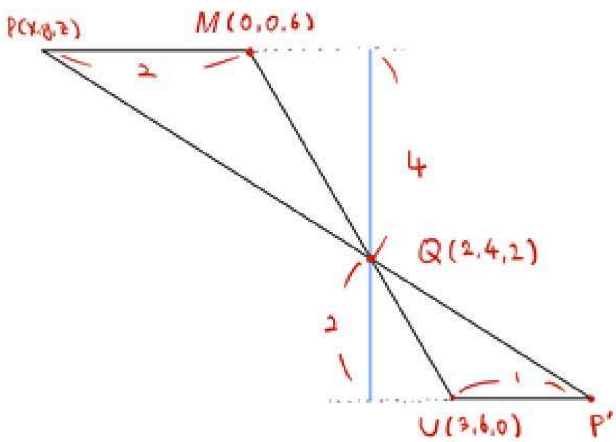
예시 답안

(1) $x^2+y^2=4$, $z=6$ 을 만족시키는 원의 중심은 $M(0,0,6)$ 이다. 또한, $O(0,0,0)$, $T(0,0,2)$, $Q(2,4,2)$ 라고 하고 직선 MQ 와 xy 평면이 만나는 점을 U 라고 하자. 그러면 다음 그림에서와 같이 두 삼각형 MTQ, MOU 는 AA 닮음이다. ($\angle M$ 은 공통, $\angle MTQ = 90° = \angle MOU$)



$\overline{TQ} = \sqrt{2^2+4^2} = 2\sqrt{5}$ 이고 $4:6 = \overline{MT}:\overline{MO} = \overline{TQ}:\overline{OU}$ 이므로 $\overline{OU} = 3\sqrt{5}$ 임을 알 수 있다. 직선 MQ 를 xy 평면으로 정사영하여 만들어지는 직선의 방정식은 $4x=2y$ 이므로 점 U 의 좌표는 $(3,6,0)$ 이다.

$P(x,y,z)$ 와 $Q(2,4,2)$ 를 잇는 직선이 xy 평면과 만나는 점을 P' 이라 하자. 그러면 다음 그림에서와 같이 두 삼각형 QMP, QUP' 은 AA 닮음이다. 따라서 $\overline{MP}$ 를 밑변으로 하는 삼각형 QMP 의 높이는 4이고, $\overline{UP'}$ 를 밑변으로 하는 삼각형 QUP' 의 높이는 2이므로 $4:2 = \overline{P(x,y,z)M} : \overline{UP'}$ 이다.



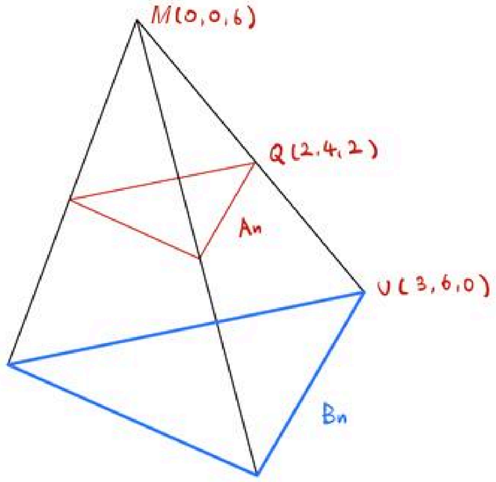
따라서 $\overline{P(x,y,z)M} = 2$, $\overline{UP'} = 1$ 이다. 즉, 점 $P(x,y,z)$ 가 원 위에서 움직일 때, 점 P' 는 $U(3,6,0)$ 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 xy 평면 위의 원이므로 $(x-3)^2+(y-6)^2=1$ (xy 평면) 이다.

정답: $(x-3)^2+(y-6)^2=1$ (xy 평면)

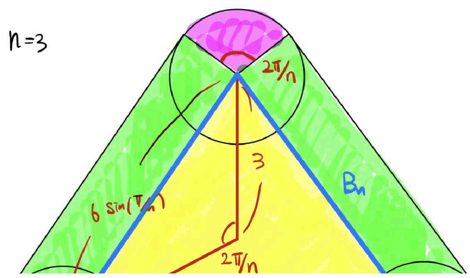
(2) (1)에서와 같은 방법으로 정 n 각형 A_n 의 변 또는 내부의 점과 점 $P(x,y,z)$ 를 잇는 직선이 xy 평면에서 만나는 교점들을 모아놓은 도형은 다음 그림과 같이 표시된다는 사실을 알 수 있다.

$z=2$ 평면에 변의 개수가 n 인 정다각형 A_n 이 있고, 그 내부에 점 $R(2,2,2)$ 가 있다. 정 n 각형 A_n 위의 임의의 점과 점 $M(0,0,6)$ 을 지나는 직선이 xy 평면과 만나는 점을 D 라 하자. 두 점 $M(0,0,6)$, $R(2,2,2)$ 를 잇는 직선이 xy 평면과 만나는 점은 $C(3,3,0)$ 이다. 또한, 정 n 각형 A_n 임의의 꼭짓점 D_i 에 대하여 점 D 와 점 $M(0,0,6)$ 을 지나는 직선이 xy 평면과 만나는 점을 E_i 라 하면, 두 삼각형 MRD_i, MCE_i 는 서로 닮음이고

$\overline{MR} = \sqrt{2^2+2^2+4^2} = 2\sqrt{6}$, $\overline{MC} = \sqrt{3^2+3^2+6^2} = 3\sqrt{6}$ 이므로, 닮음비가 $2:3$ 이다. 따라서 $\overline{RD_i}:\overline{CE_i} = 2:3$ 이고 $\overline{RD_i} = 2$ 이므로 $\overline{CE_i} = 3$ 이다.



즉, 곡선 B_n 의 각 꼭짓점은 점 $C(3,3,0)$ 과의 거리가 3인 정 n 각형임을 알 수 있다.



이 도형의 넓이는 다음과 같이 구할 수 있다.

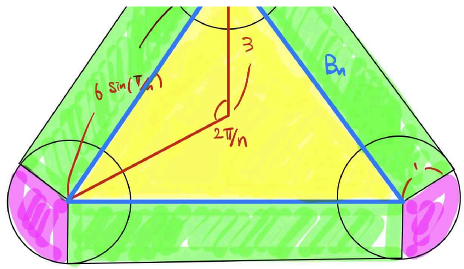
$S_n =$ 반지름의 길이가 1인 원의 넓이(보라색 부분의 합)

$+B_n$

의 둘레(녹색부분의 합)

$+B_n$

의 넓이(노란색 부분)



즉,

$S_n = \pi + 6n\sin(\pi/n) + (9n/2)\sin(2\pi/n)$

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 을 이용하여 다음 극한을 계산할 수 있다.

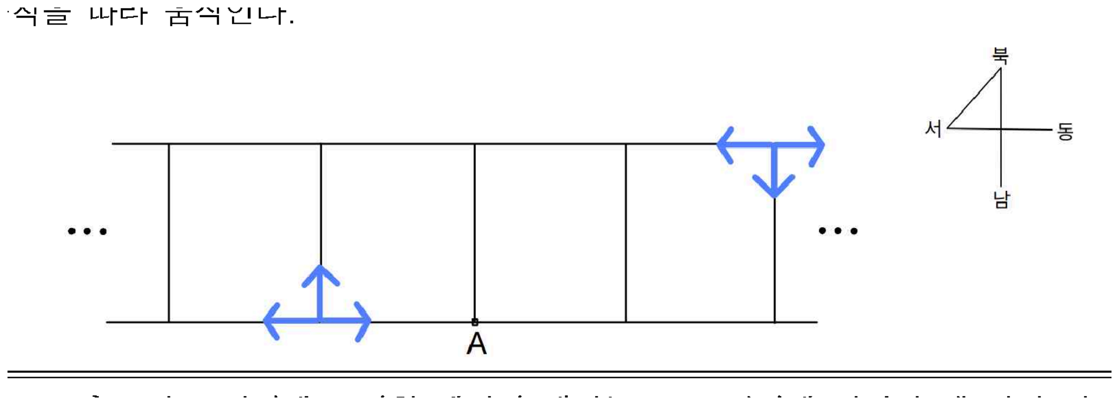
$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pi + \lim\limits_{n\to\infty} 6n\sin(\pi/n) + \lim\limits_{n\to\infty} (9n/2)\sin(2\pi/n) = \pi + 6\pi + 9\pi = 16\pi$

※ (2)의 결과를 이용하지 않은 풀이: 구하는 도형이 반지름이 4인 원이라는 것을 (1)을 통해 알아내서 직접 넓이 16π 를 구한다.

한국과학기술원(KAIST) 문항정보 2

문항 및 제시문

> 다음 그림과 같이 정사각형 타일이 일렬로 (무한히) 배열되어 있다. 각 타일의 꼭짓점을 '교차점'이라 하자. 개미는 교차점 A 에서 출발하여 타일의 변 위를 다음 규칙을 따라 움직인다.



> < 규칙 >
>
> 각 교차점에 도달할 때마다 개미는 그 교차점에 연결된 세 변의 방향 중 하나를 똑같은 확률로 임의로 골라 다음 교차점으로 이동한다. (예시: 그림의 파란색 화살표 방향들이 해당 교차점에서 개미가 이동할 수 있는 방향이다.)

이 규칙을 따르면, 개미가 n 회의 움직임을 시행할 때, 일어날 수 있는 모든 경우의 수는 3^n 이다.

(1) 개미가 총 $2n$ 회의 움직임을 시행한다고 가정하자. 개미가 m 회 $(0 \le m \le n)$ 의 서쪽 방향 움직임을 시행하면서, $2n$ 번째 도달한 교차점이 출발점 A 와 일치하는 경우의 수는 몇 가지인가? (2점)

(2) 개미가 $2n$ 회 도달한 교차점이 출발점 A 와 일치할 때, 서쪽 방향 움직임을 m 회 $(0 \le m \le n)$ 시행할 조건부 확률을 $p_{n,m}$ 이라 하자. 주어진 자연수 n 에 대해, 이 조건부 확률 $p_{n,m}$ 을 최대화하는 m 의 값을 $f(n)$ 이라 하자 (만약 최대화하는 m 이 여러 개 존재하면, 이들 중 가장 작은 값을 택한다). 이 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n}$ 의 값을 구하시오. (3점)

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	(1점) 서쪽 움직임을 m 회 실시하면서 $2n$ 번째 교차점이 출발점과 일치하려면, 동쪽 움직임 횟수도 m 회라는 사실을 도출. (일반적으로, 북, 남, 동, 서쪽으로 각각 $n-m, n-m, m, m$ 회 이동해야 한다.) (1점) 경우의 수를 이항계수를 이용하여 정확히 도출.	2점
(2)	(1점) 조건부 확률 $p_{n,m}$ 을 도출. (1점) 이웃한 두 경우의 수를 비교하는 아이디어를 언급. (1점) m 이 커짐에 따라 조건부 확률이 증가하다 감소한다는 사실을 이항계수의 정의를 이용하여 관찰하여, 증감성이 변하는 지점이 $\frac{2n}{3}$ 근방이라는 사실을 도출. (※ 채점 시 주의사항) — $f(n)$ 의 범위가 위 풀이와 정확히 일치하지 않아도, 적절한 상수 $c_1, c_2 \ge 0$ 에 대해 $\frac{2n-c_1}{3} \le f(n) \le \frac{2n+c_2}{3}$ 를 도출하여도 정답 인정. — 위 풀이처럼 m 의 범위에 대한 경우를 나누지 않고, $(m+1)^2$ 와 $(2n-2m)(2n-2m-1)$ 의 대소관계를 m 에 대한 이차식으로 간주하여 다른 방법으로 해결한 경우 (예시: 근의 공식 이용)도 정답 인정. (특수 상황, 1점) 각 교차점에서 서쪽 움직임의 확률이 $\frac{1}{3}$ 이라서 $f(n)$ 의 값이 대략 $2n \times \frac{1}{3} = \frac{2n}{3}$ 이라고 언급하면 총점 3점 중 1점.	3점

예시 답안

1. $2n$ 번째 도달하는 교차점이 출발점과 일치한다면, 서쪽과 동쪽으로 움직인 횟수가 서로 같다. 즉, 서쪽으로 움직인 횟수가 m 회라면, 동쪽으로 움직인 횟수도 역시 m 회이다. $2n$ 회의 움직임 시기 중 동쪽과 서쪽 움직임 시기를 각각 m 개 고르는 경우의 수는 ${}_{2n}C_m \cdot {}_{2n-m}C_m$ 이다. 또한, 동쪽과 서쪽 움직임의 시기가 정해진다면, 나머지 $2n-2m$ 회의 움직임은 수직 방향(북쪽 또는 남쪽)이고 자동으로 정해진다. 즉, 총 경우의 수는 ${}_{2n}C_m \cdot {}_{2n-m}C_m$ 이다.
2. 조건부 확률 $p_{n,m}$ 은 경우의 수 ${}_{2n}C_m \cdot {}_{2n-m}C_m$ 에 비례한다.

$$\left(p_{n,m} = \frac{{}_{2n}C_m \cdot {}_{2n-m}C_m}{\sum_{k=0}^{n} {}_{2n}C_k \cdot {}_{2n-k}C_k} \text{ 이다.}\right)$$

즉, $f(n)$ 은 경우의 수 ${}_{2n}C_m \cdot {}_{2n-m}C_m$ 를 최대로 만드는 m 의 값이다. 이웃한 두 항의 대소관계를 알아보자.

$${}_{2n}C_m \cdot {}_{2n-m}C_m \quad \text{vs} \quad {}_{2n}C_{m+1} \cdot {}_{2n-(m+1)}C_{m+1}$$

이항계수 공식에 의해

$${}_{2n}C_m = \frac{2n(2n-1)\cdots(2n-m+1)}{m!} = \frac{(2n)!}{m!(2n-m)!} \text{ 이고}$$

$${}_{2n-m}C_m = \frac{(2n-m)\cdots(2n-2m+1)}{m!} = \frac{(2n-m)!}{m!(2n-2m)!} \text{ 이므로,}$$

$${}_{2n}C_m \cdot {}_{2n-m}C_m = \frac{2n(2n-1)\cdots(2n-2m+1)}{(m!)^2} = \frac{(2n)!}{m!m!(2n-2m)!} \text{ 이다.}$$

이를 이용하면, 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} {}_{2n}C_{m+1} \cdot {}_{2n-(m+1)}C_{m+1} &= \frac{2n(2n-1)\cdots(2n-2m-1)}{((m+1)!)^2} \\ &= \frac{(2n)!}{(m+1)!(m+1)!(2n-2m-2)!} \\ &= ({}_{2n}C_m \cdot {}_{2n-m}C_m) \cdot \frac{(2n-2m)(2n-2m-1)}{(m+1)^2} \end{aligned}$$

따라서, 다음 등식을 얻는다.

$$\frac{{}_{2n}C_{m+1} \cdot {}_{2n-(m+1)}C_{m+1}}{{}_{2n}C_m \cdot {}_{2n-m}C_m} = \frac{(2n-2m-1)(2n-2m)}{(m+1)^2}$$

이 때, $(m+1)^2 < (2n-2m-1)(2n-2m)$ 이면 ${}_{2n}C_m \cdot {}_{2n-m}C_m < {}_{2n}C_{m+1} \cdot {}_{2n-m-1}C_{m+1}$ 이고 $(m+1)^2 > (2n-2m-1)(2n-2m)$ 이면 ${}_{2n}C_m \cdot {}_{2n-m}C_m > {}_{2n}C_{m+1} \cdot {}_{2n-m-1}C_{m+1}$ 이다.

● $m+1 \le 2n-2m-1 \Rightarrow m \le \frac{2n-2}{3}$ 인 경우:

$$(m+1)^2 \le (2n-2m-1)^2 < (2n-2m)(2n-2m-1) \text{ 이므로,}$$

${}_{2n}C_m \cdot {}_{2n-m}C_m < {}_{2n}C_{m+1} \cdot {}_{2n-(m+1)}C_{m+1}$ 이다.

● $m+1 \ge 2n-2m \Rightarrow m \ge \frac{2n-1}{3}$ 인 경우:

$$(m+1)^2 \ge (2n-2m)^2 > (2n-2m)(2n-2m-1) \text{ 이므로,}$$

${}_{2n}C_m \cdot {}_{2n-m}C_m > {}_{2n}C_{m+1} \cdot {}_{2n-(m+1)}C_{m+1}$ 이다.

따라서, 구하는 m 의 최대값 $f(n)$ 은 다음 부등식을 만족시킨다.

$$\frac{2n-2}{3} < f(n) < \frac{2n-1}{3} + 1 \text{ 이 되어, } \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} = \frac{2}{3} \text{ 이다.}$$

한국과학기술원(KAIST) 문항정보 3

문항 및 제시문

> 실수 순서쌍 (a_0, b_0) 을 생각하자. 방정식 $x^2 + a_0x + b_0 = 0$ 의 실수해가 존재하지 않으면 순서쌍 (a_0, b_0) 의 친화도를 0으로 정의하고, 방정식 $x^2 + a_0x + b_0 = 0$ 이 두 실수해 $a_1, b_1 (a_1 \geq b_1)$ 를 가지면(중근은 두 개로 센다) 새로운 방정식 $x^2 + a_1x + b_1 = 0$ 을 만들어 이 방정식의 실수해가 없으면 순서쌍 (a_0, b_0) 의 친화도를 1로 정의하고, 실수해가 존재하면 두 실수해를 $a_2, b_2 (a_2 \geq b_2)$ 로 두자. 이런 과정을 반복해서 방정식 $x^2 + a_kx + b_k = 0$ 이 실수해를 갖지 않는 최소의 k 를 순서쌍 (a_0, b_0) 의 친화도로 정의하자. 만약 이런 과정이 끝나지 않고 계속 반복된다면 순서쌍 (a_0, b_0) 의 친화도는 정의되지 않는다고 하자.

(1) 순서쌍 $(-6, 9)$ 의 친화도는 정의되는가? 정의된다면 친화도는 얼마인가? (1점)
(2) 순서쌍 $(-3, 2)$ 의 친화도는 정의되는가? 정의된다면 친화도는 얼마인가? (2점)
(3) 친화도가 정의되는 순서쌍 중 친화도의 최댓값은 얼마인가? (2점)

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	$x^2 - 6x + 9 = 0$ 의 해를 구하고, $x^2 + 3x + 3 = 0$ 의 해가 없음을 구해서 $(-6, 9)$ 의 친화도가 1임을 확인한다. (1점)	1점
(2)	$(a_0, b_0) = (-3, 2)$ 인 경우, $(a_1, b_1) = (2, 1)$ 이고, $(a_2, b_2) = (-1, -1)$ 라는 것을 확인한다. (1점) b_k 가 음수가 될 경우, 앞의 과정이 끝나지 않고 계속 반복되어 친화도가 정의되지 않음을 설명한다. (1점)	2점
(3)	$x^2 + a_0x + b_0 = 0$ 가 음수해를 가질 경우, (a_0, b_0) 의 친화도가 정의되지 않음을 이해한다. (1점) 두 실수해가 있을 경우, 그 중 하나는 음수가 되어야 함을 설명한다. (1점) 이를 이용해서 친화도의 최댓값이 1임을 보인다. (1점)	2점

예시 답안

(1) $(a_0, b_0) = (-6, 9)$ 인 경우, $(a_1, b_1) = (3, 3)$ 이 된다. 이 경우에는 방정식 $x^2 + 3x + 3 = 0$ 의 판별식이 $D = 3^2 - 4 \cdot 3 = -3 < 0$ 이므로 실수해가 없다. 따라서 $(-6, 9)$ 의 친화도는 잘 정의되고, 그 값은 1이다.

(2) $(a_0, b_0) = (-3, 2)$ 인 경우, $(a_1, b_1) = (2, 1)$ 이고, $(a_2, b_2) = (-1, -1)$ 이다. 일반적으로 (a_k, b_k) 가 주어졌을 때, b_k 가 음수이면, 방정식 $x^2 + a_k x + b_k = 0$ 의 판별식 $D = a_k^2 - 4b_k$ 가 항상 양수이므로 실수해가 존재한다. 근과 계수의 관계에 의해서 두 해의 곱은 b_k 이므로 음수가 된다. 따라서 $a_{k+1} > 0 > b_{k+1}$ 이므로 b_{k+1} 도 다시 음수가 된다. 수학적 귀납법에 의해서 모든 $k \geq 2$ 에 대해서 (a_k, b_k) 가 존재하며 b_k 는 음수이다. 따라서 $(-3, 2)$ 의 친화도는 정의되지 않는다.

(3) 앞에서 관찰했듯이, b_k 가 음수가 되는 k 가 있으면 (a_0, b_0) 의 친화도는 정의되지 않는다. (a_0, b_0) 의 친화도가 정의된다고 가정하자. 만약 방정식 $x^2 + a_0 x + b_0 = 0$ 이 실수해를 가지지 않으면 (a_0, b_0) 의 친화도는 0이다. 방정식 $x^2 + a_0 x + b_0 = 0$ 가 실수해 a_1, b_1 을 가진다고 하자. 만약 b_1 이 음수라면 (a_0, b_0) 의 친화도는 정의되지 않고, $a_1 \geq b_1$ 이므로 a_1, b_1 은 모두 양수이어야 한다.

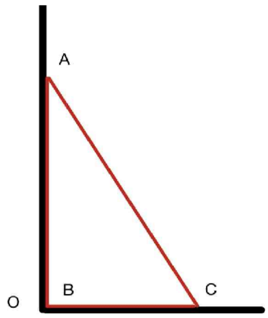
만약 방정식 $x^2 + a_1 x + b_1 = 0$ 이 실수해를 가지지 않으면 (a_0, b_0) 의 친화도는 1이다. 그런데 방정식 $x^2 + a_1 x + b_1 = 0$ 이 실수해를 가지면, 근과 계수의 관계에 의해서 두 해의 곱은 $b_1 > 0$ 이고 합은 $-a_1 < 0$ 이다. 따라서 두 실수해는 모두 음수가 된다. 문제 (2)에 의해서 이 경우 (a_0, b_0) 의 친화도는 정의되지 않는다. 따라서 (a_0, b_0) 의 친화도가 정의될 경우, 그 친화도는 0또는 1일 수 밖에 없다. 실제 앞의 문제 (1)에서 친화도가 1이 되는 순서쌍이 있음을 확인했으므로, 친화도의 최댓값은 1이다.

한국과학기술원(KAIST) 문항정보 4

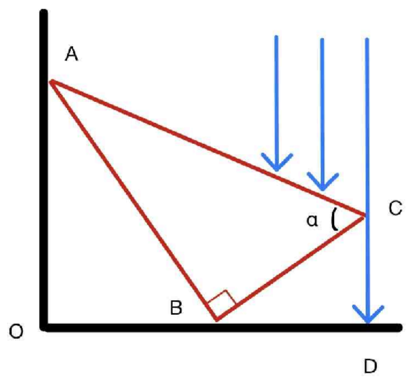
문항 및 제시문

> 오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 ABC 가 있고 선분 AB 의 길이는 4이며 선분 BC 의 길이는 3이다. 직각삼각형 ABC 가 형태를 변형하지 않으며 움직이는데, 점 A 는 벽을 따라 바닥에 닿을 때까지 아래로, 점 B 는 바닥을 따라 오른쪽으로 움직인다. 벽과 바닥이 만나는 점을 O 라고 하자. (아래 문항에서 빛에 직각삼각형 ABC 를 뚫고 지나가지 않는다.)

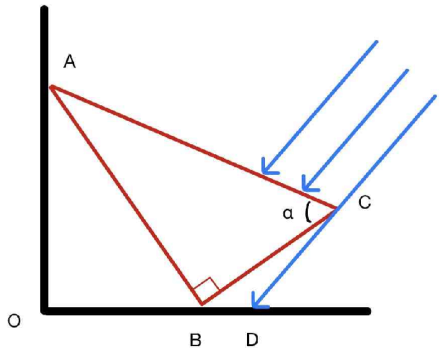
(1) 각 OAB 를 θ 라고 하고 각 BCA 를 α 라고 하자. 오른쪽에서 수평으로 빛을 벽을 향해 비출 때 벽에 생기는 그림자의 길이를 θ 에 대한 함수로 나타내시오. (1점)



(2) 점 O 와 점 B 사이의 거리를 x 라고 하자. 이번에는 위에서 수직으로 빛을 바닥을 향해 비춘다. 오른쪽 그림과 같이 바닥에 생긴 그림자에서 점 C 에 대응되는 점을 D 라고 하자. 사다리꼴 $AODC$ 의 넓이가 최대가 될 때, x 값을 구하시오. (2점)



(3) 이번에는 바닥과 $45°$ 각도로 빛을 비춘다. 왼쪽 그림과 같이 바닥에 생긴 그림자에서 점 C 에 대응하는 점 D 가 점 B 의 오른쪽에 있을 때까지만 삼각형 ABC 를 움직인다. 사각형 $AODC$ 의 넓이가 최대가 될 때, 삼각형 AOB 의 넓이를 구하시오. (2점)



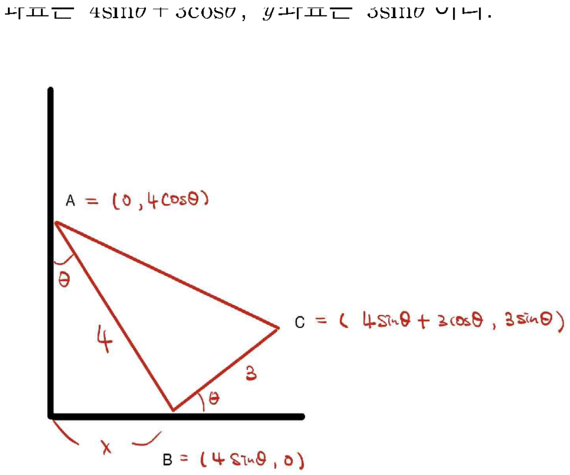
채점 기준

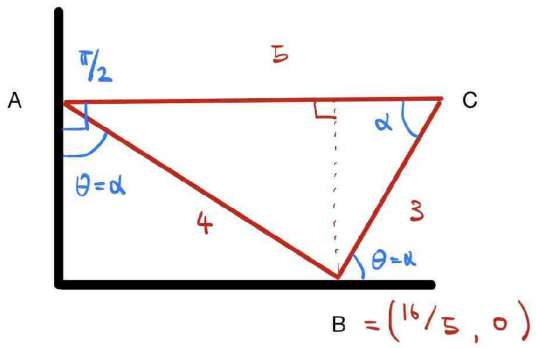
하위 문항	채점 기준	배점
(1)	그림자의 길이를 θ 에 대한 함수로 맞게 나타내면 1점	1점
(2)	사다리꼴 $AODC$ 의 넓이를 식으로 맞게 나타내면 1점 사다리꼴 $AODC$ 의 넓이가 최대가 되는 순간 x 값을 맞게 구하면 1점	2점
(3)	미분을 사용하여 최댓값을 가지는 θ 를 구하면 1점 사각형 $AODC$ 의 넓이가 최대가 되는 순간 삼각형 AOB 의 넓이를 맞게 구하면 1점	2점

예시 답안

바닥과 벽을 각각 x 축 y 축으로 생각한다. 선분 AB 와 y 축이 이루는 각이 θ 이고 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 이다. 또한, 점 A 의 x 좌표는 0, y 좌표는 $4\cos\theta$, 점 B 의 x 좌표는 $4\sin\theta$, y 좌표는 0, 점 C 의 x 좌표는 $4\sin\theta + 3\cos\theta$, y 좌표는 $3\sin\theta$ 이다.

(1) 아래 그림을 통하여 점 A 의 y 좌표와 점 C 의 y 좌표는 $\theta = \alpha$ 일 때 같으며, $\theta < \alpha$ 이면 점 A 의 y 좌표가 더 크고, $\theta > \alpha$ 이면 점 C 의 y 좌표가 더 크다는 사실을 알 수 있다.

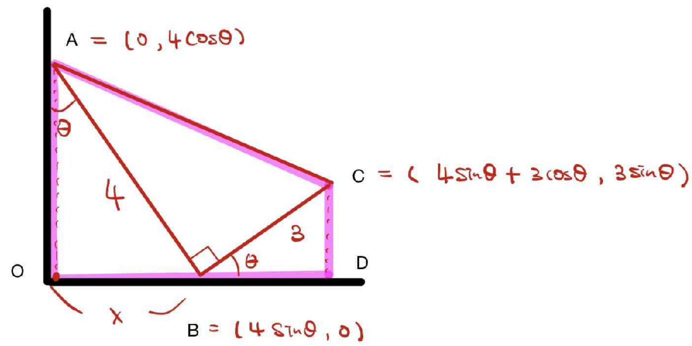




따라서,

$$f(\theta) = \begin{cases} 4\cos\theta & (0 \leq \theta \leq \alpha) \\ 3\sin\theta & (\alpha < \theta \leq \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

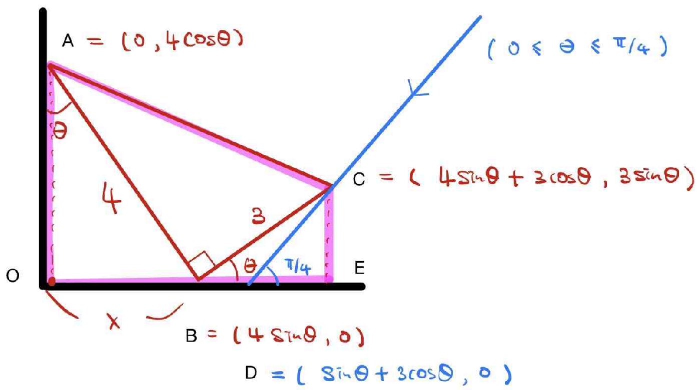
(2) 아래 그림을 통하여 다음을 알 수 있다.



사다리꼴 $AODC$ 의 넓이 = 삼각형 ABC 의 넓이 + 삼각형 AOB 의 넓이 + 삼각형 BDC 의 넓이.

즉, 사다리꼴 $AODC$ 의 넓이는 $6 + 8\sin\theta\cos\theta + \frac{9}{2}\sin\theta\cos\theta = 6 + \frac{25}{4}\sin 2\theta$ 이다. (삼각함수의 덧셈정리를 통해 $\sin 2\theta = \sin(\theta+\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$ 임을 유도할 수 있음) 따라서 사다리꼴 넓이는 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 일 때 최댓값을 가지므로 $x = 4\sin\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}$ 이다.

(3) 점 D 가 점 B 의 오른쪽에 있을 조건은 $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ 이다. 아래 그림에서 점 D 의 x 좌표가 $\sin\theta + 3\cos\theta$ 임을 알 수 있고, 사각형 $AODC$ 의 넓이는 사다리꼴 $AOEC$ 의 넓이에서 삼각형 CDE 의 넓이를 뺀 것이므로



구하는 사각형 $AODC$ 의 넓이인 $f(\theta)$ 는

$$f(\theta) = 6 + \frac{25}{4}\sin 2\theta - \frac{9}{2}\sin^2\theta$$

가 된다. 특히, $\theta = \frac{\pi}{4}$ 이면 사각형 $AODC$ 의 넓이는 10이 된다.

$f(\theta)$ 를 미분하면,

$$f'(\theta) = \frac{25}{2}\cos 2\theta - 9\sin\theta\cdot\cos\theta = \frac{25}{2}\cos 2\theta - \frac{9}{2}\sin 2\theta \text{ 이고,}$$

$0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ 이므로 $f(\theta)$ 는 $\tan 2\theta = \frac{25}{9}$, $\sin 2\theta = \frac{25}{\sqrt{706}}$, 그리고 $\cos 2\theta = \frac{9}{\sqrt{706}}$ 일 때 최댓값을 가진다. (참고: 이때, $f(\theta) = \frac{15+\sqrt{706}}{4} > 10$ 이다.)

따라서 삼각형 AOB 의 넓이는 $8\sin\theta\cos\theta = 4\sin 2\theta = \frac{100}{\sqrt{706}}$ 이다.