

만진동

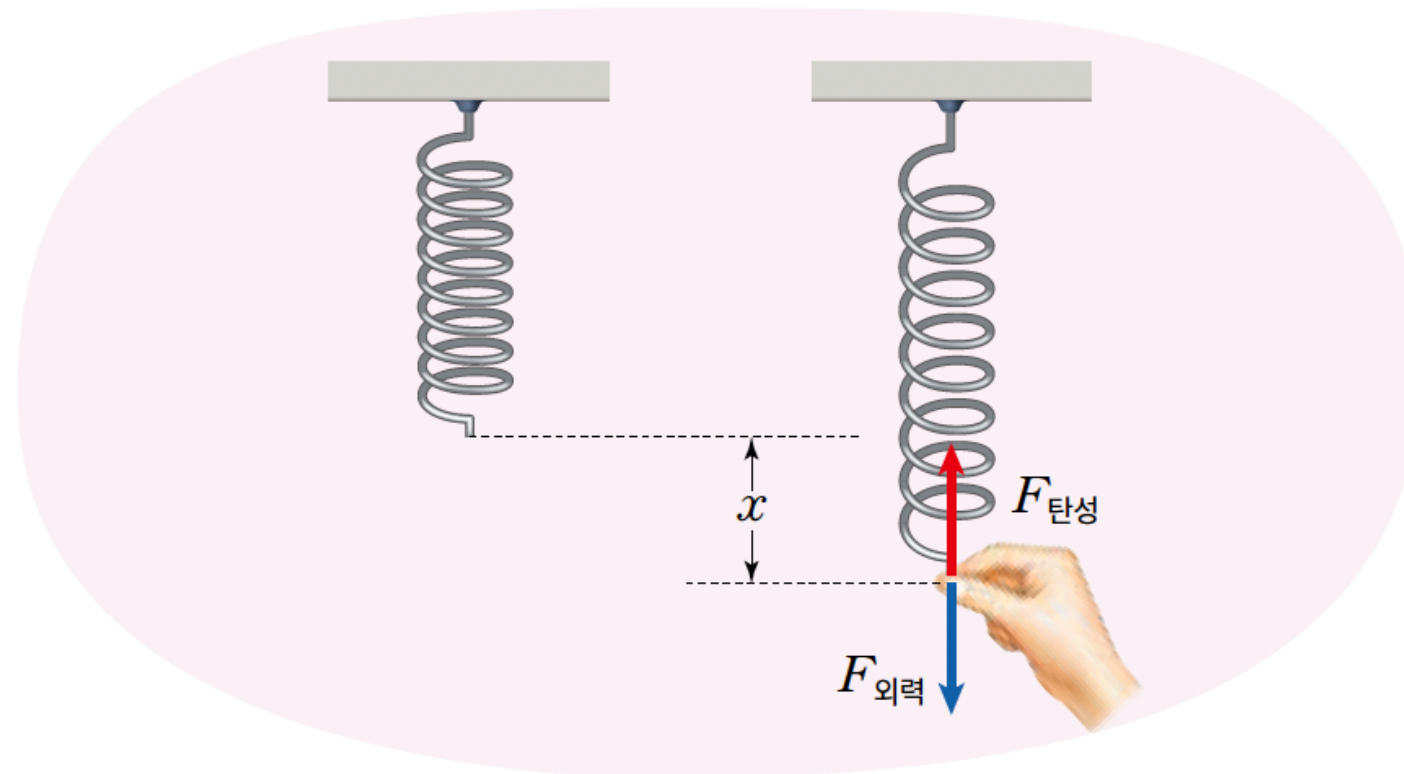


주기 운동과 단진동

그림 Ⅲ-1과 같이 용수철에 외력 $F_{\text{외력}}$ 이 작용해 용수철이 늘어나면, 크기가 용수철의 늘어난 길이 x 에 비례하고 방향은 처음 위치를 향하는 탄성력이 작용한다. 탄성력 $F_{\text{탄성}}$ 의 크기와 늘어난 길이의 비례 관계를 나타내는 법칙을 **훅의 법칙**이라고 하며, 다음과 같은 식으로 나타낸다.

$$F_{\text{탄성}} = -kx$$

여기서 k 는 용수철 상수이고, $(-)$ 부호는 탄성력의 방향이 용수철이 변형된 방향과 반대임을 뜻한다.



단진동 하는 물체의 변위는 어떻게 될까? 그림 Ⅲ-2와 같이 단진동은 평면상에서 반지름 A , 각속도 ω 로 등속 원운동을 하는 물체 P에 평행하게 빛을 비추었을 때 그림자 Q의 직선 왕복 운동과 같다.

단진동 하는 물체가 1 초 동안 진동하는 횟수를 진동수 f 라 하고, 1 회 진동하는데 걸리는 시간을 주기 T 라고 하면 단진동의 주기는 원운동 하는 물체의 주기와 같으므로 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ 이다.

단진동 하는 물체의 위치는 주기적으로 변하며, 변위 x_Q 는 원운동의 반지름 A 와 회전각 $\theta = \omega t$ 로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x_Q = A \sin \omega t \cdots \textcircled{1}$$

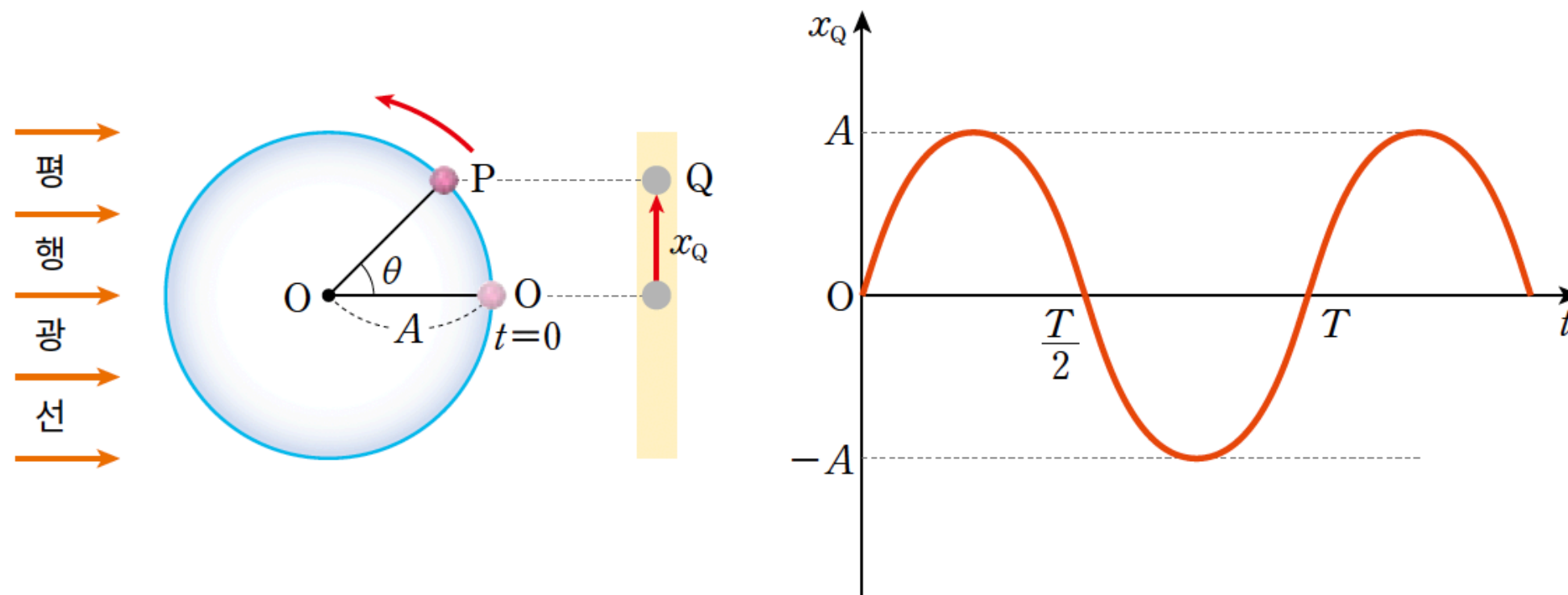


그림 Ⅲ-3에서 등속 원운동 하는 물체의 속도 v_P 의 방향은 P에서의 접선 방향이며, 이 속도의 x 성분이 단진동 하는 물체의 속도 v_Q 이다. 따라서 원운동 하는 물체가 일정한 크기의 속도 $v_P = A\omega$ 로 회전할 때, 단진동 하는 물체의 속도 v_Q 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$v_Q = A\omega \cos \omega t \cdots \textcircled{2}$$

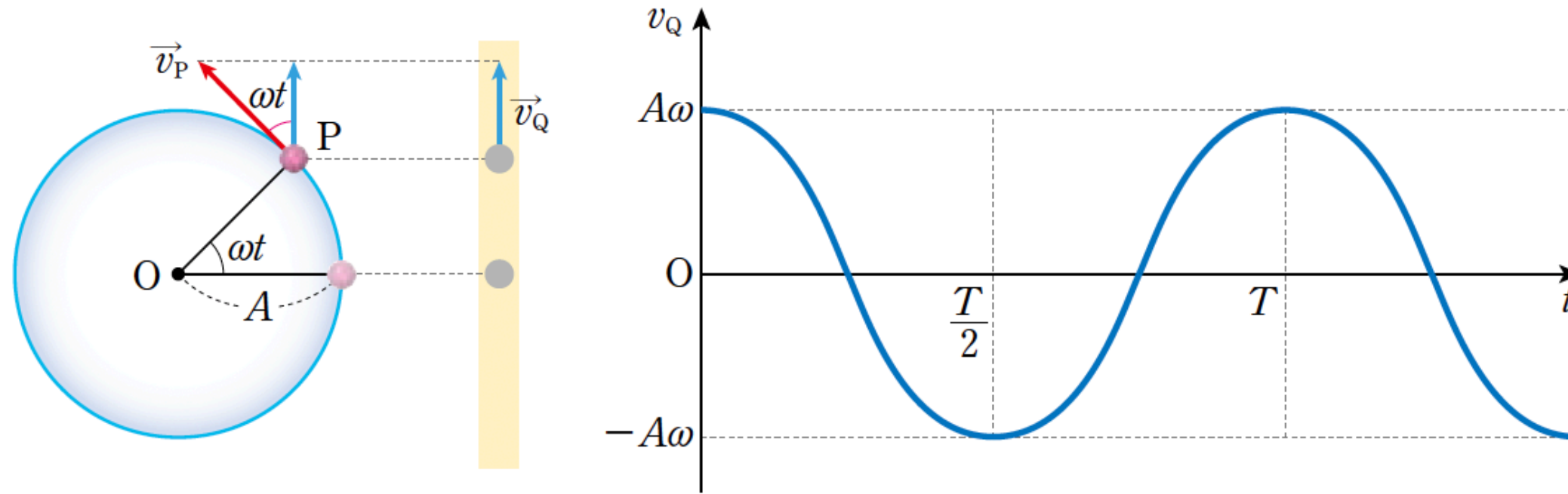


그림 Ⅲ-3 단진동의 속도

단진동 하는 물체의 속도는 평형점 O 를 지날 때 크기가 최대이며, 평형점에서 가장 멀어졌을 때 0 이다.

그림 Ⅲ-4에서 등속 원운동을 하는 물체의 구심 가속도 a_P 는 항상 원의 중심을 향하며 크기는 $A\omega^2$ 이다. 이 구심 가속도의 x 성분이 단진동 하는 물체의 가속도 a_Q 이다.

따라서 원운동 하는 물체의 가속도 크기가 $a_P = A\omega^2$ 으로 일정할 때, 단진동 하는 물체의 가속도 a_Q 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$a_Q = -A\omega^2 \sin \omega t \cdots \textcircled{3}$$

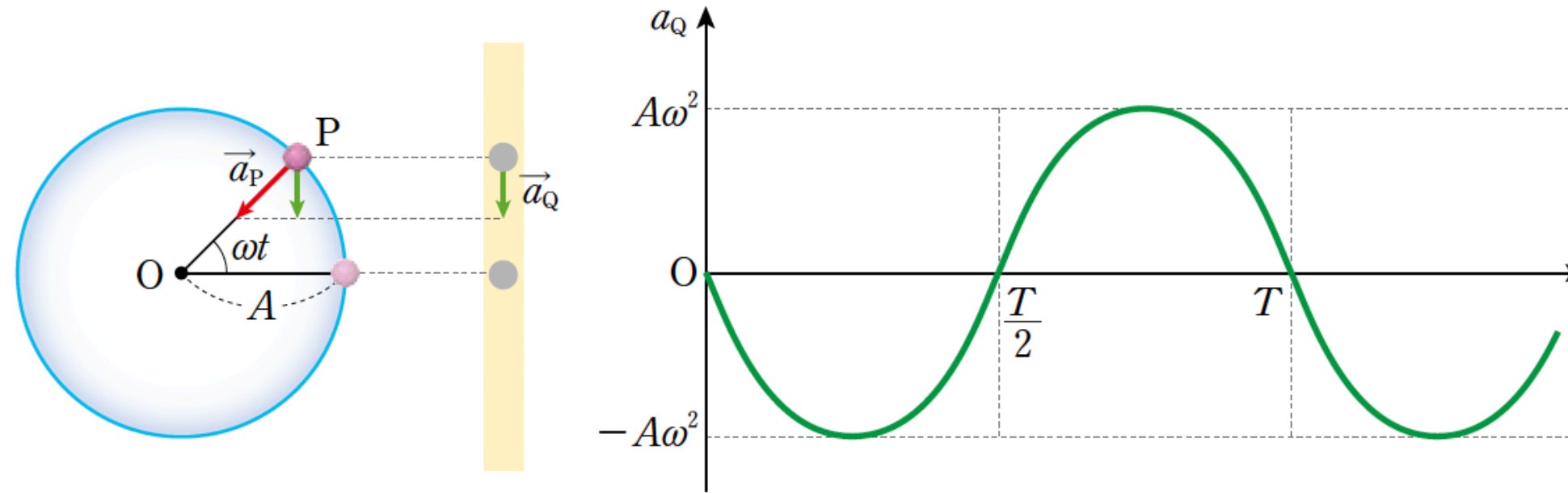


그림 Ⅲ-4 단진동의 가속도

식 ③에 식 ①을 적용하면 단진동 하는 물체의 가속도와 변위 관계를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$a_Q = -\omega^2 x$$

즉, 단진동 하는 물체의 가속도 크기는 변위의 크기에 비례하며, 가속도의 방향은 변위의 방향과 반대이다.

그림 Ⅲ-5는 단진동 하는 물체의 시간에 따른 변위, 속도, 가속도의 변화를 상댓값으로 비교한 것이다.

단진동 하는 물체의 변위와 가속도는 평형점 O에서 크기가 0으로 같지만 위상차가 180° 로 방향이 반대이다. 속도는 변위, 가속도와 각각 90° 의 위상차를 가지고 주기적으로 변한다.

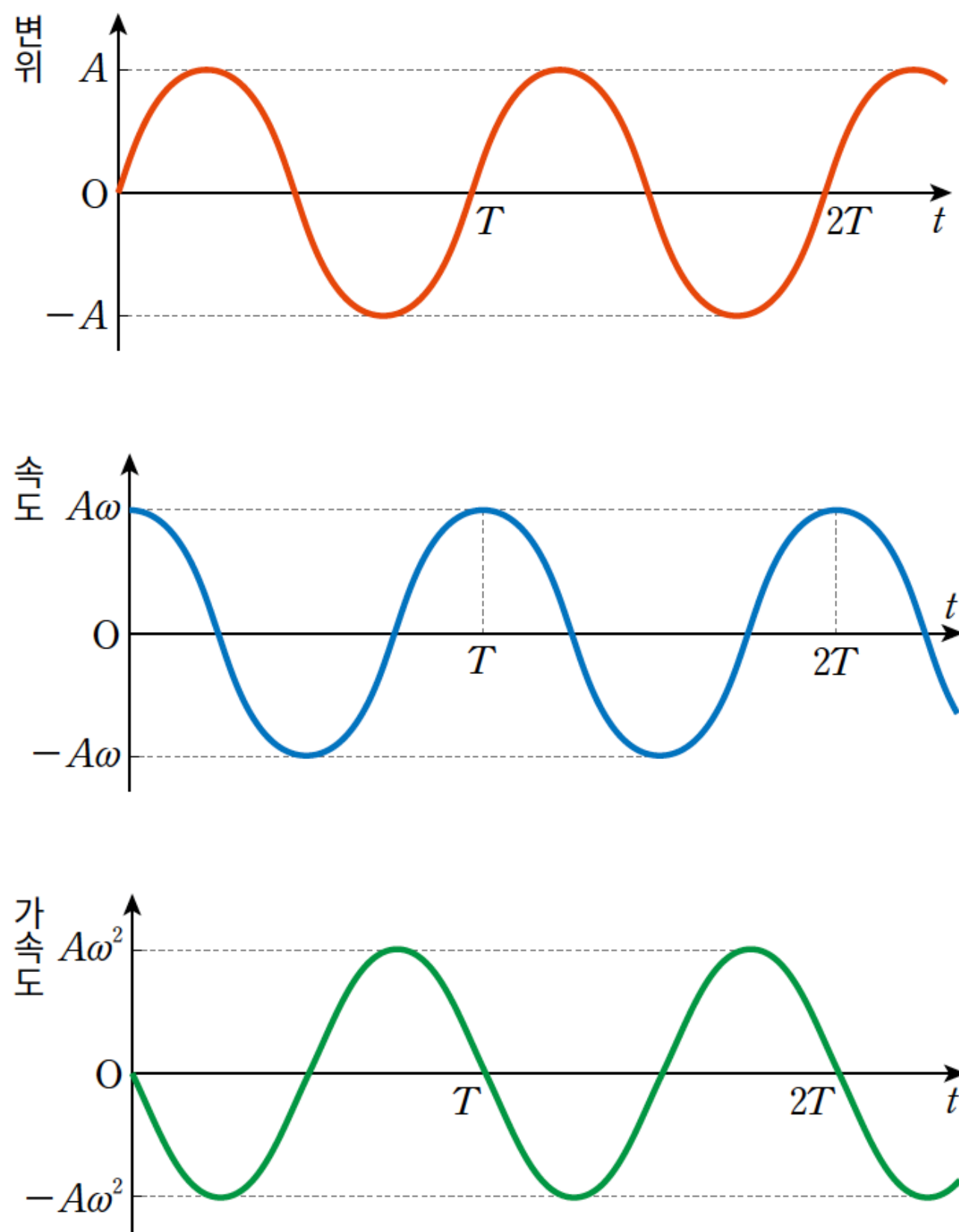
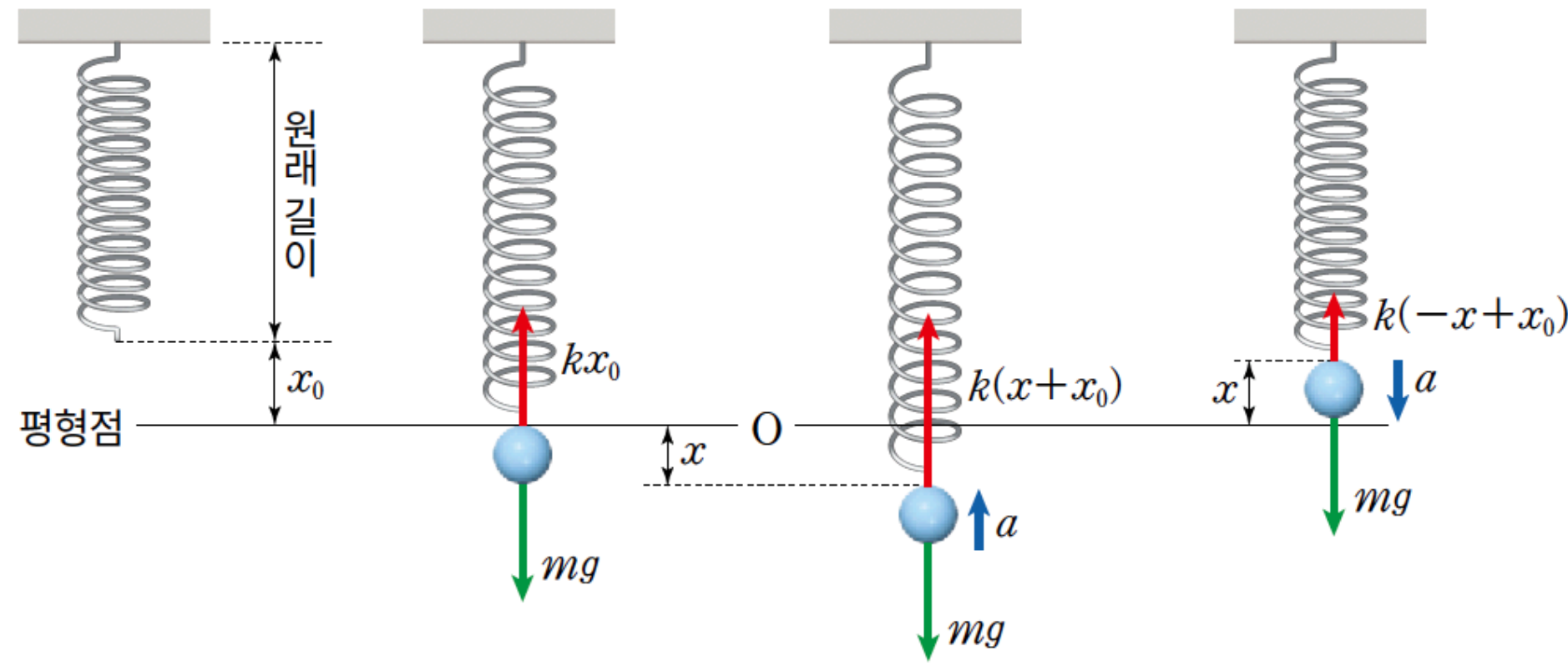


그림 Ⅲ-5 단진동 하는 물체의 시간에 따른 변위, 속도, 가속도

단진동 하는 물체의 가속도 a 와 변위 x 는 $a = -\omega^2 x$ 의 관계를 만족하므로, 뉴턴 운동 법칙을 적용해 ω^2 항을 구하면 단진동 하는 물체의 주기를 구할 수 있다.

그림 III-6과 같이 용수철에 추를 매달아 가만히 놓으면 용수철이 x_0 만큼 늘어나 정지한다. 이때 추에 작용하는 중력 mg 와 탄성력 kx_0 은 평형 상태이며, 이때 추의 위치가 평형점이 된다. 평형점에서 추를 연직 방향으로 x 만큼 더 잡아당겼다가 놓으면 추는 평형점을 중심으로 단진동을 한다.



단진동 하는 용수철 진자의 변위 크기를 x 라고 하면 복원력 F 의 크기는 다음과 같다.

$$F = mg - k(x + x_0) = -kx$$

뉴턴 제2법칙에 따라 $F = -kx = ma$ 이므로, $a = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x$ 이다. 따라서

$\omega^2 = \frac{k}{m}$ 이고 $\omega = \frac{2\pi}{T}$ 에서 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 이므로 용수철 진자의 주기는 다음과 같다.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

즉, 용수철 진자의 주기 T 는 질량 m 이 클수록 크고, 용수철 상수 k 가 클수록 작다.