



역학

물리올림피아드 고급과정

제1장 운동학과 뉴턴 법칙

최근 5회분(90문항)에서 역학은 20문항(22.2%)으로 전자기학 다음가는 비중을 차지한다. 그중 이 장이 다루는 운동학·뉴턴 법칙 영역은 6문항으로, **매 회차 1번과 6번 자리에 거의 고정 배치된다**. 즉 시험지를 펴자마자 만나는 문항이 이 장의 내용이다. 출제 축은 셋으로 좁혀진다 – (i) **등가속도·포물선 운동을 시간이 아니라 ‘기하 조건’으로 푸는 문제**, (ii) **계의 경계를 어디서 자를지 묻는 자유물체도와 뉴턴 3법칙**, (iii) **정지마찰의 부등식이 만드는 임계값(최소·최대)**. 세 축 모두 계산량은 적고 **판단 하나가 답을 가른다**는 것이 이 단원의 성격이다.

학습 목표

- 등가속도 공식 세 개를 “빠진 변수”로 골라 쓰고, 중력장 안 두 물체의 상대운동이 등속임을 이용해 만남 문제를 풀 수 있다.
- 포물선 운동을 꼭짓점 기준 궤적식 $y = H - kx^2$ 로 놓고, 접선·통과 같은 기하 조건을 판별식으로 옮길 수 있다.
- 계의 경계를 정해 내부력을 상쇄시키고, 저울 눈금·수직항력처럼 ‘외부와 주고받는 힘’만 남겨 계산할 수 있다.
- 정지마찰이 부등식 $f_s \leq \mu_s N$ 임을 이용해 힘의 최솟값과 최댓값을 동시에 구할 수 있다.
- 구속조건으로 연결계의 가속도 관계를 세우고, 비관성계에서 관성력을 더해 문제를 단순화할 수 있다.

1.1 등가속도 직선운동과 상대운동

가속도가 일정하면 다음 세 식이 전부다. 초기 위치 x_0 , 초기 속도 v_0 , 가속도 a 에 대해

$$v = v_0 + at, \quad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2, \quad v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

세 식은 독립이 아니다. 어느 변수가 문제에 등장하지 않는지를 먼저 보고 식을 고르는 것이 요령이다.

식	빠진 변수	쓰는 상황
$v = v_0 + at$	변위	속도와 시간만 물을 때
$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	나중 속도	시간에 따른 위치
$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$	시간	시간을 모를 때 (최다 사용)
$\Delta x = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	가속도	평균속도로 잡을 때

그래프로는 v - t 그래프의 기울기가 가속도, 넓이가 변위다. 이 두 줄이 그래프 문항의 전부다.

상대운동. 두 물체 A, B의 상대량은 그냥 빼면 된다. $\vec{r}_{AB} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$ 이고 같은 방식으로 상대속도·상대 가속도가 정의된다. 경시에서 결정적인 것은 다음 한 줄이다.

$$\vec{a}_{AB} = \vec{a}_A - \vec{a}_B = \vec{g} - \vec{g} = 0$$

중력만 받는 두 물체는 서로에 대해 등속 직선운동을 한다. 던지든 떨어뜨리든, 두 물체를 잇는 상대변위는 처음 상대속도 방향으로 일정한 비율로 줄어든다. 그래서 “두 공이 만나는 시각”은

$$t = \frac{\text{처음 두 물체 사이 거리}}{\text{처음 상대속력}}$$

로 포물선 계산 없이 즉시 나온다. 이 장의 2번·3번 문항이 모두 이 한 줄로 열린다.

1.2 포물선 운동 – 두 축의 분리와 기하 조건

수평 방향은 등속, 연직 방향은 등가속도다. 이 둘을 **시간이라는 공통 변수로만** 연결한다.

$$x = v_0 \cos \theta \cdot t, \quad y = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

여기서 자주 쓰는 결과 두 개는

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} \quad (\text{최고점 높이}), \quad R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \quad (\text{수평 사거리, 같은 높이})$$

고급과정에서는 이 공식을 그대로 묻지 않는다. **궤적이 어떤 도형과 접한다. 스친다. 넘는다** 같은 기하 조건을 주고 발사 조건을 역으로 구하게 한다. 그럴 때는 시간 t 를 소거한 **궤적식**이 훨씬 편하다. 특히 최고점을 원점 위에 두는 좌표를 잡으면

$$y = H - kx^2, \quad k = \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta}$$

라는 깔끔한 포물선이 되고, 발사점이 $x = -x_0$ 에 있다면 그 점에서의 기울기가 발사각이므로

$$2kx_0 = \tan \theta, \quad H = kx_0^2$$

두 관계가 따라온다. 미지수 v_0, θ, x_0 중 둘을 알면 나머지가 정해지는 구조다.

기하 조건을 식으로 옮기는 법

- **지나간다** → 그 점의 좌표를 궤적식에 대입한다 (등식 1개).
- **간신히 스친다 · 접한다** → 궤적식을 도형의 방정식에 대입해 만든 2차식의 **판별식** = 0.
- **넘어간다 · 맞힌다** → 부등식으로 두고 경계에서 등호를 취한다 (최소·최대 조건).
- 원 $x^2 + y^2 = R^2$ 과의 접촉은 $u = x^2$ 로 치환하면 u 에 대한 2차식이 되어 계산이 절반으로 준다.

자주 하는 실수

“반원통을 간신히 스쳐 지나간다”를 “반원통의 **꼭대기를 지난다**”로 바꿔 읽는 실수가 가장 많다. 꼭대기를 지나 는 궤적은 그 앞뒤에서 원 안으로 파고든다 – 즉 실제로는 부딪힌다. 스친다는 것은 **접한다**는 뜻이고, 접점은 대 개 꼭대기가 아니라 옆면이다. 이 오독은 보기에 그럴듯한 오답으로 반드시 준비되어 있다.

1.3 자유물체도와 뉴턴 3법칙 – 계의 경계

뉴턴 법칙을 쓰는 절차는 언제나 같다.

1. **계를 정한다.** 어디까지를 “하나의 물체”로 볼지 경계를 긋는다.
2. 경계를 넘어 들어오는 힘(**외력**)만 그린다. 경계 안에서 주고받는 힘(**내부력**)은 그리지 않는다.
3. 좌표축을 잡고 $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ 를 축마다 쓴다.

내부력을 그리지 않아도 되는 근거가 **뉴턴 3법칙**이다. 계 안의 두 부분이 주고받는 힘은 크기가 같고 방향이 반대인 쌍이므로 벡터합에서 정확히 상쇄된다.

$$\sum \vec{F}_{\text{내부}} = \sum_{i < j} (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) = 0$$

이 사실이 시험에서 쓰이는 전형적 형태는 **저울 문제**다. 저울이 읽는 값은 저울이 위에 놓인 것을 떠받치기 위해 내는 수직항력이고, 계가 정지해 있다면

$$N = (\text{계 전체의 무게})$$

이다. 계 안에서 자석이 서로 밀든, 도르래가 걸려 있든, 물체 하나가 공중에 떠 있든 **내부 사정은 눈금을 바꾸지 않는다**. 눈금이 바뀌려면 계 밖에서 힘이 들어오거나 계의 무게중심이 가속해야 한다. 실제로 계의 무게중심이 가속도 $\vec{a}_{\text{cm}}$ 로 움직이면

$$N - Mg = Ma_{\text{cm},y}$$

이므로, 예컨대 계 일부가 아래로 가속하는 동안에는 눈금이 실제로 가벼워진다.

자주 하는 실수

“A가 공중에 떠 있으니 A의 무게는 저울에 실리지 않는다”는 서술은 틀렸다. A를 떠받치는 것은 결국 B의 자기력이고, B는 그 반작용을 아래로 받아 저울로 그대로 전달한다. **떠 있다 $\neq$ 무게가 사라진다**. 무게가 저울에서 빠지려면 A를 붙드는 힘이 계 바깥(예: 천장에 매단 자석)에서 와야 한다.

1.4 마찰력 — 부등식이 만드는 임계값

운동마찰과 정지마찰은 성격이 완전히 다르다.

$$f_k = \mu_k N \quad (\text{등식 — 크기가 정해짐}), \quad f_s \leq \mu_s N \quad (\text{부등식 — 크기가 미지수})$$

운동마찰은 크기가 $\mu_k N$ 으로 고정되고 방향만 **상대운동의 반대로** 정하면 된다. 반면 정지마찰은 “필요한 만큼” 생기는 힘이다. 크기를 미리 $\mu_s N$ 으로 놓으면 안 되고, 평형식에서 f_s 를 미지수로 풀어낸 뒤 마지막에 $|f_s| \leq \mu_s N$ 을 확인해야 한다.

이 부등식이 절댓값을 품고 있다는 점이 고급과정 문항의 핵심이다. $|f_s| \leq \mu_s N$ 은

$$-\mu_s N \leq f_s \leq \mu_s N$$

이므로 조건이 **두 개** 나온다. 그래서 “미끄러지지 않을 조건”을 물으면 답이 대개 $F_{\min} \leq F \leq F_{\max}$ 라는 **구간**으로 나온다. 아래로 미끄러지려는 경향을 막는 것이 하한, 위로 밀려 올라가려는 경향을 막는 것이 상한이다.

경사각 θ 인 면 위에 가만히 놓인 물체가 정지해 있을 조건은 $mg \sin \theta \leq \mu_s mg \cos \theta$, 즉

$$\tan \theta \leq \mu_s$$

이다. 이 한 줄로 “ $F = 0$ 일 때 이미 미끄러지는가”를 즉시 판정할 수 있고, 그것만으로 $F_{\min} = 0$ 인 보기를 지울 수 있는 경우가 많다.

또 하나, 일반적으로 $\mu_s > \mu_k$ 이다. 그래서 물체를 막 움직이기 시작하게 만든 힘을 그대로 유지하면 저항이 줄어들어 **가속이 붙는다**. “움직이기 직전”과 “움직이는 중”을 나누어 묻는 문항은 언제나 이 성질을 노린다.

자주 하는 실수

정지마찰력을 처음부터 $\mu_s N$ 으로 놓고 방정식을 세우면, 그것은 **미끄러지기 직전**이라는 특별한 순간의 식이 된다. 일반적인 정지 상태에서는 f_s 를 미지수로 두고 평형식으로 구한 다음 부등식을 검사하라. 순서를 뒤집으면 최댓값 하나만 얻고 최솟값을 놓친다.

1.5 연결계의 구속조건과 장력

줄과 도르래가 이상적이라면 (질량 없음, 늘어나지 않음, 마찰 없음)

- 줄 전체에서 **장력의 크기가 같다**.
- 줄의 **길이**가 일정하다 → 이것이 가속도 사이의 관계, 곧 **구속조건**을 준다.

구속조건은 좌표를 잡고 줄 길이를 좌표로 써서 미분하면 기계적으로 나온다. 벽에 고정된 도르래에 줄을 걸고 양 끝을 두 물체에 매단 배치라면, 도르래에서 각 물체까지의 거리를 ℓ_1, ℓ_2 라 할 때 $\ell_1 + \ell_2 = \text{일정}$ 이므로

$$\dot{\ell}_1 + \dot{\ell}_2 = 0 \implies \vec{a}_2 = -\vec{a}_1$$

즉 두 물체는 크기가 같고 방향이 반대인 가속도로 움직인다. 한쪽이 도르래에서 멀어지면 다른 쪽은 그만큼 가까워진다. 같은 방향으로 함께 간다고 잘못 놓으면 문제 전체가 어긋난다.

장력은 언제나 **미지수**다. “장력 T 는 얼마인가”를 묻는 문항은 결국 물체마다 뉴턴 2법칙을 따로 쓰고 구속조건으로 가속도를 묶어 연립하는 문제다. N 개 물체면 방정식 N 개, 미지수는 장력 + 가속도 하나 – 항상 풀린다.

연결계 표준 절차

1. 물체마다 자유물체도를 따로 그린다. **장력은 항상 줄이 당기는 쪽(도르래 쪽)으로**.
2. 물체마다 양(陽)의 방향을 따로 정해도 좋다 – 대신 구속조건을 그 정의에 맞게 쓴다.
3. 줄 길이 일정으로 가속도 관계를 세운다. 고정 도르래 양끝이면 크기 같고 **방향 반대**.
4. 마찰이 있으면 접촉면마다 3법칙 쌍(위 물체에 $+f$, 아래 물체에 $-f$)을 빠짐없이 넣는다.
5. 연립해서 a 를 먼저 구하고 T 를 얻는다.

1.6 비관성계와 관성력

가속도 $\vec{A}$ 로 움직이는 기준계에서 관측하면 뉴턴 2법칙이 그대로 성립하지 않는다. 계 안의 모든 물체에 다음 **관성력**을 추가로 그려 넣으면 형태가 복원된다.

$$\vec{F}_{\text{관성}} = -m\vec{A}$$

방향은 **기준계 가속도의 반대**다. 버스가 앞으로 가속하면 승객은 뒤로 밀리는 것처럼 느낀다.

가속하는 썰기 위에 놓인 블록 문제가 이 개념의 표준 형태다. 두 가지 풀이가 있다.

지면계 풀이 미끄러지지 않는다면 썰기와 블록이 **한 덩어리**다. 전체에 대해 $a = F_{\text{외부}}/M_{\text{전체}}$ 를 먼저 구하고, 그 다음 블록 하나만 떼어 $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ 를 쓴다. 이때 블록의 가속도는 이미 아는 값이므로 미지수가 줄어든다.

썰기계 풀이 블록은 **정지**해 있다. 중력 mg 와 관성력 ma 를 더한 “겉보기 중력”을 만들어 평형식 $\sum \vec{F} = 0$ 을 쓴다. 경사면 방향·법선 방향으로 분해하면 f 와 N 이 바로 나온다.

어느 쪽을 택하든 결과는 같지만, **마찰 조건을 따지는 문제에서는 썰기계 풀이가 압도적으로 빠르다**. 블록이 정지 상태이므로 평형식 두 개만 세우면 f 와 N 이 동시에 나오고, 곧바로 $|f| \leq \mu_s N$ 에 넣을 수 있기 때문이다.

자주 하는 실수

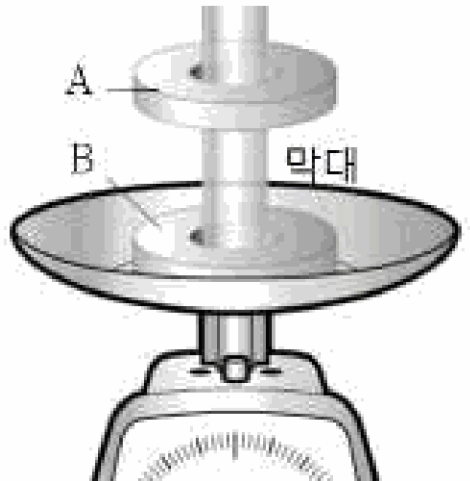
관성력의 방향을 가속도와 같은 쪽으로 그리는 실수, 그리고 **지면계에서 풀면서 관성력까지 함께 그리는** 이중 계산이 흔하다. 관성력은 비관성계에서만 등장한다. 두 풀이를 섞지 마라. 또 관성력은 반작용 짝이 없는 힘이므로, 3법칙 쌍을 찾으려 하지 말 것.

기출 문항

제1장 운동학과 뉴턴 법칙 수록 문항 6개. 해설은 다음 절에 있다.

문제 1 2024년 제1회 · 1번 · 자기부상 고리자석과 저울 눈금

저울로 측정한 무게가 각각 10 kg 중(킬로그램힘)인 두 고리 자석 A, B를 같은 극끼리 마주 보도록 막대에 끼워 A가 공중에 떠 있도록 하였다. 이들 고리 자석을 저울 위에 올려놓으면 저울의 눈금은 얼마인가? (단, 막대의 질량은 무시한다)



- ① 0 kg중
- ② 10 kg중
- ③ 15 kg중
- ④ 20 kg중
- ⑤ 25 kg중

문제 2

2024년 제2회 · 6번 · 낙하-연직투상 두 공의 충돌 위치

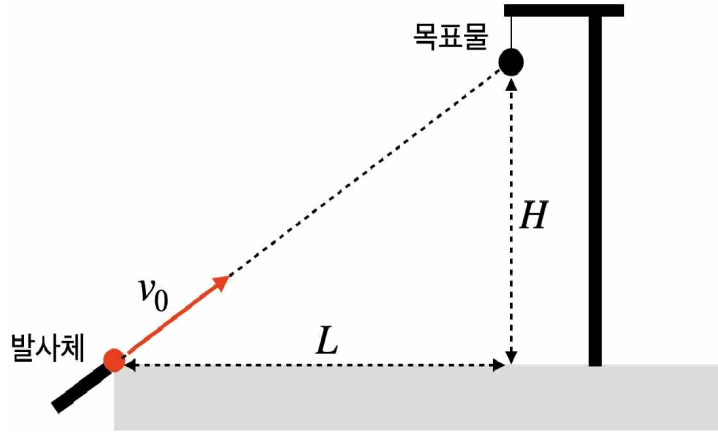
높이 h 인 곳에서 공 A를 정지 상태에서 떨어뜨리고, 동시에 공 B는 지표면에서 연직으로 던져 올려 높이 h_1 인 곳에서 두 공이 충돌하였다. 충돌 순간 공 A와 B의 운동 방향은 서로 반대이며, 공 A의 속력은 공 B의 속력의 3배였다. h_1 은?

- ① $\frac{3h}{5}$ ② $\frac{5h}{8}$ ③ $\frac{2h}{3}$
④ $\frac{3h}{4}$ ⑤ $\frac{4h}{5}$

문제 3

2025년 제2회 · 1번 · 포물선운동 원숭이사냥꾼 기하조건

그림과 같이 거리 L , 높이 H 에 목표물이 놓여져 있다. 총알을 발사할 때 목표물이 위치한 지점을 정확히 조준하여, 총알은 그 지점을 향한 직선 방향으로 지면에서 속력 v_0 로 발사된다. 총알이 발사되는 바로 그 순간 목표물에 매달린 줄이 끊어져 목표물은 즉시 자유낙하를 시작한다. 목표물이 지면에 떨어지기 전에 총알이 목표물을 맞추기 위한 총알의 최소 속력은 얼마인가? (단, 공기의 저항, 총알과 목표물의 크기는 모두 무시한다. 중력가속도는 g 이다.)



〈 보기 〉

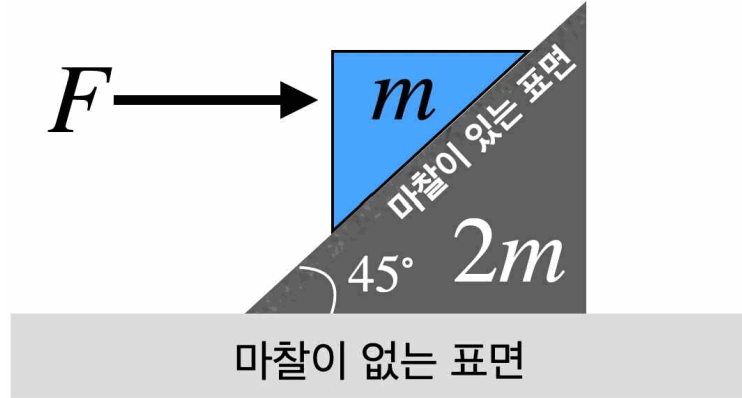
- ㄱ. $\sqrt{\frac{gL}{2} \left(1 + \frac{H^2}{L^2}\right)}$
- ㄴ. $\sqrt{\frac{gH}{2} \left(1 + \frac{L^2}{H^2}\right)}$
- ㄷ. $\sqrt{\frac{gL^2}{2H} \left(1 + \frac{L^2}{H^2}\right)}$
- ㄹ. $\sqrt{\frac{gH^2}{2L} \left(1 + \frac{H^2}{L^2}\right)}$
- ㅁ. $\sqrt{\frac{gL}{2}}$

- ① ㄱ
- ② ㄴ
- ③ ㄷ
- ④ ㄹ
- ⑤ ㅁ

문제 4

2025년 제2회 · 6번 · 가속계 위 경사면 블록의 정지마찰 한계

그림과 같이, 질량 $2m$ 인 물체가 마찰이 없는 수평면 위에 놓여 있고, 물체의 경사면 위 (경사각도 $\theta = 45^\circ$)에는 질량 m 의 블록이 놓여있다. 블록과 경사면 사이에는 마찰력이 존재하며, 정지 마찰 계수는 $\mu_s = \frac{1}{2}$ 이다. 질량 m 의 물체에 수평 (오른쪽) 방향의 힘 F 를 가했을 때, 블록이 경사면에 대해 상대적으로 미끄러지지 않도록 하기 위한 힘 F 의 최솟값 $F_{\min}$ 과 최댓값 $F_{\max}$ 를 구하시오. (단, 중력가속도는 g 이며, 블록은 처음 정지상태에서 출발한다.)



< 보기 >

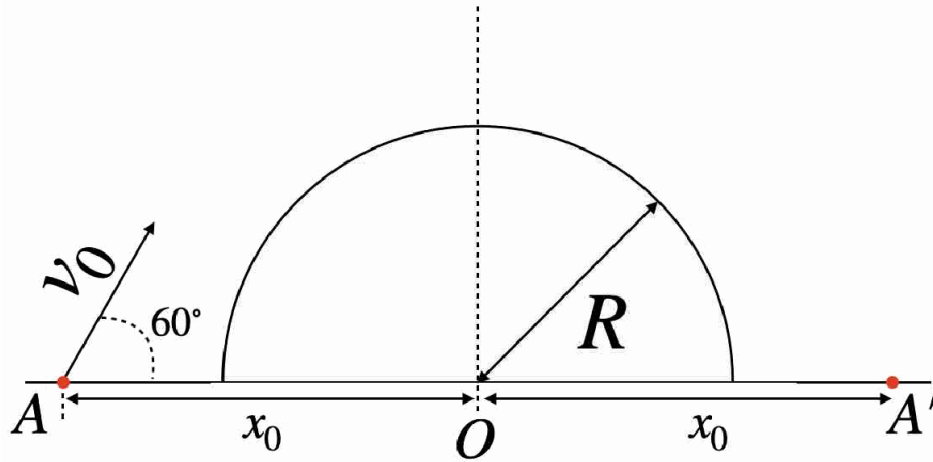
- ㄱ. $F_{\min} = 0, F_{\max} = 3mg$
- ㄴ. $F_{\min} = \frac{2mg}{9}, F_{\max} = 2mg$
- ㄷ. $F_{\min} = \frac{mg}{3}, F_{\max} = 3mg$
- ㄹ. $F_{\min} = \frac{mg}{2}, F_{\max} = \frac{9mg}{2}$
- ㅁ. $F_{\min} = mg, F_{\max} = 4mg$

- ① ㄱ
- ② ㄴ
- ③ ㄷ
- ④ ㄹ
- ⑤ ㅁ

문제 5

2026년 제1회 · 1번 · 포물선운동 반원통 접선 기하조건

그림과 같이 수평면에 반지름이 R 인 반원통의 중심이 원점 O 에 오도록 고정되어 있다. 수평면 위의 한 점 A 에서 수평면과의 60° 의 각도로 물체를 발사하였다. 물체의 발사속력이 물체가 포물선 운동을 하여 반원통의 표면을 간신히 스쳐지나 반대편 대칭점인 A' 에 도착하기 위한 속력 v_0 일 때, 발사 지점 A 에서 원점 O 까지의 수평 거리 x_0 를 구하시오. (단, 중력가속도는 g 이고, 물체의 크기 및 공기 저항은 무시한다.)



< 보기 >

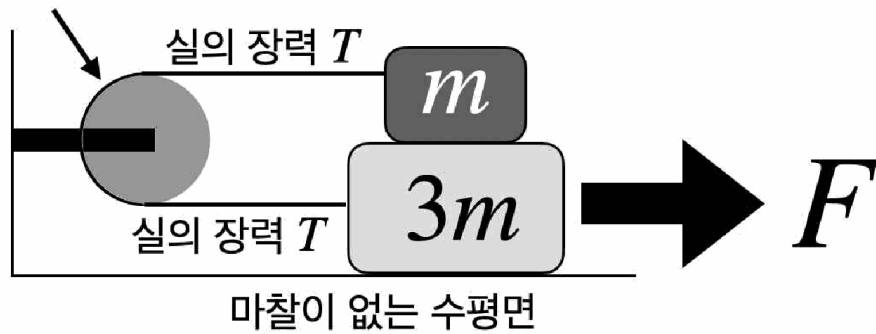
- ㄱ. $\frac{\sqrt{3}}{3}R$ ㄴ. $\frac{\sqrt{6}}{2}R$ ㄷ. $2R$ ㄹ. $\frac{2\sqrt{3}}{3}R$ ㅁ. $4R$

- ① ㄱ
② ㄴ
③ ㄷ
④ ㄹ
⑤ ㅁ

문제 6 2026년 제1회 · 6번 · 두 물체 마찰과 도르래 장력 비

그림과 같이 마찰이 없는 수평면에 질량 $3m$ 인 물체가 놓여 있고 그 물체 위에 질량 m 인 물체가 놓여 있다. 이 물체들은 벽에 고정되어 있는 이상적인 도르래를 통해 실로 연결되어 있어서 각 실의 장력의 크기는 T 로 서로 같다. 두 물체 사이에는 마찰력이 존재하며, 정지 마찰 계수 μ_s 는 운동 마찰 계수 μ_k 의 3배이다. 질량 $3m$ 인 물체에 힘 F 를 0부터 물체가 움직이기 위한 최소의 힘 F_C 까지 서서히 증가시키다가, 물체가 움직이기 시작하면 그 순간부터 힘의 크기를 $F = F_C$ 로 일정하게 유지한다. 움직이기 직전의 장력은 T_{crit} , 움직이는 도중에 실에 걸리는 장력은 T_{moving} 이다. <보기>에서 $\frac{T_{\text{moving}}}{T_{\text{crit}}}$ 로 맞는 것은? (단 중력 가속도는 g 이며, 줄은 이상적인 줄로, 줄의 질량은 무시하고 줄은 늘어나거나 줄어들지 않는다. 각 실에서 장력은 수평방향으로 작용한다.)

이상적인 도르래



< 보기 >

ㄱ. $\frac{1}{3}$

ㄴ. $\frac{4}{9}$

ㄷ. $\frac{2}{3}$

ㄹ. 1

ㅁ. 물체가 움직이면 속력이 증가하게 되어 T_{moving} 이 시간에 따라 변화하므로 비율은 일정하지 않다.

- ① ㄱ
- ② ㄴ
- ③ ㄷ
- ④ ㄹ
- ⑤ ㅁ

해설

문제 1 2024년 제1회 · 1번 · 계의 경계와 내부력 상쇄

정답 ④

풀이

계산이 한 줄도 없는 문항이다. 답은 **계를 어디서 자르느냐**로 결정된다.

① **계를 잡는다.** 저울 위에 올려놓은 것 전부 – 자석 A, 자석 B, 막대 – 를 하나의 계로 묶는다.

② **외력만 그린다.** 이 계가 경계 바깥과 주고받는 힘은 두 가지뿐이다.

• 지구가 아래로 당기는 중력: $10 + 10 = 20 \text{ kg중}$ (막대는 질량을 무시)

• 저울이 위로 떠받치는 수직항력: N

A와 B 사이의 자기력은 **계 안에서 주고받는 내부력**이다. 뉴턴 3법칙에 따라 “B가 A를 위로 미는 힘”과 “A가 B를 아래로 미는 힘”은 크기가 같고 방향이 반대인 쌍이므로 계 전체의 벡터합에서 정확히 상쇄된다. 자유물체도에 아예 그리지 않는다.

③ **계가 정지해 있다.** 따라서

$$N - 20 \text{ kg중} = 0 \implies N = 20 \text{ kg중}$$

→ ④

부분 계로 확인. 의심스러우면 잘라 보면 된다. A가 떠 있으려면 B가 A를 위로 미는 자기력이 정확히 10 kg중 이어야 한다. 그 반작용으로 A는 B를 아래로 10 kg중 만큼 누른다. 그러면 B가 받는 아래 방향 힘은 자기 무게 10 과 A가 누르는 10 을 합쳐 20 kg중 이고, B가 정지하려면 막대(그리고 저울판)가 20 kg중 으로 떠받쳐야 한다. 같은 답이다.

자주 하는 실수

“A가 공중에 떠 있으니 저울에는 B의 10 kg중 만 실린다”고 답하면 ㉠을 고르게 된다. 매년 형태를 바꿔 나오는 대표 오답이다. A를 떠받치는 힘이 **계 안에서** 나왔다면 그 반작용도 계 안에 남으므로 눈금은 변하지 않는다. 눈금이 실제로 줄어들려면 A를 붙드는 힘이 계 밖(천장에 매단 자석, 손 등)에서 와야 한다. 반대로 계의 일부가 위·아래로 **가속**하는 중이라면 $N - Mg = Ma_{\text{cm}}$ 이므로 눈금이 달라진다. “정지 상태”라는 단서를 반드시 확인하라.

이 유형의 표준 절차

- 저울·용수철저울이 나오면 먼저 **계의 경계**를 종이에 실제로 그린다.
- 경계를 넘는 화살표(중력, 수직항력, 바깥에서 매단 줄)만 남기고 안쪽 화살표는 전부 지운다.
- 계가 정지 또는 등속이면 눈금 = 계 전체의 무게. 가속 중이면 $N = M(g + a_{\text{cm},y})$.
- 답이 의심스러우면 계를 더 잘게 쪼개 3법칙 쌍을 직접 확인한다 – 반드시 같은 답이 나온다.

문제 2 2024년 제2회 · 6번 · 상대운동으로 만나는 시각 구하기

정답 ②

풀이

정면으로 두 포물선을 연립해도 풀리지만, **상대운동**을 쓰면 계산이 절반으로 준다.

① **만나는 시각.** 두 공 모두 중력만 받으므로 상대가속도가 0이다.

$$\vec{a}_{BA} = \vec{a}_B - \vec{a}_A = (-g) - (-g) = 0$$

즉 B는 A에 대해 처음 상대속력 v_0 로 **등속** 접근한다. 처음 두 공 사이 거리가 h 이므로

$$t = \frac{h}{v_0} \implies v_0 t = h$$

(포물선 계산 없이 얻어지는 이 관계가 이 문항의 핵심이다.)

② **속력 조건.** 충돌 순간 A는 아래로 $v_A = gt$, B는 “운동 방향이 서로 반대”라 했으므로 아직 **상승 중**이고 $v_B = v_0 - gt > 0$ 이다. $v_A = 3v_B$ 에서

$$gt = 3(v_0 - gt) \implies 4gt = 3v_0 \implies gt = \frac{3}{4}v_0$$

③ **두 관계를 합친다.** 양변에 t 를 곱하고 $v_0 t = h$ 를 대입하면

$$gt^2 = \frac{3}{4}v_0 t = \frac{3}{4}h$$

④ **충돌 높이.** A의 위치로 계산하는 편이 짧다(초기 속도가 0이므로).

$$h_1 = h - \frac{1}{2}gt^2 = h - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}h = h - \frac{3}{8}h = \frac{5}{8}h$$

→ ②

검산: $v_0^2 = 4gh/3$, $t = \sqrt{3h/(4g)}$ 이고, B의 위치로 계산해도 $v_0 t - 1/2gt^2 = h - 3h/8 = 5h/8$ 로 같다.

자주 하는 실수

“운동 방향이 서로 반대”라는 단서를 장식으로 넘기면 안 된다. 이것은 **B가 아직 최고점에 도달하지 않았다**는 조건이다. 만약 B가 이미 하강 중이라면 두 공의 운동 방향이 같아지고, $v_A = 3v_B$ 를 $gt = 3(gt - v_0)$ 로 세워야 해서 전혀 다른 답이 나온다. 또 하나 - 충돌 조건에서 두 공의 **높이가 같다**는 식을 세울 때 양쪽의 $-1/2gt^2$ 항이 그대로 소거된다는 사실을 놓치고 2차방정식을 붙드는 학생이 많다. 그 소거가 바로 “상대가속도 0”이다.

이 유형의 표준 절차

1. 두 물체가 모두 중력만 받으면 **상대가속도는 0**. 상대운동은 등속 직선운동이다.
2. 만나는 시각은 $t = \text{처음 거리} / \text{처음 상대속력}$ 로 곧바로 나온다.
3. 속도 조건은 각자의 $v = v_0 + at$ 로 따로 쓴다. 방향(부호)을 문제의 단서로 확정할 것.
4. 위치는 초기 속도가 0인 쪽을 골라 계산하면 항이 하나 줄어든다.

문제 3 2025년 제2회 · 1번 · 원숭이-사냥꾼: 남은 조건은 시간뿐

정답 ②

풀이

이른바 **원숭이-사냥꾼 문제**다. 결론부터 말하면 “맞히느냐”는 조준의 문제가 아니라 **시간의 문제**다.

① **조준선을 따라 쏘면 반드시 맞는다.** 총알과 목표물 모두 중력만 받으므로 상대가속도가 0이다. 중력이 없다고 가정한 직선 궤도에서 총알은 시각 t 에 조준선 위 거리 $v_0 t$ 지점에 있고, 실제로는 거기서 $1/2gt^2$ 만큼 아래에 있다. 목표물도 처음 위치에서 정확히 $1/2gt^2$ 만큼 내려온다. **두 낙하량이 같으므로** 총알은 조준선이 목표물과 만나는 그 순간 목표물과 같은 자리에 있다. 발사 속력이 얼마든 상관없다.

② **그러므로 유일한 제약은 “땅에 닿기 전에 도달하는가”다.**

목표물이 높이 H 를 자유낙하하는 데 걸리는 시간은

$$t_{\text{낙하}} = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

총알이 조준점(처음 목표물 위치)까지 가는 데 걸리는 시간은, 상대속도가 조준선 방향으로 크기 v_0 의 등속이므로 **조준선의 길이**를 v_0 로 나눈 것이다.

$$t_{\text{도달}} = \frac{\sqrt{L^2 + H^2}}{v_0}$$

③ **조건과 최소 속력.** $t_{\text{도달}} \leq t_{\text{낙하}}$ 이어야 하므로

$$\frac{\sqrt{L^2 + H^2}}{v_0} \leq \sqrt{\frac{2H}{g}} \Rightarrow v_0 \geq \sqrt{\frac{g(L^2 + H^2)}{2H}}$$

이 꼴을 보기와 맞추기 위해 H 로 묶어낸다.

$$\frac{g(L^2 + H^2)}{2H} = \frac{gH}{2} \left(1 + \frac{L^2}{H^2} \right)$$

즉 최소 속력은 $\sqrt{(gL)/2 \cdot (1 + L^2/H^2)}$ 이고, 이는 보기 **ㄴ** 이다. → ②

나머지 보기 판정.

ㄱ. $\sqrt{(gL)/2 \cdot (1 + H^2/L^2)} = \sqrt{g(L^2 + H^2)/(2L)}$ – 분모가 $2H$ 가 아니라 $2L$ 이다. L 과 H 의 역할을 바꿔 쓴 오답. → 거짓

ㄷ, ㄹ. 차원부터 맞지 않는다. ㄷ은 $gL^2/(2H) \cdot (L^2/H^2)$ 항이 있어 길이 차수가 어긋나고, ㄹ도 마찬가지다. → 거짓

ㅁ. $\sqrt{gL/2}$ 에는 H 가 아예 없다. 목표물이 아무리 낮아도(=낙하 시간이 아무리 짧아도) 같은 속력이면 된다는 뜻이라 물리적으로 불가능하다. → 거짓

자주 하는 실수

최소 속력을 “목표물이 있는 곳까지 **포물선**으로 날아가는 최소 속력”으로 잡고 $R = v_0^2 \sin 2\theta / g$ 를 꺼내 드는 것이 대표적 오답 경로다. 이 문제에서 조준각은 $\tan \theta = H/L$ 로 이미 고정되어 있고, 명중 여부는 각도와 무관하다. 따지는 것은 오직 **제한 시간**이다. 또 하나 $t_{\text{낙하}}$ 를 총알의 비행시간으로 착각해 $\sqrt{2H/g}$ 를 총알 쪽에 쓰면 안 된다. $\sqrt{2H/g}$ 는 목표물이 땅에 닿는 시각이고, 총알은 그 전에 조준선 위 목표물 자리에 도착해야 한다.

문제 4 2025년 제2회 · 6번 · 가속하는 썰기 위 블록의 정지마찰 구간

정답 ④

풀이

경사각 45° , $\mu_s = 1/2$, 바닥은 마찰이 없다. F 는 블록 m 에 수평으로 작용한다.

① **미끄러지지 않는 동안 전체는 한 덩어리다.** 수평 방향 외력은 F 뿐이고 총질량은 $3m$ 이므로

$$a = \frac{F}{3m} \quad (+x \text{ 방향})$$

② **썰기와 함께 움직이는 비관성계에서 블록을 본다.** 블록에는 관성력 ma 가 $-x$ 방향으로 더해진다. 그러면 블록에 작용하는 “경사면을 제외한” 힘의 합은

$$\vec{F}_{\text{유효}} = (F - ma)\hat{x} - mg\hat{y} = \frac{2}{3}F\hat{x} - mg\hat{y}$$

이다. 즉 가해진 F 중 실제로 블록을 경사면에 대해 밀어붙이는 몫은 $2F/3$ 이다. (나머지 $F/3$ 은 블록 자신을 가속시키는 데 쓰인다.)

③ **경사면 좌표로 분해한다.** 경사면은 오른쪽 위로 45° 이므로 빗면 방향 단위벡터 $\hat{s} = (1, 1)/\sqrt{2}$ (위쪽), 법선 $\hat{n} = (-1, 1)/\sqrt{2}$ (블록 쪽)이다. 블록은 썰기계에서 정지해 있으므로 평형이다.

$$N = -\vec{F}_{\text{유효}} \cdot \hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{3}F + mg \right), \quad f = -\vec{F}_{\text{유효}} \cdot \hat{s} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(mg - \frac{2}{3}F \right)$$

여기서 $f > 0$ 은 마찰이 **빗면 위쪽**으로 작용함(블록이 미끄러져 내려가려 함)을 뜻하고, $f < 0$ 이면 반대로 블록이 빗면을 타고 올라가려 한다는 뜻이다.

④ **정지마찰 조건 $|f| \leq \mu_s N$ 을 건다.** 양변에 공통인 $1/\sqrt{2}$ 가 약분되고 $\mu_s = 1/2$ 이므로

$$\left| mg - \frac{2}{3}F \right| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}F + mg \right) = \frac{F}{3} + \frac{mg}{2}$$

절댓값이므로 조건이 두 개 나온다.

• 아래로 미끄러지려는 쪽 ($mg \geq 2F/3$):

$$mg - \frac{2}{3}F \leq \frac{F}{3} + \frac{mg}{2} \implies \frac{mg}{2} \leq F$$

• 위로 밀려 올라가려는 쪽 ($mg < 2F/3$):

$$\frac{2}{3}F - mg \leq \frac{F}{3} + \frac{mg}{2} \implies \frac{F}{3} \leq \frac{3mg}{2} \implies F \leq \frac{9mg}{2}$$

$$F_{\min} = \frac{mg}{2}, \quad F_{\max} = \frac{9mg}{2}$$

보기 ㄹ 과 일치한다. $\rightarrow$ ④

보기 소거로도 빠르게 갈 수 있다. $F = 0$ 이면 관성력도 0이므로 단순한 경사면 문제가 되고, 정지 조건은 $\tan \theta \leq \mu_s$ 즉 $\tan 45^\circ = 1 \leq 1/2$ 이다. 성립하지 않는다. 따라서 $F = 0$ 에서는 반드시 미끄러진다 $\implies F_{\min} \neq 0$ 이므로 ㄱ 즉시 탈락. $F_{\min} = mg/2$ 하나만 확인하면 ㄹ 이 남는다.

자주 하는 실수

가장 많은 실수는 F 를 그대로 블록을 밀어붙이는 힘으로 쓰는 것이다. 블록도 함께 가속하므로 경사면에 대해 유효하게 작용하는 몫은 $F - ma = 2F/3$ 이다. F 를 그대로 넣으면 $F_{\max} = 3mg$ (보기 ㄷ)라는 그럴듯한 오답이 나온다. 두 번째 실수는 **부등식의 한쪽만 푸는 것이다.** $f_s \leq \mu_s N$ 은 절댓값 부등식이므로 조건이 두 개 나오고, 문제가 최솟값과 최댓값을 둘 다 물었다는 사실 자체가 힌트다.

문제 5 2026년 제1회 · 1번 · 포물선과 원의 접선 조건

정답 ②

풀이

발사점 A , 도착점 A' 가 원점 O 에 대해 대칭이므로 **포물선의 꼭짓점은 O 바로 위에 있다.** 이 대칭성을 좌표에 그대로 반영하는 것이 출발점이다.

① **꼭짓점 기준 궤적식.** O 를 원점으로, 궤적을

$$y = H - kx^2, \quad k = \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 60^\circ}$$

로 쓴다. 발사점은 $x = -x_0$ 이고 거기서 $y = 0$ 이므로 $H = kx_0^2$. 또 그 점에서 궤적의 기울기가 발사 각이므로

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=-x_0} = 2kx_0 = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \implies k = \frac{\sqrt{3}}{2x_0}, \quad H = kx_0^2 = \frac{\sqrt{3}x_0}{2}$$

v_0 는 소거되었다. 이제 미지수는 x_0 하나뿐이다.

② “간신히 스쳐 지난다” = 접한다. 반원통의 단면은 $x^2 + y^2 = R^2$ 이다. 궤적식을 대입하고 $u = x^2$ 로 치환하면

$$u + (H - ku)^2 = R^2 \implies k^2 u^2 + (1 - 2kH)u + (H^2 - R^2) = 0$$

접한다는 것은 이 2차식이 **중근**을 갖는다는 뜻이다.

③ **판별식 = 0**. 먼저 $kH = k^2 x_0^2 = 3/4$ 이므로 $1 - 2kH = -1/2$ 이고, $k^2 = 3/(4x_0^2)$, $H^2 = 3x_0^2/4$ 이다.

$$(1 - 2kH)^2 - 4k^2(H^2 - R^2) = 0$$

$$\frac{1}{4} - 4 \cdot \frac{3}{4x_0^2} \left(\frac{3}{4}x_0^2 - R^2 \right) = 0$$

$$\frac{1}{4} - \frac{9}{4} + \frac{3R^2}{x_0^2} = 0 \implies \frac{3R^2}{x_0^2} = 2 \implies x_0^2 = \frac{3}{2}R^2$$

$$x_0 = \sqrt{\frac{3}{2}}R = \frac{\sqrt{6}}{2}R$$

보기 ㄴ 이다. → ②

접점 확인. 중근은 $u = -(1 - 2kH)/(2k^2) = (1/2)/(2k^2) = x_0^2/3 = R^2/2$ 이므로 $x = \pm R/\sqrt{2}$, $y = R/\sqrt{2}$. 즉 궤적은 반원통의 꼭대기가 아니라 45° 와 135° 두 지점에서 동시에 접한다. 대칭이므로 당연한 결과다.

자주 하는 실수

“간신히 스쳐 지난다”를 꼭대기를 지난다로 읽으면 $H = R$, 즉 $\sqrt{3}x_0/2 = R$ 에서 $x_0 = 2R/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}R/3$ 이 나온다. 이것이 보기 ㄴ 의 정체이며, 출제자가 준비해 둔 함정이다. 실제로 그 궤적을 그려 보면 원점에서의 최단 거리가 약 $0.943R$ 로 **원 안을 파고든다** – 스치는 것이 아니라 부딪힌다. 곡선이 곡선에 “스친다”는 조건은 언제나 **접한다 = 판별식 0** 으로 번역해야 한다.

문제 6 2026년 제1회 · 6번 · 구속조건과 정지↔운동 마찰의 전환

정답 ③

풀이

벽에 고정된 도르래에 줄을 걸어 한쪽 끝은 위 물체 m 에, 다른 쪽 끝은 아래 물체 $3m$ 에 매었다. 바닥은 마찰이 없고, 두 물체 사이에만 마찰이 있다. 접촉면의 수직항력은 $N = mg$ 이다 (위 물체는 연직 방향으로 가속하지 않고, 장력은 수평이다).

① **구속조건이 이 문항의 관문이다.** 도르래가 고정되어 있고 줄 길이가 일정하므로, $3m$ 이 오른쪽으로 d 만큼 가면 도르래- $3m$ 구간이 d 만큼 길어지고 그만큼 도르래- m 구간이 짧아진다. 즉 m 은 **왼쪽**으로 d 간다.

$$a_m = -a_{3m} \quad (\text{크기 같고 방향 반대})$$

또 장력은 두 줄 모두 도르래 쪽, 곧 **왼쪽**으로 당긴다.

② **움직이기 직전 (정지, $a = 0$)**. 정지마찰력을 f 라 하자. m 은 장력에 이끌려 왼쪽으로 가려 하므로 마찰은 m 에 오른쪽으로 작용한다.

- m : $f - T = 0 \implies f = T$
- $3m$: $F - T - f = 0 \implies F = 2T$ (f 의 반작용이 $3m$ 에 왼쪽으로 작용한다 – 이것을 빠뜨리면 안 된다.)

임계점에서 $f = \mu_s mg$ 이므로

$$T_{\text{crit}} = \mu_s mg = 3\mu_k mg, \quad F_C = 2T_{\text{crit}} = 6\mu_k mg$$

③ **움직이는 중 ($F = F_C$ 유지)**. 이제 마찰은 운동마찰 $\mu_k mg$ 로 **줄어든다**. m 은 왼쪽, $3m$ 은 오른쪽으로 움직이므로 m 의 $3m$ 에 대한 상대운동은 왼쪽, 따라서 m 이 받는 운동마찰은 여전히 오른쪽이다. 각 물체의 가속도 크기를 a 로 두면

- m (왼쪽을 양으로): $T - \mu_k mg = ma$
- $3m$ (오른쪽을 양으로): $F_C - T - \mu_k mg = 3ma$

두 식을 더하면 T 가 소거된다.

$$F_C - 2\mu_k mg = 4ma \implies 6\mu_k mg - 2\mu_k mg = 4ma \implies a = \mu_k g$$

$$T_{\text{moving}} = ma + \mu_k mg = \mu_k mg + \mu_k mg = 2\mu_k mg$$

④ **비.**

$$\frac{T_{\text{moving}}}{T_{\text{crit}}} = \frac{2\mu_k mg}{3\mu_k mg} = \frac{2}{3}$$

보기 $\square$ 이다. $\rightarrow$ ③

□ 의 판정. “움직이면 속력이 커지므로 T_{moving} 이 시간에 따라 변한다”는 서술은 거짓이다. F_C 는 일정하게 유지되고 운동마찰 $\mu_k mg$ 도 **속력과 무관하게** 일정하므로 가속도 $a = \mu_k g$ 가 일정하고, 따라서 장력도 $2\mu_k mg$ 로 일정하다. 속력이 커진다는 것과 힘이 변한다는 것은 별개다. $\rightarrow$ 거짓

자주 하는 실수

세 곳에서 갈린다. **첫째**, 고정 도르래 양끝에 매인 두 물체가 **반대 방향**으로 움직인다는 구속조건. 같은 방향으로 함께 간다고 놓으면 T 가 소거되지 않고 답이 나오지 않는다. **둘째**, 접촉면 마찰의 3법칙 쌍. m 이 마찰 f 를 오른쪽으로 받으면 $3m$ 은 f 를 왼쪽으로 받는다. 이 항을 빠뜨리면 $F_C = T$ 가 되어 비가 달라진다. **셋째**, 임계점을 지나는 순간 마찰계수가 μ_s 에서 μ_k 로 **떨어진다**는 사실. $\mu_s = 3\mu_k$ 라는 단서가 바로 그 낙차를 주기 위해 있다. 이 때문에 힘이 남아 계가 가속한다.

이 장의 요약

1. **계의 경계** – 저울 눈금은 계 전체의 무게다. 내부의 자기력·마찰력·장력은 3법칙 쌍으로 상쇄되어 눈금을 바꾸지 못한다. “떠 있다”가 “무게가 사라진다”는 뜻은 아니다.

2. **상대운동** – 중력만 받는 두 물체의 상대가속도는 0이다. 만나는 시각은 $t = \text{처음 거리} / \text{처음 상대속력}$ 로 즉시 나오고, 원숭이-사냥꾼 문제는 “맞히느냐”가 아니라 “제한 시간 안에 도달하느냐”의 문제로 바뀐다.
3. **기하 조건** – 포물선은 꼭짓점 기준 $y = H - kx^2$ 로 쓰고, $2kx_0 = \tan \theta$, $H = kx_0^2$ 로 미지수를 하나로 줄인다. “스친다”는 언제나 **판별식** = 0. 꼭대기를 지난다는 뜻이 아니다.
4. **정지마찰은 부등식** – $|f_s| \leq \mu_s N$ 은 조건을 **두 개** 넣는다. 최솟값과 최댓값을 함께 묻는 문항은 예외 없이 이 구조다. $F = 0$ 에서 $\tan \theta \leq \mu_s$ 를 확인하면 보기 하나가 즉시 지워진다.
5. **구속조건과 마찰계수의 낙차** – 고정 도르래 양끝의 두 물체는 크기 같고 방향 반대인 가속도를 갖는다. 임계점을 넘는 순간 $\mu_s \rightarrow \mu_k$ 로 저항이 줄어 계가 가속하고, 운동마찰은 속력과 무관하므로 가속도와 장력은 그 뒤로 일정하다.

제2장 일·에너지·운동량

최근 5회분(90문항)에서 역학은 20문항(22.2%)으로 전자기학에 이어 두 번째로 비중이 크며, 그중 이 장이 다루는 일·에너지·운동량은 4문항이다. 출제 축은 셋으로 좁혀진다 – (i) 일률 $P = Fv$ 와 속도에 비례하는 저항, 그리고 종단속도, (ii) 운동량 보존과 에너지 보존을 동시에 세워 미지수를 소거하는 2물체 문제, (iii) 충돌 뒤에 단진동·구름운동이 이어지는 복합 상황. 세 축 모두 “무엇이 보존되고 무엇이 보존되지 않는가”를 먼저 결정하는 것이 승부처다. 공식을 몰라서 틀리는 문항은 이 장에 거의 없고, 보존량을 잘못 고르거나 기준틀을 헛갈려서 틀린다.

학습 목표

- 일·운동에너지 정리와 $P = Fv$ 를 써서 일정 출력 가속의 $v(t)$ 와 속도의존 저항의 종단속도를 구할 수 있다.
- 충돌에서 운동량 보존이 항상 성립하고 운동에너지 보존은 탄성일 때만 성립함을 구분해 적용할 수 있다.
- 질량중심계와 환산질량 μ 를 써서 “최대 압축·최대 변형” 유형을 한 줄로 처리할 수 있다.
- 미끄러짐 없는 구름 조건을 상대속도로 정확히 세우고, 운동량·에너지 보존과 연립할 수 있다.

2.1 일과 일-운동에너지 정리

힘 $\vec{F}$ 가 변위 $d\vec{s}$ 를 따라 한 일은

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int F \cos \theta \, ds$$

이고, 물체에 작용한 **알짜힘**이 한 일은 운동에너지의 변화와 같다.

$$W_{\text{알짜}} = \Delta K = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

이 정리의 힘은 “경로를 몰라도 된다”는 데 있다. 마찰이 있는 경사면을 내려오든, 곡선 궤도를 따라 미끄러지든, 시작과 끝의 속력만 물으면 힘의 순간적인 크기를 따질 필요가 없다.

주의할 점은 $W_{\text{알짜}}$ 가 **모든** 힘의 일의 합이라는 것이다. 중력·수직항력·마찰·외력을 빠짐없이 세어야 하며, 이 중 수직항력은 변위와 수직이라 보통 일을 하지 않지만 **받침대 자체가 움직이는 문제(2.6절)에서는 일을 한다**. 이것이 이 장의 대표적 함정이다.

또 하나. 강체가 회전까지 하면 운동에너지는 병진과 회전에 나뉜다.

$$K = \underbrace{\frac{1}{2}mv_{\text{cm}}^2}_{\text{병진}} + \underbrace{\frac{1}{2}I\omega^2}_{\text{회전}}$$

경사에서 “구르며 내려온다”는 서술이 보이면 이 두 항을 모두 써야 한다.

2.2 일률과 속도의존 저항

일률(출력)은 단위시간당 한 일이고, 힘이 속도 방향일 때

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv$$

이 한 줄에서 경시 문항 하나가 통째로 나온다. **출력이 일정하면 힘은 속도에 반비례한다**는 뜻이기 때문이다.

(가) **저항이 없는 일정 출력 가속.** 엔진이 낸 일이 전부 운동에너지가 되므로

$$Pt = \frac{1}{2}mv^2 \implies v(t) = \sqrt{\frac{2Pt}{m}} \propto \sqrt{t}$$

속도는 $\sqrt{t}$ 로 커진다. 등가속도가 **아니다**. 그리고 $t \rightarrow 0$ 에서 $F = P/v \rightarrow \infty$ 이므로, 정지 상태에서 최대 출력을 걸면 필요한 구동력이 발산한다. 실제 타이어가 낼 수 있는 정지마찰력은 μmg 로 유한하므로 반드시 미끄러진다.

(나) **속도에 비례하는 저항.** 저항이 $F_f = \alpha v$ 이면 운동방정식은

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{P}{v} - \alpha v$$

속도가 커질수록 구동력은 줄고 저항은 커지므로 둘이 만나는 지점에서 가속이 멈춘다. 이 속도가 **종단 속도**다.

$$\frac{P}{v_{\text{종단}}} = \alpha v_{\text{종단}} \implies v_{\text{종단}} = \sqrt{\frac{P}{\alpha}}$$

$v_{\text{종단}}$ 은 점근값이므로 유한 시간 안에 도달하지는 않지만, **절대로 넘을 수는 없다**. “아무리 오래 가속해도 $v_{\text{종단}}$ 을 초과할 수 없다”는 서술은 참이다.

저항 모형별 종단속도

- 일정 힘 F + 선형 저항 αv : $v_{\text{종단}} = F/\alpha$
- 일정 힘 F + 이차 저항 βv^2 : $v_{\text{종단}} = \sqrt{F/\beta}$
- **일정 출력 P** + 선형 저항 αv : $v_{\text{종단}} = \sqrt{P/\alpha}$
- 일정 출력 P + 이차 저항 βv^2 : $v_{\text{종단}} = (P/\beta)^{1/3}$

자주 하는 실수

“최대 출력 P 로 가속하면 등가속도”라고 놓는 실수가 가장 흔하다. 일정한 것은 가속도가 아니라 출력이며, $a = P/(mv)$ 로 **시간이 갈수록 작아진다**. 반대로 $t = 0$ 근처에서는 a 가 발산하므로 “출발 직후에는 어떤 타이어도 미끄러진다”가 성립한다.

2.3 보존력과 역학적 에너지 보존

어떤 힘이 한 일이 경로에 무관하게 시작점과 끝점만으로 정해지면 **보존력**이고, 이때 퍼텐셜에너지 U 를 $W = -\Delta U$ 로 정의할 수 있다.

$$U_{\text{중력}} = mgh, \quad U_{\text{용수철}} = \frac{1}{2}kx^2, \quad F_x = -\frac{dU}{dx}$$

보존력만 일을 하면 $E = K + U$ 가 보존된다. 마찰·비탄성 충돌·공기저항이 끼면 그만큼 E 가 줄고, 줄어든 양이 곧 열로 나간 에너지다.

$$\Delta E = W_{\text{비보존력}}$$

부력도 이 틀 안에서 다룰 수 있다. 평형 위치에서 깊이 y 만큼 더 잠기면 잠긴 부피가 Sy 만큼 늘어 여분의 부력 $\rho g Sy$ 가 위로 작용한다. 즉 부력은 평형점 주위에서 용수철과 완전히 같은 선형 복원력이고, 유효 용수철상수는

$$K_{\text{부력}} = \rho g S$$

이다. 그래서 액체에 뜬 물체는 (점성을 무시하면) 각진동수 $\omega = \sqrt{K_{\text{부력}}/M}$ 인 단진동을 한다. 질량이 M 에서 M' 으로 늘면 $K_{\text{부력}}$ 은 그대로이고 **평형 위치만 아래로 내려간다는 점**이 핵심이다.

평형점이 바뀌는 단진동 – 표준 처리

1. 새 평형 위치 y_0 를 먼저 구한다 ($Ky_0 = \text{늘어난 무게}$).
2. 그 순간의 **변위** y_1 **과 속도** v_1 을 새 평형점 기준으로 다시 잰다.
3. 진폭은 에너지식 한 줄: $A = \sqrt{y_1^2 + (v_1/\omega)^2}$.
4. 최고점 $= y_0 + A$, 최저점 $= y_0 - A$ – **둘은 평형점 이동 때문에 대칭이 아니다.**

2.4 운동량 보존과 충돌

계에 작용하는 외력의 합이 0이면 총 운동량이 보존된다. 충돌은 접촉 시간이 매우 짧아 중력·마찰 같은 유한한 외력의 충격량이 무시할 만하므로, **충돌 전후로는 거의 언제나 운동량이 보존된다.**

$$\vec{J} = \int \vec{F} dt = \Delta \vec{p}, \quad \sum \vec{p}_{\text{전}} = \sum \vec{p}_{\text{후}}$$

반면 운동에너지는 충돌의 종류에 따라 다르다.

충돌 종류	보존되는 것	특징
탄성	p, K 모두	상대속도의 부호만 뒤집힘: $v_{2'} - v_{1'} = -(v_2 - v_1)$
비탄성	p 만	K 가 일부 감소, 반발계수 $0 < e < 1$
완전비탄성	p 만	붙어서 함께 움직임($e = 0$), K 손실 최대
폭발·분리	p 만	K 가 오히려 증가(내부 에너지 방출)

1차원 탄성충돌의 결과는 외워 두면 시간을 크게 아낀다. m_1 이 v_0 로 정지한 m_2 에 부딪히면

$$v_{1'} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0, \quad v_{2'} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0$$

완전비탄성이면 훨씬 간단하다.

$$v' = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2}, \quad \Delta K = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_0^2$$

이 ΔK 식이 다음 절의 환산질량으로 곧장 이어진다.

자주 하는 실수

“충돌하면 에너지가 보존된다”고 반사적으로 쓰는 것이 이 장 최대의 실점 요인이다. **붙는다·박힌다·함께 움직인**다는 말이 나오면 운동에너지는 반드시 줄어들며, 이때는 운동량 보존 한 식만으로 충돌 직후 속도를 정하고 **그 뒤부터** 에너지 보존을 쓴다. 순서를 바꾸면 답이 통째로 틀린다.

2.5 질량중심계와 환산질량

외력이 없으면 질량중심(cm)은 등속운동한다. 그래서 cm과 함께 움직이는 좌표계에서 보면 총 운동량이 항상 0이고, 두 물체의 운동에너지가 아주 단순해진다.

$$v_{\text{cm}} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad K = \underbrace{\frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2}_{\text{전체 병진}} + \underbrace{\frac{1}{2} \mu v_{\text{rel}}^2}_{\text{내부 운동}}$$

여기서 $M = m_1 + m_2$ 이고 μ 가 **환산질량**이다.

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad v_{\text{rel}} = v_1 - v_2$$

첫 항은 외력이 없는 한 절대 변하지 않는다. 따라서 **내부에서 일어나는 모든 일(용수철 압축, 변형, 열)은 오직 둘째 항 $\frac{1}{2} \mu v_{\text{rel}}^2$ 에서만 나온다.** 이것이 이 장에서 가장 강력한 도구다.

용수철 최대 압축. 두 물체 사이 용수철이 가장 많이 눌린 순간은 상대속도가 0이 되는 순간이다. 그때 내부 운동에너지가 전부 탄성에너지로 바뀌었으므로

$$\frac{1}{2} \mu v_{\text{rel}}^2 = \frac{1}{2} k x_{\text{max}}^2 \implies x_{\text{max}} = v_{\text{rel}} \sqrt{\frac{\mu}{k}}$$

완전비탄성 충돌의 손실. 상대속도가 0이 되고 다시 튕기지 않으므로 내부 운동에너지가 전부 사라진다.

$$|\Delta K| = \frac{1}{2} \mu v_{\text{rel}}^2$$

두 결과가 정확히 같은 표현임에 주목하라. “최대 압축”과 “완전비탄성 손실”은 물리적으로 같은 순간이다.

환산질량 암기 카드

- $\mu = (m_1 m_2) / (m_1 + m_2)$ – 항상 두 질량보다 **작다**.
- 같은 질량 m 둘이면 $\mu = m/2$. 한쪽이 훨씬 무거우면 $\mu \rightarrow$ 가벼운 쪽 질량.
- m 과 $3m$ 이면 $\mu = 3m/4$, m 과 $2m$ 이면 $\mu = 2m/3$.
- “최대 압축 · 최대 변형 · 완전비탄성 손실” 세 단어가 보이면 즉시 μ 를 꺼낸다.

자주 하는 실수

최대 압축을 “ $3m$ 이 정지해 있는 동안 m 의 운동에너지가 전부 용수철로 갔다”고 놓으면 $x = v_0 \sqrt{m/k}$ 라는 틀린 답이 나온다. 압축이 최대인 순간 두 물체는 **둘 다 같은 속도로 움직이고 있으며**, 그 공통 운동에너지 $\frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2$ 는 용수철에 저장되지 않는다. 선택지에는 이 오답이 반드시 들어 있다.

2.6 미끄러짐 없는 구름과 움직이는 받침대

바닥이 움직이지 않으면 구름 조건은 $v_{\text{cm}} = \omega r$ 로 익숙하다. 그러나 **받침대 자체가 움직이면 구름 조건은 상대속도로 써야 한다.**

$$v_{\text{접촉면 대비 상대속도}} = \omega r$$

즉 원판이 속력 v_2 로 오른쪽, 비탈면이 속력 V_1 로 왼쪽으로 움직이면 원판이 비탈면에 대해 갖는 상대 속력은 $v_2 + V_1$ 이고, 구름 조건은 $\omega r = v_2 + V_1$ 이다. 여기에 수평 운동량 보존 $mv_2 = MV_1$ 을 얹으면 ω, v_2, V_1 이 전부 하나의 변수로 묶인다.

이런 문제의 표준 절차는 다음과 같다.

1. **수평 운동량 보존** – 바닥이 마찰 없으면 계 전체의 수평 운동량은 처음 값(보통 0)을 유지한다.
2. **구름 조건(상대속도 기준)** – 접촉면끼리의 상대 미끄러짐이 0.
3. **에너지 보존** – 미끄러짐 없는 구름에서 정지마찰력은 접촉점에 작용하고 접촉점은 순간적으로 상대 정지 상태이므로 **일을 하지 않는다**. 따라서 mgh 가 전부 세 운동에너지로 간다.

$$mgh = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}MV_1^2$$

균일 원판은 $I = \frac{1}{2}mr^2$ 이므로 $\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{4}m(\omega r)^2$ 이고, 구름 조건으로 ωr 을 소거하면 r 이 **완전히 사라진다**. “반지름이 크면 더 빠르다”라는 보기는 그래서 거짓이다. 회전관성이 커지는 만큼 같은 ωr 을 얻는 데 필요한 ω 가 작아져 정확히 상쇄된다.

마지막으로, 원판이 마찰 없는 평면으로 올라선 뒤에는 **토크가 전혀 없으므로 ω 가 변하지 않는다**. 비탈면을 떠나기 직전의 각속력과 평면 위에서의 각속력은 같다.

자주 하는 실수

평면이 마찰 없다는 조건을 보고 “그럼 곧 미끄러지지 않고 구르게 되겠지”라고 넘겨짚으면 안 된다. 마찰이 없으면 ω 도 v_2 도 바꿀 수단이 없으므로, 비탈면에서 나온 $\omega r = 3V_1$ 과 $v_2 = 2V_1$ 의 관계가 **영원히 그대로** 유지된다. 즉 $\omega r \neq v_2$ 인 채로 계속 굴러가며, h 를 어떻게 조절해도 비율은 변하지 않는다.

기출 문항

제2장 일·에너지·운동량 수록 문항 4개. 해설은 다음 절에 있다.

문제 1 2024년 제2회 · 4번 · 일정 출력 가속과 속도의존 저항

최대 10^5 W의 엔진 출력을 낼 수 있는, 질량이 2000 kg인 자동차가 정지상태에서부터 최대 엔진 출력을 내어 가속하는 상황을 생각해 보자. 엔진 출력이 출발 시점인 $t = 0$ 부터 최대 출력으로 일정하게 유지되며, 또한 전혀 손실되지 않고 온전히 자동차 바퀴로 전달된다 가정할 때, 다음의 보기 중 맞는 것을 모두 고르시오. (엔진 회전수에 따른 출력 차이는 무시)

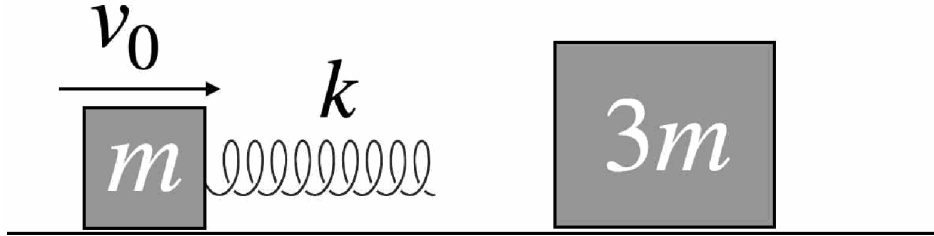
〈 보기 〉

- ㄱ. 자동차 바퀴와 지면 사이의 미끄러짐이 없다고 가정하며, 또한 엔진 출력이 온전히 자동차의 운동에너지로 전환되고 있다면, 가속을 시작한 시점부터 시간이 t 만큼 지났을 때 자동차의 속도 $v(t)$ 는 $v(t) = 20\sqrt{t}$ 로 주어진다.
- ㄴ. 출발 시점인 $t = 0$ 부터 즉시 최대 엔진 출력이 가해질 경우, 반드시 한 번은 자동차 바퀴가 미끄러지는 순간이 존재한다.
- ㄷ. 자동차에 가해지는 공기 저항 및 바퀴의 구름 저항을 모두 합하여 마찰력이 자동차 움직임의 반대 방향으로 $F_f = \alpha v$ ($\alpha = 40$ kg/s, $v =$ 자동차 속력)로 가해진다고 하자. 이렇다고 하면, 아무리 오랜 시간동안 가속하더라도 자동차는 50 m/s를 초과하는 속력을 낼 수 없다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

문제 2 2025년 제1회 · 2번 · 용수철 달린 물체 충돌과 최대 압축

그림과 같이 마찰이 없는 수평면에서 질량 m 인 물체가 오른쪽으로 v_0 의 속력으로 질량 $3m$ 인 물체로 다가가고 있다. 질량 m 인 물체에는 용수철 상수 k 인 용수철이 고정되어 있다. 두 물체가 충돌하는 동안, 용수철의 최대 압축 거리는 얼마인가? (단, 용수철의 질량은 무시한다.)



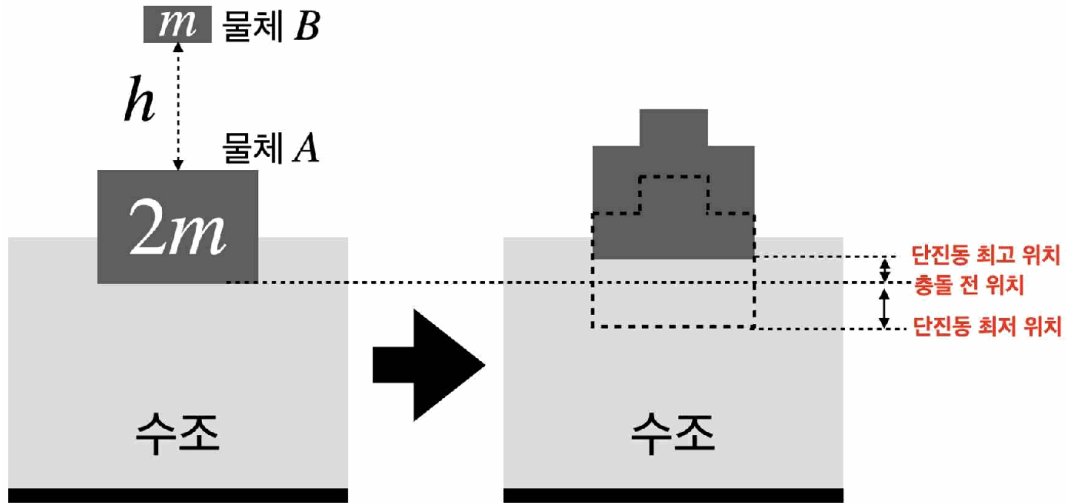
〈 보기 〉

ㄱ. $\frac{v_0}{4} \sqrt{\frac{m}{k}}$ ㄴ. $v_0 \sqrt{\frac{3m}{k}}$ ㄷ. $\frac{v_0}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}$ ㄹ. $v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}$ ㅁ. $\frac{v_0}{2} \sqrt{\frac{3m}{k}}$

- ① ㄱ
- ② ㄴ
- ③ ㄷ
- ④ ㄹ
- ⑤ ㅁ

문제 3 2025년 제2회 · 3번 · 부력 평형계의 비탄성 충돌과 단진동

그림과 같이 질량 $2m$ 인 물체 A 가 수조 안에서 액체의 부력으로 떠 있다. 이 물체 A 로 부터 높이 h 인 지점에서 질량 m 인 작은 물체 B 를 떨어뜨렸다. 물체 B 가 물체 A 에 닿는 순간, 두 물체는 서로 붙어서 액체에 떠 있는 상태로 단진동 운동을 하게 된다. 이 단진동 운동에서 가장 높이 올라가는 위치는 두 물체의 충돌 전 A 물체의 위치보다 위로 $\frac{h}{12}$ 만큼 높다. 그럼, 이 단진동의 최저 높이는 두 물체의 충돌 전 A 물체의 위치에 비해 얼마만큼 낮겠는가? (단, 액체의 점성에 의한 마찰은 무시하고, 수조는 충분히 넓어 단진동 운동 중의 수면 높이 변화는 무시한다.)

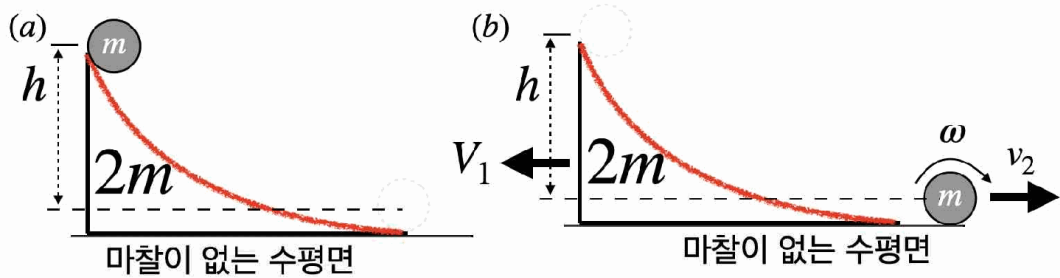


< 보기 >

- ㄱ. $\frac{h}{12}$ ㄴ. $\frac{h}{9}$ ㄷ. $\frac{h}{6}$ ㄹ. $\frac{h}{3}$ ㅁ. $\frac{h}{2}$

- ① ㄱ
② ㄴ
③ ㄷ
④ ㄹ
⑤ ㅁ

그림 (a)와 같이 질량 $2m$ 인 비탈면이 수평한 마찰이 없는 평면 위에 놓여있다. 질량 m 이고 반지름 r 인 균일한 원판이 비탈면의 위에 정지상태로 놓여 있다. 원판을 놓으면 원판이 비탈면 위를 미끄러짐 없이 구르며 내려오게 된다. 처음 원판의 위치와 평면까지 내려왔을 때 원판의 위치 차이는 h 이다. (b)와 같이 원판이 비탈면을 벗어나 평면에 도달한 후 각속력은 ω 이며 질량 중심은 오른쪽으로 속력 v_2 로 이동하고, 비탈면은 왼쪽으로 속력 v_1 로 움직인다. 아래 <보기> 중 옳은 것만을 고른 것은? (단, 비탈면 아랫부분은 매우 완만하여 원판이 비탈면 끝까지 내려왔을 때 원판은 수평 방향으로만 운동하게 된다.)



< 보기 >

- ㄱ. 원판이 비탈면을 떠나기 직전의 각속력도 ω 이다.
- ㄴ. h 를 적절히 조절하면 원판이 평면을 미끄러짐 없이 구를 수 있다.
- ㄷ. 원판이 비탈면을 떠나기 직전 원판의 비탈면에 대한 상대 속도의 크기는 $3v_1$ 이다.
- ㄹ. 동일한 질량이지만 반지름이 큰 원판이 반지름이 작은 원판에 비해 평면 위의 속력(v_2)이 더 크게 된다.

- ① ㄱ, ㄴ
- ② ㄴ, ㄷ
- ③ ㄷ, ㄹ
- ④ ㄱ, ㄷ
- ⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

해설

문제 1 2024년 제2회 · 4번 · ㄴ, ㄷ — 일정 출력과 종단속도

정답 ⑤

풀이

주어진 값은 $P = 10^5 \text{ W}$, $m = 2000 \text{ kg}$ 이다. 세 보기 모두 $P = Fv$ 한 줄에서 갈린다.

ㄱ. 저항이 없고 출력이 전부 운동에너지로 간다면 시간 t 까지 엔진이 한 일이 Pt 이므로

$$Pt = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v(t) = \sqrt{\frac{2Pt}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 10^5 t}{2000}} = \sqrt{100t} = 10\sqrt{t}$$

계수는 10 이지 20 이 아니다. ($20\sqrt{t}$ 가 되려면 $P = 4 \times 10^5 \text{ W}$ 이어야 한다.) 끝은 맞고 계수만 두 배로 부풀린, 전형적인 “형태 미끼”다. → 거짓

ㄴ. 같은 식에서 $v = \sqrt{2Pt/m}$ 이므로 필요한 구동력은

$$F = \frac{P}{v} = P\sqrt{\frac{m}{2Pt}} = \sqrt{\frac{mP}{2t}} \Rightarrow t \rightarrow 0 \text{ 일 때 } F \rightarrow \infty$$

출발 직후 필요한 힘은 발산한다. 그런데 지면이 실제로 낼 수 있는 힘은 정지마찰의 한계 μmg 로 유한하다. 따라서 아무리 접지력이 좋아도 t 가 충분히 작은 어떤 구간에서는 요구 구동력이 한계를 넘고, 바퀴는 반드시 한 번 미끄러진다. → 참

ㄷ. 저항 $F_f = \alpha v$ ($\alpha = 40 \text{ kg/s}$)를 넣으면 운동방정식은

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{P}{v} - \alpha v$$

속도가 커지면 구동력 P/v 는 줄고 저항 αv 는 커지므로, 두 항이 같아지는 지점에서 가속이 멎는다.

$$\frac{P}{v_{\text{종단}}} = \alpha v_{\text{종단}} \Rightarrow v_{\text{종단}} = \sqrt{\frac{P}{\alpha}} = \sqrt{\frac{10^5}{40}} = \sqrt{2500} = 50 \text{ m/s}$$

$v < 50$ 이면 우변이 양수라 계속 가속하고, $v = 50$ 에 접근할 뿐 넘어서지는 못한다. (수치적분으로 확인하면 $t = 400 \text{ s}$ 에서 $v \approx 50.0 \text{ m/s}$ 로 수렴한다.) → 참

따라서 ㄴ, ㄷ 이므로 ⑤.

이 유형의 표준 절차

1. “출력 일정”이 보이면 등가속도 공식을 전부 버리고 $P = Fv$ 에서 시작한다.
2. 저항이 없으면 $Pt = \frac{1}{2}mv^2$ 로 곧장 $v \propto \sqrt{t}$ — 시간 적분이 아니라 에너지식이 빠르다.
3. 계수를 반드시 대입해 확인한다. 보기의 오답은 대개 **끝은 맞고 계수만 다르다**.
4. “얼마를 넘을 수 없다”는 서술은 종단속도 문제다. 미분방정식을 풀지 말고 $dv/dt = 0$ 만 놓는다.
5. $t \rightarrow 0$ 과 $t \rightarrow \infty$ 두 극한을 항상 따로 점검한다. 함정은 거의 항상 양 끝에 있다.

자주 하는 실수

ㄷ을 “저항이 있으니 언젠가 멈춘다” 또는 “50 m/s에 정확히 도달한다”로 읽으면 안 된다. 종단속도는 **접근값**이다. 유한 시간에 도달하지는 않지만 초과도 불가능하며, 문항의 서술 “50 m/s 을 초과하는 속력을 낼 수 없다”는 바로 이 접근성을 정확히 표현한 것이다.

풀이

질량 m 인 물체가 v_0 로 다가가 정지한 $3m$ 을 용수철을 통해 민다. 마찰은 없다.

① **언제 압축이 최대인가.** 용수철이 계속 늘리는 동안에는 m 이 느려지고 $3m$ 이 빨라진다. 압축이 더 이상 진행되지 않는 순간은 두 물체 사이 거리가 변하지 않는 순간, 즉 **상대속도가 0이 되어 두 물체가 같은 속도로 움직이는 순간**이다. 그 공통 속도는 운동량 보존에서

$$mv_0 = (m + 3m)v_{\text{공통}} \Rightarrow v_{\text{공통}} = \frac{v_0}{4}$$

② **에너지 배분.** 이때까지 사라진 운동에너지가 전부 탄성에너지다.

$$\frac{1}{2}kx_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(4m)\left(\frac{v_0}{4}\right)^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{8}mv_0^2 = \frac{3}{8}mv_0^2$$

$$x_{\text{max}}^2 = \frac{3mv_0^2}{4k} \Rightarrow x_{\text{max}} = \frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{3m}{k}}$$

③ **환산질량으로 한 줄에.** 같은 계산을 2.5절의 도구로 하면 중간 단계가 통째로 사라진다.

$$\mu = \frac{m \cdot 3m}{m + 3m} = \frac{3m}{4}, \quad \frac{1}{2}\mu v_{\text{rel}}^2 = \frac{1}{2}kx_{\text{max}}^2 \Rightarrow x_{\text{max}} = v_0\sqrt{\frac{\mu}{k}} = \frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{3m}{k}}$$

보기 □ 과 일치한다. → ⑤

이 유형의 표준 절차

1. “최대 압축 · 최대 변형 · 가장 가까이 접근” → 모두 **상대속도 = 0** 인 순간이다.
2. 그 순간의 공통 속도는 운동량 보존으로 즉시 나온다: $v_{\text{공통}} = \sum mv / \sum m$.
3. 저장된 에너지는 $\frac{1}{2}\mu v_{\text{rel}}^2$. 여기서 v_{rel} 은 **충돌 전 상대속도**이지 v_0 그 자체가 아니다. (이 문항은 표적이 정지해 있어 우연히 같다.)
4. 용수철이 원래 길이로 돌아오는 시점까지 가면 그것은 **탄성충돌**이고, 답은 $v_1 = -v_0/2, v_2 = v_0/2$ 가 된다.

자주 하는 실수

가장 흔한 오답은 ㄴ, 즉 $v_0\sqrt{m/k}$ 다. “ m 의 운동에너지가 전부 용수철에 저장된다”고 놓으면 나온다. 그러나 압축이 최대인 순간에도 두 물체는 $v_0/4$ 로 **함께 달리고 있으며**, 그 병진 운동에너지 $\frac{1}{2}(4m)(v_0/4)^2 = mv_0^2/8$ 은 용수철에 저장되지 않는다. 나머지도 각각 다른 실수를 겨냥한다. ㄷ 은 μ 를 $m/4$ 로, ㄱ 은 $m/16$ 으로 잡은 값이고, ㄴ 은 μ 자리에 표적 질량 $3m$ 을 그대로 넣은 값이다. μ 가 두 질량보다 작다는 사실만 기억해도 ㄴ 은 즉시 지울 수 있다.

풀이

부력에 의한 단진동이지만, 핵심은 **충돌로 질량이 늘어나 평형 위치가 아래로 옮겨간다는** 데 있다. A의 충돌 전 위치를 원점으로 잡고 위를 $+y$ 로 둔다.

① **충돌 직전·직후**. B는 높이 h 에서 자유낙하하므로 닿는 순간 속력은 $v = \sqrt{2gh}$ (아래 방향). 두 물체가 붙으므로 완전비탄성이고, 운동량 보존만 쓴다.

$$mv = (m + 2m)u \implies u = \frac{v}{3} = \frac{\sqrt{2gh}}{3} \quad (\text{아래 방향})$$

이 단계에서 에너지 보존을 쓰면 안 된다. 실제로 $\frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{1}{2}(2m/3)(2gh) = 2mgh/3$ 이 열로 빠져나간다.

② **유효 용수철상수와 새 평형점**. 물체가 평형에서 y 만큼 더 잠기면 여분의 부력이 $K|y|$ 만큼 생긴다 ($K = \rho g S$). 충돌 전에는 A 혼자 평형이었으므로 $y = 0$ 에서 부력은 $2mg$ 다. 붙은 뒤 무게는 $3mg$ 이므로, 부족한 mg 를 채우려면 d 만큼 더 잠겨야 한다.

$$Kd = mg \implies K = \frac{mg}{d}, \quad \omega^2 = \frac{K}{3m} = \frac{g}{3d}$$

새 평형 위치는 $y = -d$ 다. 충돌 직후 상태를 **이 새 평형점 기준으로** 다시 재면 변위는 $+d$, 속도는 u (아래)다.

③ **진폭**. 단진동의 진폭은 변위와 속도로부터 한 줄에 나온다.

$$A^2 = d^2 + \frac{u^2}{\omega^2} = d^2 + \frac{2gh}{9} \cdot \frac{3d}{g} = d^2 + \frac{2hd}{3}$$

④ **주어진 조건 대입**. 최고점은 $y = -d + A$ 이고 이것이 $h/12$ 라고 했으므로 $A = d + h/12$.

$$\left(d + \frac{h}{12}\right)^2 = d^2 + \frac{2hd}{3} \implies \frac{hd}{6} + \frac{h^2}{144} = \frac{2hd}{3} \implies \frac{h}{144} = \frac{d}{2}$$

$$d = \frac{h}{72}, \quad A = \frac{h}{72} + \frac{h}{12} = \frac{7h}{72}$$

⑤ **최저점**. 최저 위치는 $y = -d - A$ 이므로 충돌 전 A의 위치보다

$$d + A = \frac{h}{72} + \frac{7h}{72} = \frac{8h}{72} = \frac{h}{9}$$

만큼 낮다. 보기 L 이다. → ②

(검산: $g = 10, h = 1$ 로 두고 $K = mg/d$ 인 계를 수치적분하면 최고점 $+0.0833 = h/12$, 최저점 $-0.1111 = -h/9$ 로 정확히 재현된다.)

자주 하는 실수

“단진동이니까 위아래 진폭이 같겠지” 하고 최저점을 $h/12$ 로 답하는 것이 보기 ㄱ 이 노리는 함정이다. 진동은 **새 평형점 $-d$ 에 대해서만** 대칭이고, 문제가 묻는 기준선은 옛 평형점 $y = 0$ 이다. 그래서 위로는 $A - d$, 아래로는 $A + d$ 로 **아래쪽이 항상 더 깊다**. 두 값의 차 $2d$ 가 곧 평형점 이동량이며, 이 문항에서는 $2d = h/36$ 이다.

풀이

바닥에 마찰이 없으므로 계 전체의 **수평 운동량은 처음부터 끝까지 0**이다. 원판이 오른쪽으로 v_2 , 비탈면($2m$)이 왼쪽으로 V_1 이므로

$$mv_2 = 2mV_1 \implies v_2 = 2V_1$$

비탈면 아랫부분이 매우 완만하므로, 떠나는 순간 접촉면은 수평이고 원판도 수평으로만 움직인다. 그 순간의 구름 조건은 **접촉면에 대한 상대속도로** 써야 한다.

$$\omega r = v_2 - (-V_1) = v_2 + V_1 = 3V_1$$

이 두 식이 네 보기를 전부 판정한다.

ㄱ. 원판이 평면으로 올라선 뒤 평면은 마찰이 없다. 접촉점에 접선 방향 힘이 없으니 질량중심에 대한 토크가 0이고, 각운동량이 보존되어 ω 는 변하지 않는다. 따라서 비탈면을 떠나기 직전의 각속력도 그림 (b)의 ω 와 같다. → **참**

ㄴ. 평면 위에서 미끄럼 없이 구르려면 $v_2 = \omega r$ 이어야 한다. 그런데 위 두 식에서

$$\omega r = 3V_1 = \frac{3}{2}v_2 \implies \omega r = 1.5v_2 \neq v_2$$

이 비는 h 와 전혀 무관하다 — h 를 키우면 v_2 와 ω 가 같은 비율로 함께 커질 뿐이다. 게다가 평면에 마찰이 없으므로 ω 와 v_2 를 서로 맞춰 줄 수단 자체가 없다. 원판은 필요 이상으로 빨리 회전하면서 영원히 미끄러진다. → **거짓**

ㄷ. 비탈면을 떠나기 직전 원판의 비탈면에 대한 상대속력은 위에서 이미 구했다.

$$|v_2 - (-V_1)| = 2V_1 + V_1 = 3V_1$$

→ **참**

ㄹ. 에너지 보존을 세워 본다. 미끄럼 없는 구름에서 정지마찰력의 작용점은 순간적으로 상대 정지이므로 일을 하지 않고, 따라서 mgh 가 전부 세 운동에너지로 간다. 균일 원판은 $I = \frac{1}{2}mr^2$ 이므로

$$mgh = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\omega^2 + \frac{1}{2}(2m)V_1^2$$

$v_2 = 2V_1$ 과 $\omega r = 3V_1$ 을 넣으면 회전 항이 $\frac{1}{4}m(\omega r)^2 = \frac{9}{4}mV_1^2$ 이 되어 r 이 **통째로 사라진다**.

$$mgh = 2mV_1^2 + \frac{9}{4}mV_1^2 + mV_1^2 = \frac{21}{4}mV_1^2 \implies v_2^2 = 4V_1^2 = \frac{16gh}{21}$$

v_2 는 반지름에 전혀 의존하지 않는다. 반지름이 커지면 회전관성 $I \propto r^2$ 은 커지지만 같은 ωr 을 얻는데 필요한 ω 가 $1/r$ 로 작아져 $\frac{1}{2}I\omega^2$ 이 정확히 상쇄되기 때문이다. → **거짓**

따라서 ㄱ, ㄷ 이므로 ④.

자주 하는 실수

ㄹ은 “회전관성이 크면 병진에 쓸 에너지가 줄어든다”는 참인 직관을 잘못된 변수에 갖다 붙인 보기다. 병진과 회전의 에너지 배분을 정하는 것은 반지름이 아니라 I/mr^2 라는 **무차원 계수**다. 원판이면 항상 $1/2$, 구면 껍질이면 $2/3$, 속이 찬 구면 $2/5$ — 이 값이 다르면 v_2 가 달라지지만 같은 모양에서 반지름만 바꾸면 아무것도 변하지 않는다. 굴림 문제에서 r 이 답에 남으면 대개 계산 실수다.

이 장의 요약

1. **일률** – “출력 일정”은 등가속도가 아니다. $P = Fv$ 에서 $v = \sqrt{2Pt/m}$, $a = P/(mv)$. $t \rightarrow 0$ 에서 힘이 발산하므로 출발 직후에는 반드시 미끄러진다.
2. **종단속도** – $dv/dt = 0$ 만 놓으면 끝난다. 일정 출력 + 선형 저항이면 $v_{\text{종단}} = \sqrt{P/\alpha}$. 도달하지는 못하지만 넘지도 못하는 점근값이다.
3. **보존량 고르기** – 충돌에서는 운동량이 먼저, 에너지는 그다음. “붙는다”가 보이면 운동에너지는 보존되지 않고 $\frac{1}{2}\mu v_{\text{rel}}^2$ 만큼 사라진다.
4. **환산질량** – 최대 압축·최대 변형·완전비탄성 손실은 모두 같은 순간(상대속도 0)이며 $x_{\text{max}} = v_{\text{rel}}\sqrt{\mu/k}$, $|\Delta K| = \frac{1}{2}\mu v_{\text{rel}}^2$. 공통 병진 에너지는 저장되지 않는다.
5. **복합 상황** – 충돌 뒤 진동이면 **평형점 이동**을 먼저 구하고 진폭은 $A = \sqrt{y_1^2 + (v_1/\omega)^2}$. 움직이는 받침대 위의 구름이면 구름 조건을 **상대속도**로 쓰고 운동량 보존과 연립한다 – r 은 항상 약분된다.

제3장 원운동과 강체의 회전

최근 5회분(90문항)에서 역학은 20문항이 출제되었고, 그중 8문항이 이 장에서 나왔다. 역학 편의 어느 정보보다 크고, 회차당 평균 1.6문항이므로 **매회 최소 한 문항은 반드시 나온다고** 봐야 한다. 출제 축은 세 갈래로 정리된다 — (i) 등속원운동의 구심가속도 $a = \omega^2 r$ 를 실제 수치나 장력 조건에 적용하는 유형, (ii) 돌림힘 평형과 강체의 회전 운동방정식 $\tau = I\alpha$, (iii) 굴림운동에서 관성모멘트가 만드는 에너지 분배. 특히 (iii)은 “관성모멘트 계수 $c = I/MR^2$ 만 알면 나머지는 자동”인 유형이라, 대표 도형의 I 를 외우고 있는지가 그대로 점수로 갈린다.

학습 목표

- 등속원운동의 구심가속도를 $v^2/r, \omega^2 r$ 두 형태로 자유롭게 바꿔 쓰고, 분당 회전수를 ω 로 환산할 수 있다.
- 돌림힘 $\tau = rF \sin \varphi$ 와 정적평형 조건 $\sum \vec{F} = 0, \sum \tau = 0$ 으로 미지의 힘을 구할 수 있다.
- 대표 강체의 관성모멘트를 외우고 평행축 정리로 축을 옮길 수 있다.
- 굴림 구속조건 $v = R\omega$ 에서 $a = g \sin \theta / (1 + c)$ 를 유도해 빗면 도착 순서와 시간비를 판정할 수 있다.

3.1 등속원운동과 구심가속도

반지름 r 인 원을 일정한 속력 v 로 도는 물체는 **속력은 일정하지만 속도는 계속 변한다**. 방향이 바뀌므로 가속도가 있고, 그 방향은 항상 원의 중심을 향한다.

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = \frac{4\pi^2}{T^2} r, \quad v = r\omega, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

이 가속도를 만드는 힘이 **구심력**이다. 구심력은 중력·장력·마찰력·수직항력처럼 이미 있는 힘이 맡는 **역할의 이름**이지, 새로 추가되는 힘이 아니다. 따라서 원운동 문항의 첫 단계는 언제나 “무엇이 구심력 노릇을 하는가”를 지목하는 것이다.

풀이 절차는 고정되어 있다.

1. 물체에 작용하는 실제 힘만 그린다(원심력은 그리지 않는다).
2. 좌표축을 **원의 중심 방향**과 **그에 수직인 방향**으로 잡는다.
3. 중심 방향: $\sum F_r = m\omega^2 r$. 수직 방향(보통 연직): $\sum F = 0$.

회전 속도가 “분당 N 회”로 주어지면 반드시 ω 로 환산한다.

$$f = \frac{N}{60} \text{ Hz}, \quad \omega = 2\pi f \text{ rad/s}$$

분당 60회는 $f = 1 \text{ Hz}$, 곧 $\omega = 2\pi \text{ rad/s}$ 다.

자주 하는 실수

$a = \omega^2 r$ 에서 ω 의 단위는 반드시 **rad/s** 다. “분당 60회”를 그대로 $\omega = 60$ 으로 넣으면 가속도가 900 배 어긋난다. 또 $a = v^2/r$ 은 r 이 커질수록 작아지지만 $a = \omega^2 r$ 은 r 이 커질수록 **커진다**. 회전 각속도가 고정된 상황(회전판·우주정거장·회전하는 막대)에서는 반드시 뒤쪽 식을 써야 한다 – 축에서 멀수록 위험하다.

■ 원뿔진자와 여러 힘이 걸린 원운동

실에 매달린 물체가 수평면 위에서 원을 그리는 **원뿔진자**는 원운동 문항의 기본형이다. 실이 연직과 각 θ 를 이루고 실의 길이가 ℓ 이면 반지름은 $r = \ell \sin \theta$ 이고,

$$T \cos \theta = mg, \quad T \sin \theta = m\omega^2 r = m\omega^2 \ell \sin \theta \implies \omega^2 = \frac{g}{\ell \cos \theta}$$

실이 **둘 이상**이면 방정식이 두 줄 그대로 늘어난다. 실 i 가 연직(회전축)과 각 θ_i 를 이루면

$$\sum_i T_i \cos \theta_i = mg, \quad \sum_i T_i \sin \theta_i = m\omega^2 r$$

여기서 시험에 잘 나오는 특수한 상황이 하나 있다. **모든 장력이 같고** 두 각이 $\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$ 를 이루면 $\sum \cos \theta_i = \sum \sin \theta_i$ 가 되어 두 식을 나누는 순간 장력이 통째로 사라지고

$$\omega^2 = \frac{g}{r}$$

만 남는다. 즉 **구심가속도가 정확히 g 와 같아지는** 조건이다. 이때 필요한 것은 힘의 계산이 아니라 **반지름 r 의 기하학**뿐이다.

두 줄로 매단 원운동 – 기하부터 풀어라

1. 두 실이 축에 붙은 두 점 사이 거리 h 와 각 θ_1, θ_2 로 삼각형을 완성한다.
2. 물체까지의 두 실 길이 d_1, d_2 를 연립한다: 수평 $d_1 \sin \theta_1 = d_2 \sin \theta_2 = r$, 연직 $d_1 \cos \theta_1 = h + d_2 \cos \theta_2$.
3. 그다음에 비로소 힘 방정식을 세운다. 기하를 미루면 미지수가 넷이 되어 풀리지 않는다.

3.2 돌림힘과 강체의 정적평형

힘 $\vec{F}$ 가 회전축에서 위치 $\vec{r}$ 인 점에 작용할 때 돌림힘(토크)은

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad \tau = rF \sin \varphi = F \cdot d_{\perp}$$

$d_{\perp} = r \sin \varphi$ 는 회전축에서 힘의 작용선까지의 **수직거리**(모멘트 팔)다. 크기를 구할 때는 “힘 $\times$ 모멘트 팔”로 외우는 편이 실수가 적다.

강체가 정지해 있으려면 두 조건을 동시에 만족해야 한다.

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \text{그리고} \quad \sum \vec{\tau} = 0$$

두 번째 조건은 **어느 점을 회전축으로 잡아도** 성립한다. 그래서 실전에서는 **모르는 힘이 걸린 점을 회전축으로 잡는다**. 그 힘의 모멘트 팔이 0이 되어 식에서 사라지기 때문이다. 시소 문항에서 받침점을 축으로 잡는 이유, 회전축 달린 막대 문항에서 회전축을 축으로 잡는 이유가 모두 이것이다.

균일한 막대·판의 무게는 **무게중심 한 점에 모두 몰아서** 작용한다고 보면 된다. 길이 L 인 균일한 막대라면 중심, 즉 끝에서 $L/2$ 지점이다.

자주 하는 실수

“거리”를 회전축이 아니라 문제에 표시된 임의의 기준점에서 재는 실수가 가장 흔하다. 시소에서 좌표가 0, 0.5, 1, 2 (m)로 주어지고 축이 1 m라면, 모멘트 팔은 0.5, 1, 2 가 아니라 1, 0.5, 1 이다. **좌표에서 축의 좌표를 뺀 값이 팔이다**.

3.3 관성모멘트와 평행축 정리

회전에서 질량의 역할을 하는 양이 관성모멘트다.

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \int r^2 dm$$

r 는 **회전축까지의 수직거리**다. 같은 물체라도 축이 달라지면 I 가 달라진다는 점이 질량과 다르다. 아래 표는 통째로 외워야 한다. 마지막 열 $c = I/MR^2$ 는 굴림 문항에서 그대로 쓰이는 계수다.

강체	회전축	관성모멘트 I	c
가는 막대 (길이 L)	중심, 막대에 수직	$\frac{1}{12}ML^2$	—
가는 막대 (길이 L)	한쪽 끝, 수직	$\frac{1}{3}ML^2$	—
원판 / 속 찬 원기둥	중심 대칭축	$\frac{1}{2}MR^2$	1/2
속 찬 구	중심을 지나는 축	$\frac{2}{5}MR^2$	2/5
얇은 구각 (속 빈 구)	중심을 지나는 축	$\frac{2}{3}MR^2$	2/3
고리 / 원통 껍질	중심 대칭축	MR^2	1

축을 옮길 때는 **평행축 정리**를 쓴다. 질량중심을 지나는 축의 관성모멘트가 I_{cm} 이면, 그 축과 평행하고 거리 d 만큼 떨어진 축에 대해서는

$$I = I_{\text{cm}} + Md^2$$

막대의 경우 $\frac{1}{12}ML^2 + M(L/2)^2 = \frac{1}{3}ML^2$ 로 표의 두 번째 줄이 곧바로 나온다. Md^2 는 항상 양수이므로 **질량중심을 지나는 축에서 I 가 최소**라는 사실도 함께 기억한다.

자주 하는 실수

원판과 속 찬 원기둥은 I 가 완전히 같다($\frac{1}{2}MR^2$). 두께가 달라도 축까지의 거리 분포가 같기 때문이다. “원기둥이 원판보다 두꺼우니 더 느리다”는 직관은 틀렸다 – 질량과 반지름이 같으면 **굴림 결과가 완전히 동일**하다.

3.4 강체의 회전 운동방정식

고정축에 대한 강체의 운동은 뉴턴 제2법칙과 한 글자씩 대응된다.

$$\tau_{\text{net}} = I\alpha, \quad K_{\text{회전}} = \frac{1}{2}I\omega^2, \quad L = I\omega, \quad W = \tau\Delta\theta$$

한쪽 끝이 회전축에 고정된 균일한 막대를 수평으로 놓고 놓아 버리는 상황이 이 장의 단골이다. 축을 기준으로 중력의 돌림힘은 무게중심에 걸리므로 $\tau = Mg(L/2)$ 이고 $I = \frac{1}{3}ML^2$ 이므로

$$\alpha = \frac{MgL/2}{\frac{1}{3}ML^2} = \frac{3g}{2L}, \quad a_{\text{cm}} = \alpha \cdot \frac{L}{2} = \frac{3g}{4}$$

여기서 결정적인 결론이 나온다. 무게중심의 가속도가 $3g/4 < g$ 이므로 **회전축은 여전히 위로 힘을 준다**.

$$Mg - F_{\text{축}} = Ma_{\text{cm}} \implies F_{\text{축}} = M\left(g - \frac{3g}{4}\right) = \frac{Mg}{4}$$

한편 막대 끝($r = L$)의 가속도는 $\alpha L = 3g/2 > g$ 로 **중력가속도보다 크다** – 끝에 올려둔 동전이 막대에서 떨어져 뒤흔치는 유명한 시연이 이 계산이다. 각도가 θ 만큼 돌아간 뒤의 각속도는 ω 가 각도에 따라 변하므로 적분 대신 **에너지**로 구한다.

$$Mg\left(\frac{L}{2}\right)(1 - \cos\theta_0) = \frac{1}{2}I\omega^2 \implies \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}(1 - \cos\theta_0)}$$

수평에서 놓아 최저점을 지날 때는 무게중심이 $L/2$ 만큼 내려가므로 $\omega = \sqrt{3g/L}$ 이다.

자주 하는 실수

$a_{\text{cm}} = \alpha L$ 로 쓰는 실수가 압도적으로 많다. 무게중심은 축에서 $L/2$ 이므로 $a_{\text{cm}} = \alpha L/2$ 다. 또 α 는 각도에 따라 변하므로 **놓는 순간의 α 로 등가속도 공식을 쓰면 안 된다**. “놓는 순간의 힘”은 $\tau = I\alpha$ 로, “나중의 속도”는 에너지 보존으로 – 도구가 다르다.

3.5 굴림운동 – 구속조건과 빗면

미끄러지지 않고 구르면 접촉점의 속도가 0이 되고, 이것이 **구속조건**을 만든다.

$$v_{\text{cm}} = R\omega, \quad a_{\text{cm}} = R\alpha, \quad K = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}Mv^2(1+c), \quad c \equiv \frac{I}{MR^2}$$

굴림운동의 전부는 이 한 줄이다. 운동에너지가 병진과 회전으로 1 : c 로 나뉜다는 뜻이므로, 같은 높이에서 굴러 내려온 물체의 속력은

$$MgH = \frac{1}{2}Mv^2(1+c) \implies v = \sqrt{\frac{2gH}{1+c}}$$

빗면(경사각 θ)에서의 가속도도 같은 방식으로 얻는다. $Mg \sin \theta - f = Ma$, $fR = I\alpha = Ia/R$ 에서

$$a = \frac{g \sin \theta}{1+c}, \quad f = \frac{c}{1+c} Mg \sin \theta$$

물체	c	$a/g \sin \theta$	$v/\sqrt{2gH}$	도착 순서
미끄러짐 (마찰 없음)	0	1	1	가장 빠름
속 찬 구	2/5	5/7 $\approx$ 0.714	0.845	1위
원판 · 원기둥	1/2	2/3 $\approx$ 0.667	0.816	공동 2위
구각	2/3	3/5 = 0.600	0.775	4위
고리 · 원통 겹질	1	1/2 = 0.500	0.707	꼴찌

표에서 읽어야 할 세 가지.

1. 결과는 **질량과 반지름에 전혀 의존하지 않는다**. M 과 R 은 모두 약분된다. “무거운 게 빨리 간다”는 오답 유도다.
2. **모양(질량 분포)만이** 순서를 정한다. 질량이 축에서 멀수록 c 가 커지고 느려진다.
3. 같은 거리를 등가속도로 내려오므로 시간은 $t = \sqrt{2s/a} \propto \sqrt{1+c}$, 즉 $t_1/t_2 = \sqrt{(1+c_1)/(1+c_2)}$ 다. 미끄러짐($c=0$)과 원기둥 굴림($c=1/2$)의 시간비는 $\sqrt{3/2}$.

굴림 마찰력은 접촉점이 정지해 있으므로 **정지마찰력**이고, 따라서 **일을 하지 않는다**. 그래서 굴러 내려오는 동안 역학적 에너지가 보존된다.

3.6 각운동량과 연결계의 에너지 보존

각운동량은 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, 강체의 고정축 회전에서는 $L = I\omega$ 이고, 외부 돌림힘이 없으면 $\tau_{\text{ext}} = dL/dt = 0$ 에서 $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$ 로 보존된다. 팔을 오므린 피겨 선수가 빨라지는 것이 이 식이다. 이때 **운동에너지는 보존되지 않는다** - $K = L^2/2I$ 이므로 I 가 줄면 K 는 오히려 늘어난다(근육이 일을 한다).

한편 도르래·줄로 연결된 계에서는 각운동량이 아니라 **에너지 보존**이 주력 도구다. 절차는 항상 같다.

1. **구속조건부터**. 움직도르래는 두 줄이 떠받치므로 도르래의 속력은 줄 속력의 절반이다. 줄 속력이 v 이면 움직도르래(와 거기 매달린 물체)는 $v/2$.
2. **변위 관계**. 두 물체의 “사이 거리”가 주어지면 각자의 변위를 더해야 한다. A가 $2s$ 올라가고 B가 s 내려가면 벌어진 거리는 $3s$ 다.
3. **운동에너지를 빠짐없이**. 물체의 병진 + 도르래의 회전 + **움직도르래의 병진**까지. 도르래 표면의 줄 속력이 u 면 $\omega = u/R$, $K = \frac{1}{2}I\omega^2$.
4. **위치에너지는 알짜로**. 내려간 질량 $\times$ 내려간 거리 - 올라간 질량 $\times$ 올라간 거리.

자주 하는 실수

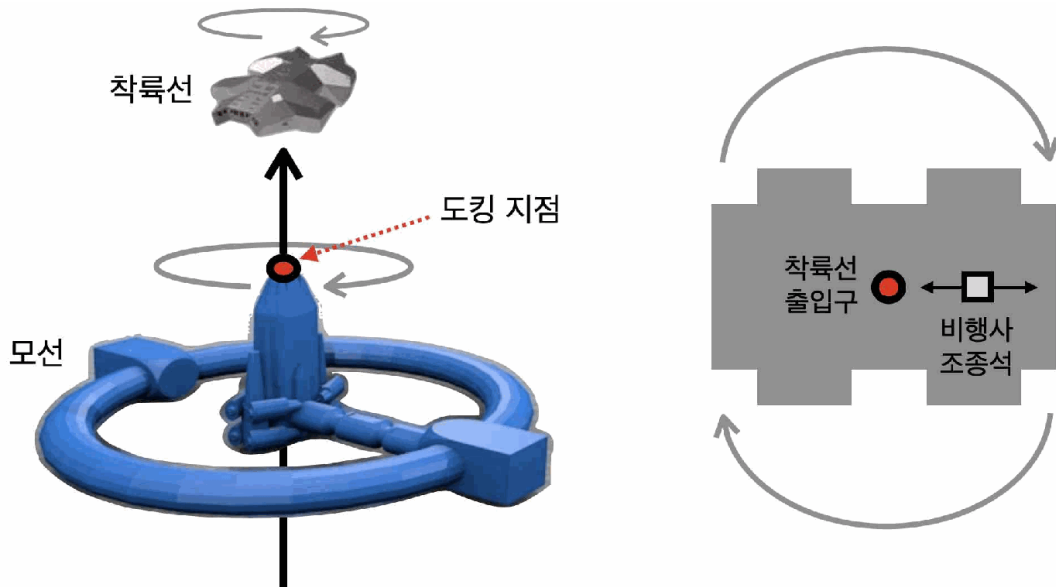
움직도르래 문제에서 도르래의 **회전에너지만 세고 병진에너지를 빠뜨리는** 실수가 흔하다. 움직도르래는 돌면서 동시에 내려가므로 $\frac{1}{2}I\omega^2$ 과 $\frac{1}{2}mv^2$ 을 **둘 다** 더해야 한다. 또 고정도르래의 줄 속력과 움직도르래의 줄 속력은 서로 다르다(보통 2배 차이) - ω 를 각각 따로 계산하라.

기출 문항

제3장 원운동과 강체의 회전 수록 문항 8개. 해설은 다음 절에 있다.

문제 1 2024년 제1회 · 3번 · 회전 우주선 구심가속도

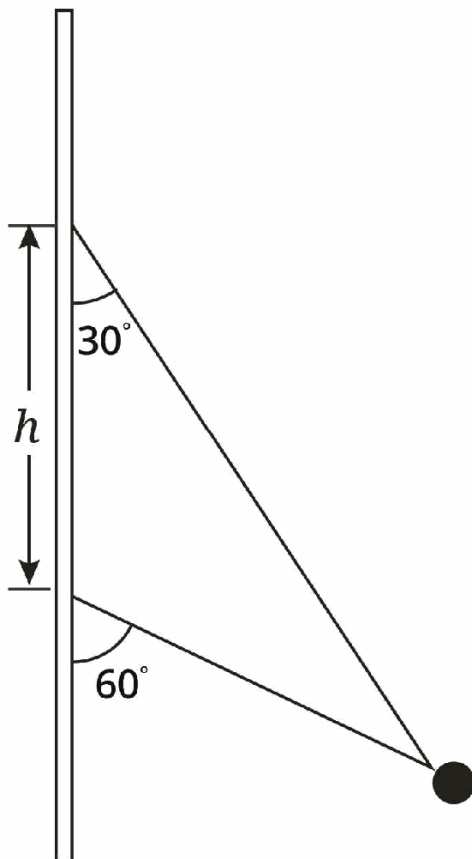
인류가 가까운 행성으로 유인 탐사선을 보낼 수 있는 미래를 상상해 보자. 행성 탐사를 위해 행성 주변 우주공간에 머물고 있는 모선이, 탑승 인원들이 착륙선을 타고 모선을 비운 사이 소프트웨어 오작동을 일으켜 모선 수직축을 중심으로 분당 60회의 빠르기($\omega = 2\pi \text{ rad / s} = \text{초당 } 360^\circ$)로 회전하고 있다 생각해 보자 (아래 그림 참조). 모선의 회전축상에 위치하고 있는 모선 출입구와 도킹하기 위해서는 착륙선 중앙에 위치한 출입구를 모선 회전축상에 정렬하고 모선과 같은 회전속도로 회전하며 서서히 접근해야 한다고 할 때, 착륙선에 탑승하여 이를 조작해야 하는 우주비행사들은 착륙선 출입구로부터 얼마만큼 떨어진 위치에 조종석을 고정해야 안전할까? (조종석 위치를 조정 가능하다 가정) 도킹에 필요한 시간 동안 우주비행사들이 지구 중력의 약 10배를 견딜 수 있는 훈련을 받았다 가정하고, 원주율은 3으로, 중력가속도는 10 m/s^2 로 근사하도록 한다.



- ① 5 m
- ② 10 m
- ③ 15 m
- ④ 20 m
- ⑤ 위 4가지 경우 모두 안전하지 않음

문제 2 2024년 제1회 · 4번 · 회전 막대 원뿔진자 장력 조건

그림은 회전하는 수직인 막대에 두 실로 연결된 물체가 수평인 원 궤도를 따라 등속 원운동 하는 것을 나타낸 것이다. 막대 위에 실이 연결된 두 점 사이의 거리는 h 이다. 두 실에 걸리는 장력이 같을 때, 다음 보기 중 물체의 회전 각속도로 옳은 것은 무엇인가? (단, 중력 가속도는 g 이며, 중력의 방향은 막대에 평행하게 아래 방향으로 작용한다.)



〈 보기 〉

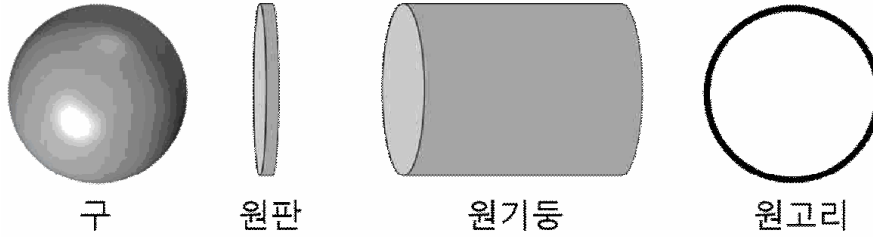
ㄱ. $\left(\frac{g}{3h}\right)^{1/2}$ ㄴ. $\left(\frac{\sqrt{2}g}{3h}\right)^{1/2}$ ㄷ. $\left(\frac{g}{\sqrt{3}h}\right)^{1/2}$ ㄹ. $\left(\frac{2g}{3h}\right)^{1/2}$ ㅁ. $\left(\frac{2g}{\sqrt{3}h}\right)^{1/2}$

- ① ㄱ
- ② ㄴ
- ③ ㄷ
- ④ ㄹ
- ⑤ ㅁ

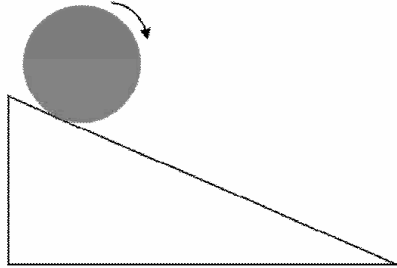
문제 3

2024년 제1회 · 6번 · 빗면 구름운동 도착 순서

반지름과 질량이 같은 구, 원판, 원기둥, 원고리가 빗면을 미끄러짐 없이 굴러 내려온다. 네 물체의 처음 위치는 같으며, 정지한 상태에서 구르기 시작한다. 네 물체는 모두 균일하며, 구, 원판, 원기둥은 속이 꽉 차 있다. 그림 (가)는 구, 원판, 원기둥이 빗면을 내려가는 모습을, 그림 (나)는 원고리가 빗면을 내려가는 모습을 나타낸다. 공기 저항은 무시한다. 다음 설명 가운데 틀린 것을 모두 고른 것은?

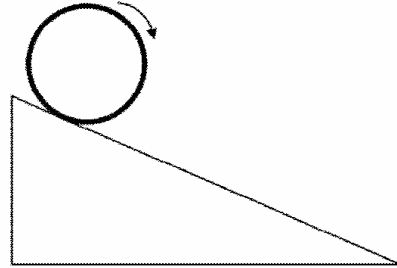


구, 원판, 원기둥



(가)

원고리



(나)

< 보기 >

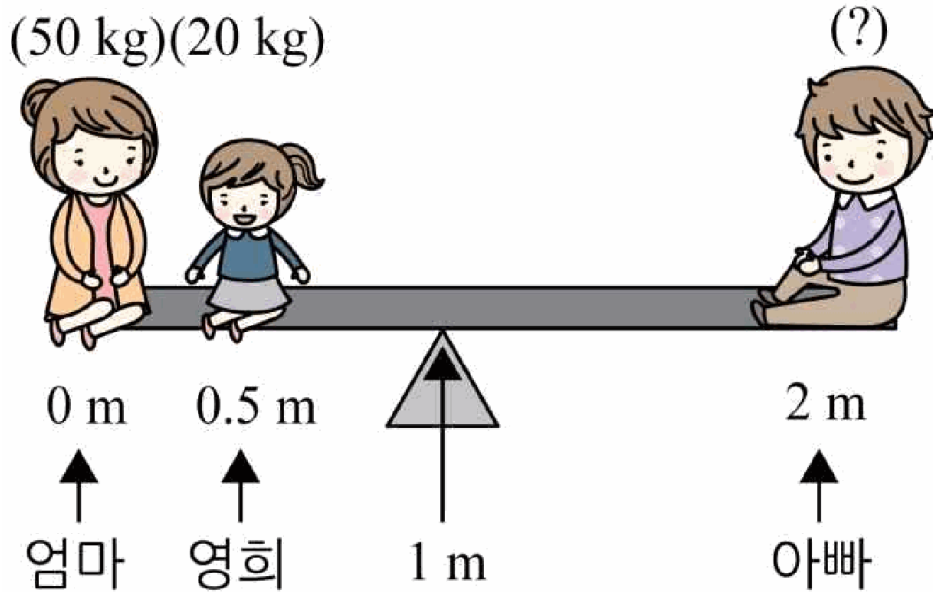
- ㄱ. 제일 먼저 경사면의 맨 아래 지점에 도착하는 물체는 구이다.
- ㄴ. 원판이 원기둥보다 경사면의 맨 아래 지점에 먼저 도착한다.
- ㄷ. 원기둥과 원고리가 경사면의 맨 아래 지점에 도착하는 데 걸리는 시간은 같다.
- ㄹ. 제일 늦게 경사면의 맨 아래 지점에 도착하는 물체는 원고리이다.

- ① ㄱ, ㄴ
- ② ㄱ, ㄷ
- ③ ㄴ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄹ
- ⑤ ㄷ, ㄹ

문제 4

2024년 제2회 · 1번 · 시소 돌림힘 평형

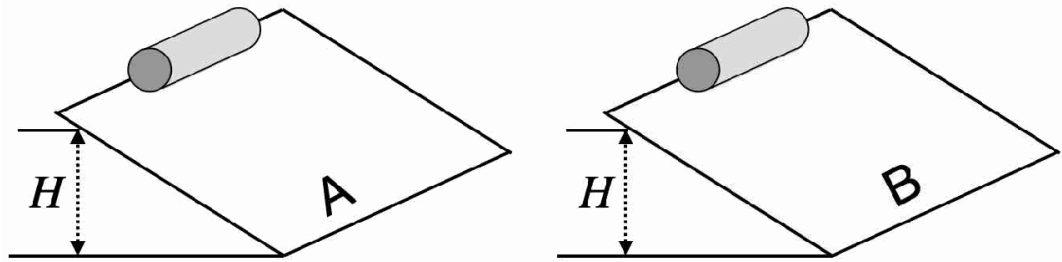
그림과 같이 영희와 엄마, 아빠가 시소를 타고 있다. 만약 시소가 힘의 평형을 이루었다고 하면 아빠의 몸무게는 얼마인가? (영희는 20 kg, 엄마는 50 kg이고, 엄마의 위치를 기준으로 했을 때 영희는 0.5 m, 시소의 축은 1 m, 아빠는 2 m만큼 오른쪽에 위치해 있다.)



- ① 55 kg ② 60 kg ③ 65 kg
④ 70 kg ⑤ 75 kg

문제 5 2025년 제2회 · 2번 · 미끄러짐 vs 순수 굴림 시간비

그림과 같이 마찰이 없는 경사면 A와 마찰이 있는 경사면 B에 질량이 M 이고 반지름이 R 인 밀도가 균일한 두 원기둥 모양의 물체를 높이 H 인 경사면을 따라 정지상태에서 동시에 놓는다. 물체는 경사면 A에서 내려올 때는 구르지 않고 미끄러져 내려오며, 경사면 B에서는 미끄러지지 않고 굴러서 (순수 굴림운동) 내려온다. 두 물체가 경사면의 아래 끝에 도달하는 시간을 측정하여, 경사면 A의 경우 걸리는 시간을 t_A , 경사면 B의 경우 걸리는 시간을 t_B 라 하자. $\frac{t_B}{t_A}$ 를 구하시오. (단, 원기둥의 회전 관성 모멘트 $I = 0.5MR^2$ 이며, 두 경사면의 기울기는 동일하다.)



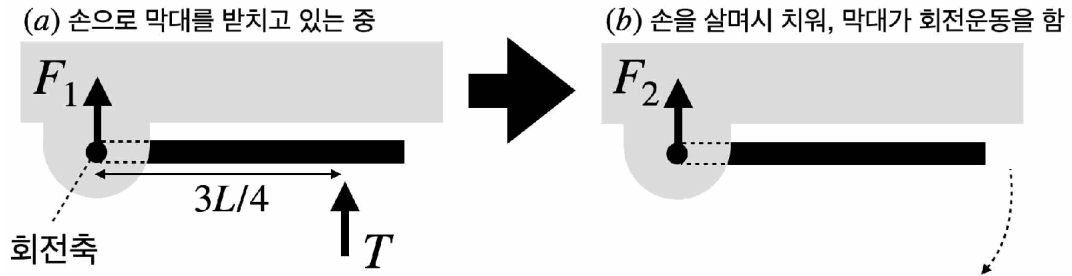
< 보기 >

- ㄱ. 1 ㄴ. $\sqrt{2}$ ㄷ. $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ㄹ. $\sqrt{\frac{2}{3}}$ ㅁ. $\sqrt{\frac{3}{2}}$

- ① ㄱ
② ㄴ
③ ㄷ
④ ㄹ
⑤ ㅁ

문제 6 2025년 제2회 · 4번 · 회전축 막대의 정적평형과 강체 회전

그림처럼 길이 L 이고 질량 M 인 균일한 막대의 왼쪽 끝이 마찰이 없는 회전축에 연결되어 자유롭게 회전할 수 있다. (a) 회전축에서 $\frac{3L}{4}$ 부분에 손으로 힘 T 를 작용하여 막대가 움직이지 않도록 하고 있다. (b) 손을 살며시 치우면, 막대는 회전축을 중심으로 회전축 반대쪽 끝이 반지름 L 인 원운동을 하게 된다. 다음 중 〈보기〉 에서 맞는 것을 고른 것은? (단, 회전축을 중심으로 막대의 관성 모멘트는 $\frac{1}{3}ML^2$ 이며, 중력가속도는 g 로 둔다.)



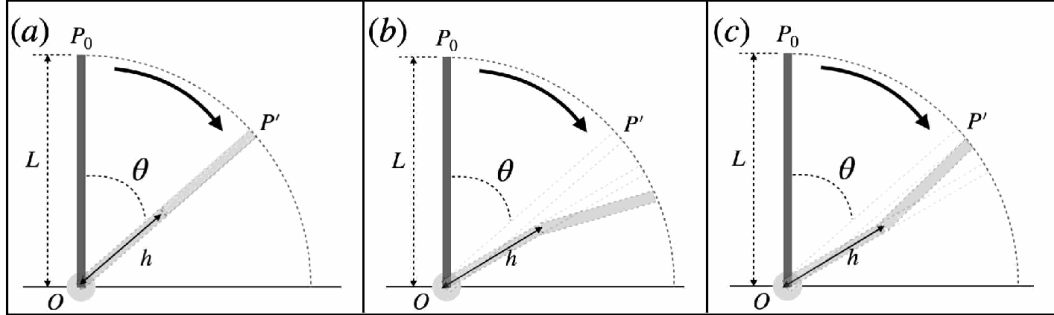
〈 보기 〉

- ㄱ. (a)에서 회전축에서 작용하는 힘 $F_1 = Mg/2$ 이다.
- ㄴ. (a)에서 회전축에서 작용하는 힘 $F_1 = Mg/3$ 이다.
- ㄷ. (b)에서 회전축에서 작용하는 힘 $F_2 = Mg/4$ 이다.
- ㄹ. (b)에서 회전축에서 작용하는 힘 $F_2 = Mg/5$ 이다.
- ㅁ. (b)에서 막대의 한쪽 끝이 최저점을 지날 때 각속력 $\omega = \sqrt{\frac{2g}{L}}$ 이다.
- ㅂ. (b)에서 막대의 한쪽 끝이 최저점을 지날 때 각속력 $\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$ 이다.

- ① ㄱ, ㄷ, ㅁ
- ② ㄱ, ㄷ, ㅂ
- ③ ㄱ, ㄹ, ㅁ
- ④ ㄴ, ㄷ, ㅂ
- ⑤ ㄴ, ㄹ, ㅂ

문제 7 2026년 제1회 · 2번 · 강체 막대 쓰러짐과 부러짐 위치

그림 (a)와 같이 선밀도가 균일하고 길이가 L 인 막대가 수직으로 서 있다가 살짝 밀려 지면의 점 O 를 중심으로 회전한다. 이후 막대가 수직으로부터 θ 만큼 회전했을 때, 점 O 로부터 거리 h 인 지점이 부러졌다. 아래 <보기> 중 옳은 것만을 고른 것은? (단, 막대의 총 질량이 M 일 때, 회전축 O 를 중심으로 막대의 회전관성 모멘트는 $I = \frac{1}{3}ML^2$ 이다.)



< 보기 >

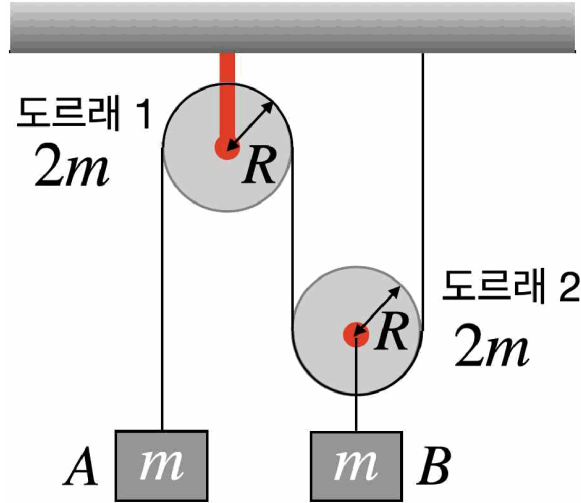
- ㄱ. 부러지는 위치는 $h = \frac{1}{3}L$ 이다.
- ㄴ. 부러지는 각도 θ 는 막대의 재질에 무관하다.
- ㄷ. 막대가 부러진 후, 부러진 윗부분은 그림 (b)와 같이 아랫 부분보다 시계 방향으로 더 빠르게 회전한다.

- ① ㄱ
- ② ㄴ
- ③ ㄷ
- ④ ㄱ, ㄷ
- ⑤ ㄴ, ㄷ

문제 8

2026년 제1회 · 3번 · 도르래-줄 연결계 에너지 보존

그림과 같이 질량이 m 으로 같은 두 물체 A 와 B 가 가볍고 늘어나지 않는 줄과, 질량 $2m$ 이며 반지름 R 인 도르래들을 통해 연결이 되어 있다. 이 물체들은 처음에 정지하고 있고, 두 물체는 지면으로부터 같은 높이에 있다. 줄은 도르래들을 미끄러지지 않고 돌린다. 이 물체들을 놓은 후, 두 물체 사이의 연직 거리가 h 가 되는 순간에 물체 B 의 속력을 구하여라. (단, 중력가속도는 g 이며, 도르래의 질량중심에 대한 회전관성모멘트 $I = mR^2$ 이다. 모든 도르래의 회전축에는 마찰이 없고, 공기 저항은 무시한다.)



< 보기 >

ㄱ. $\sqrt{\frac{gh}{6}}$ ㄴ. $\sqrt{\frac{gh}{9}}$ ㄷ. $\sqrt{\frac{gh}{12}}$ ㄹ. $\sqrt{\frac{gh}{18}}$ ㅁ. $\sqrt{\frac{2gh}{45}}$

- ① ㄱ
- ② ㄴ
- ③ ㄷ
- ④ ㄹ
- ⑤ ㅁ

해설

문제 1 2024년 제1회 · 3번 · 회전 우주선의 구심가속도 — 단위 환산이 승부처

정답 ⑤

풀이

“조종석을 출입구에서 얼마나 떨어뜨려야 안전한가”는 곧 **구심가속도가 $10g$ 를 넘지 않는 거리**를 묻는 것이다. 출입구가 회전축 위에 있으므로 출입구에서의 거리가 그대로 회전반지름 r 이 된다.

① **각속도를 rad/s 로 환산한다.** 분당 60회 = 초당 1회이므로

$$f = 1 \text{ Hz}, \quad \omega = 2\pi f = 2\pi \text{ rad/s}$$

문제의 지시대로 $\pi = 3$ 을 쓰면 $\omega = 6 \text{ rad/s}$ 다.

② **구심가속도는 $a = \omega^2 r$ 이다.** 여기서 v^2/r 을 쓰면 안 된다. 회전판 위에서는 각속도가 모든 지점에서 같으므로, **축에서 멀수록 가속도가 커진다.**

$$a = \omega^2 r = 36r \text{ (SI 단위)}$$

③ **허용 한계와 비교한다.** 훈련으로 견딜 수 있는 값은 $10g = 100 \text{ m/s}^2$ 이므로

$$36r \leq 100 \implies r \leq \frac{100}{36} \approx 2.8 \text{ m}$$

선택지의 최솟값인 5 m 조차 $a = 36 \times 5 = 180 \text{ m/s}^2 = 18g$ 로 한계의 두 배에 가깝다.

r	5 m	10 m	15 m / 20 m
$a = 36r$	180 m/s ²	360 m/s ²	540 / 720 m/s ²
중력 배수	18g	36g	54g / 72g

네 경우 모두 $10g$ 를 넘으므로 어디에 앉아도 안전하지 않다. → ⑤

이 유형의 표준 절차

- 회전수(rpm, 회/분, 회/초)를 **반드시** ω [rad/s]로 환산한다. $\omega = 2\pi N/60$.
- 회전축이 어디인지 지목하고, 문제가 주는 거리가 **회전축까지의 거리**인지 확인한다.
- 각속도가 공통인 문제는 $a = \omega^2 r$, 속력이 공통인 문제는 $a = v^2/r - r$ 의존성이 정반대다.
- 마지막에 g 로 나눠 “몇 g 인지”로 바꿔 비교한다. 선택지가 “모두 아님”인 문항은 대개 이 환산에서 걸러진다.

풀이

물체는 회전축(막대)에서 거리 r 인 수평 원을 등속으로 돈다. 위쪽 실은 막대와 30° , 아래쪽 실은 막대와 60° 를 이루고, 두 실이 막대에 붙은 점 사이 거리는 h 다.

① 기하 – 반지름 r 를 h 로 나타낸다. 위 실의 길이를 d_A , 아래 실의 길이를 d_B 라 하자. 막대가 연직이므로 두 실이 연직과 이루는 각이 각각 30° , 60° 다.

$$\text{수평 : } d_A \sin 30^\circ = d_B \sin 60^\circ = r \implies d_A = \sqrt{3}d_B$$

$$\text{연직 : } d_A \cos 30^\circ = h + d_B \cos 60^\circ \implies \sqrt{3}d_B \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = h + \frac{d_B}{2}$$

정리하면 $d_B = h$, $d_A = \sqrt{3}h$ 이고

$$r = d_B \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}h$$

② 힘 – 장력이 같다는 조건을 쓴다. 두 장력을 모두 T 라 두면 (위 실은 위쪽 안으로, 아래 실은 아래쪽 안으로 당기는 것이 아니라 둘 다 막대 쪽·위쪽 성분을 가진다. 물체가 두 부착점보다 아래에 있기 때문이다.)

$$\text{연직 : } T \cos 30^\circ + T \cos 60^\circ = mg$$

$$\text{수평 : } T \sin 30^\circ + T \sin 60^\circ = m\omega^2 r$$

③ 두 식을 나눈다. 여기가 이 문항의 핵심이다. $30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$ 이므로

$$\cos 30^\circ + \cos 60^\circ = \sin 30^\circ + \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

두 괄호가 완전히 같으므로 T 뿐 아니라 각도까지 통째로 약분되어

$$m\omega^2 r = mg \implies \omega^2 = \frac{g}{r} = \frac{g}{(\sqrt{3}/2)h} = \frac{2g}{\sqrt{3}h}$$

$$\omega = \left(\frac{2g}{\sqrt{3}h} \right)^{1/2}$$

이것은 보기 ㉠이다. → ⑤

결과를 되짚어 보면 구심가속도가 정확히 g 와 같아지는 상황이다. 두 실의 장력이 같다는 조건은 곧 “합력이 연직 아래와 45° 를 이룬다”는 뜻이고, 그래서 $a_c = g$ 가 된 것이다.

이 유형의 표준 절차

1. 기하 먼저, 힘은 나중. 실 길이·반지름을 주어진 h 로 전부 표현하기 전에는 힘 방정식을 세우지 않는다.
2. 각은 항상 회전축(연직)과 이루는 각으로 통일한다. 그래야 연직 성분이 $\cos$, 수평 성분이 $\sin$ 으로 깔끔해진다.
3. 연직 식 = mg , 수평 식 = $m\omega^2 r$ 을 세운 뒤 나눈다. 장력이 소거되면서 답이 바로 나온다.
4. 답을 얻으면 $\omega^2 r$ 이 g 의 몇 배인지 확인해 물리적으로 말이 되는지 검산한다.

풀이

틀린 것을 고르는 문항임에 주의한다.

미끄러짐 없이 구르는 물체의 빗면 가속도는 $c = I/MR^2$ 하나로 결정된다.

$$a = \frac{g \sin \theta}{1 + c}, \quad t = \sqrt{\frac{2s}{a}} \propto \sqrt{1 + c}$$

M 도 R 도 약분되므로 “반지름과 질량이 같다”는 조건은 사실 **없어도 되는 조건**이다.

물체	c	$a/g \sin \theta$	도착
구	2/5	5/7 $\approx$ 0.714	1위
원판	1/2	2/3 $\approx$ 0.667	공동 2위
원기둥	1/2	2/3 $\approx$ 0.667	공동 2위
원고리	1	1/2 = 0.500	4위

ㄱ. c 가 가장 작은 것이 구(2/5)이므로 가속도가 가장 크고 가장 먼저 도착한다. → 옳은 설명

ㄴ. 원판과 속 찬 원기둥은 $I = \frac{1}{2}MR^2$ 로 **완전히 같다**. 두께는 회전축까지의 거리에 아무 영향을 주지 않기 때문이다. 따라서 두 물체는 **동시에** 도착한다. “원판이 먼저”는 틀렸다. → **틀린 설명**

ㄷ. 원기둥은 $c = 1/2$, 원고리는 $c = 1$ 이므로 시간비는

$$\frac{t_{\text{고리}}}{t_{\text{기둥}}} = \sqrt{\frac{1+1}{1+1/2}} = \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1.15$$

같지 않다. → **틀린 설명**

ㄹ. c 가 가장 큰 것이 원고리($c = 1$)이므로 가속도가 가장 작아 가장 늦게 도착한다. → 옳은 설명

틀린 것은 ㄴ, ㄷ. → ③

자주 하는 실수

“질량이 같으니까”, “반지름이 같으니까” 같은 조건에 끌려 무거운 쪽, 큰 쪽을 답으로 고르면 안 된다. 굴림 경주의 승패는 오직 **질량이 축에서 얼마나 멀리 퍼져 있는가**(c)로만 결정된다. 속 찬 것이 속 빈 것보다 항상 빠르고, 같은 c 를 가진 원판과 원기둥은 언제나 무승부다.

풀이

좌표가 엄마의 위치를 원점으로 주어졌다. 엄마 0, 영희 0.5 m, **축 1 m**, 아빠 2 m. 돌림힘을 계산할 때 쓰는 거리는 원점까지가 아니라 **회전축(받침점)까지의 거리**다.

$$d_{\text{엄마}} = |0 - 1| = 1 \text{ m}, \quad d_{\text{영희}} = |0.5 - 1| = 0.5 \text{ m}, \quad d_{\text{아빠}} = |2 - 1| = 1 \text{ m}$$

받침점을 회전축으로 잡으면 받침점이 주는 힘(수직항력)의 모멘트 팔이 0이 되어 식에서 사라진다. 엄마와 영희는 축의 왼쪽이므로 같은 방향으로 돌리고, 아빠는 오른쪽이므로 반대 방향이다.

$$\sum \tau = 0 : m_{\text{엄마}}gd_{\text{엄마}} + m_{\text{영희}}gd_{\text{영희}} = m_{\text{아빠}}gd_{\text{아빠}}$$

$$50 \times 1 + 20 \times 0.5 = M \times 1$$

$$M = 50 + 10 = 60 \text{ kg}$$

g 는 양변에 공통이므로 처음부터 지워도 된다(그래서 “무게”를 kg 단위로 바로 다뤄도 답이 같다). → ②

검산: 축을 엄마의 위치(0 m)로 옮겨도 답은 같아야 한다. 축에서의 수직항력을 $N = (50 + 20 + 60)g$ 라 하면 $20g(0.5) + 60g(2) = 10g + 120g = 130g$ 이고, $N \times 1 = 130g$ 이므로 정확히 맞는다. **회전축은 어디로 잡아도 되지만, 모르는 힘이 걸린 점을 잡는 것이 가장 빠르다.**

풀이

같은 높이 H , 같은 기울기이므로 두 빗면의 길이 s 가 같다. 둘 다 정지에서 출발하는 등가속도 운동이므로

$$s = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{a}} \Rightarrow \frac{t_B}{t_A} = \sqrt{\frac{a_A}{a_B}}$$

① 경사면 A – 마찰이 없어 구르지 않고 미끄러진다. 회전이 아예 없으므로 중력의 빗면 성분이 전부 병진에 쓰인다.

$$a_A = g \sin \theta$$

② 경사면 B – 순수 굴림. $I = 0.5MR^2$ 이므로 $c = I/MR^2 = 1/2$ 이고

$$a_B = \frac{g \sin \theta}{1 + c} = \frac{g \sin \theta}{3/2} = \frac{2}{3}g \sin \theta$$

③ 시간비.

$$\frac{t_B}{t_A} = \sqrt{\frac{a_A}{a_B}} = \sqrt{\frac{g \sin \theta}{(2/3)g \sin \theta}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

보기 ㄹ이다. → ⑤

물리적 의미로 확인해 보자. B에서는 같은 위치에너지가 병진과 회전에 $1 : c = 2 : 1$ 로 나뉜다. 즉 바닥에서의 병진 운동에너지가 A의 $2/3$ 밖에 안 되므로 속력은 $\sqrt{2/3}$ 배, 같은 거리를 가는 데 걸리는 시간은 그 역수인 $\sqrt{3/2} \approx 1.22$ 배가 된다. 구르는 쪽이 느리다 – 부호 방향이 맞는지 항상 이렇게 검증한다.

자주 하는 실수

“마찰이 있으면 에너지를 잃으니 B가 느리다”고 설명하면 반은 맞고 반은 틀리다. 순수 굴림에서 접촉점은 정지해 있으므로 정지마찰력은 일을 하지 않고, 역학적 에너지는 보존된다. B가 느린 진짜 이유는 에너지 손실이 아니라 에너지의 일부가 회전에 배분되기 때문이다. 반대로 A에서는 마찰이 없어 회전이 시작되지 않으므로 전부 병진으로 간다.

풀이

회전축을 원점으로, 막대 길이 L , 질량 M , 무게중심은 $L/2$, $I = \frac{1}{3}ML^2$.

(a) **손으로 받치고 있는 정적평형.** 회전축을 기준으로 돌림힘 합이 0이다. 회전축이 주는 힘 F_1 은 팔이 0이므로 이 식에서 저절로 빠진다.

$$T \cdot \frac{3L}{4} = Mg \cdot \frac{L}{2} \implies T = \frac{2}{3}Mg$$

이제 힘의 평형으로 F_1 을 구한다. 위로 F_1 과 T , 아래로 Mg .

$$F_1 + T = Mg \implies F_1 = Mg - \frac{2}{3}Mg = \frac{Mg}{3}$$

- ㄱ. $F_1 = Mg/2 \rightarrow$ 거짓
- ㄴ. $F_1 = Mg/3 \rightarrow$ 참

(b) **손을 치운 직후.** 이제는 평형이 아니므로 $\tau = I\alpha$ 를 쓴다.

$$\alpha = \frac{Mg(L/2)}{(1/3)ML^2} = \frac{3g}{2L}$$

무게중심은 회전축에서 $L/2$ 에 있으므로 그 가속도는

$$a_{\text{cm}} = \alpha \cdot \frac{L}{2} = \frac{3g}{4}$$

무게중심에 대한 뉴턴 제2법칙(아래를 양으로):

$$Mg - F_2 = Ma_{\text{cm}} = \frac{3}{4}Mg \implies F_2 = \frac{Mg}{4}$$

- ㄷ. $F_2 = Mg/4 \rightarrow$ 참
- ㄹ. $F_2 = Mg/5 \rightarrow$ 거짓

(c) **최저점에서의 각속력.** 각가속도가 각도에 따라 변하므로 등가속도 공식이 아니라 **에너지 보존**을 쓴다. 수평에서 최저점(연직 아래)까지 무게중심은 $L/2$ 만큼 내려간다.

$$Mg \cdot \frac{L}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}ML^2\omega^2 \implies \omega^2 = \frac{3g}{L}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

- ㄴ. $\sqrt{2g/L} \rightarrow$ 거짓
- ㄷ. $\sqrt{3g/L} \rightarrow$ 참

ㄴ, ㄷ, ㄷ. $\rightarrow$ ④

자주 하는 실수

ㄷ/ㄹ에서 “막대가 자유낙하하니 회전축은 힘을 주지 않는다($F_2 = 0$)”거나 “ $a_{\text{cm}} = \alpha L$ ”로 놓는 실수가 가장 많다. 무게중심은 축에서 $L/2$ 이고, 그 가속도 $3g/4$ 는 g 보다 **작다**. 작으므로 회전축은 여전히 위로 $Mg/4$ 만큼 떠 받치고 있어야 한다. 참고로 막대 **끝**의 가속도는 $\alpha L = 3g/2 > g$ 라서, 끝에 올려둔 동전은 막대에서 떨어져 뒤 처진다.

풀이

길이 L , 질량 M , 선밀도 $\lambda = M/L$ 인 막대가 바닥 점 O 를 축으로 넘어진다. 각 θ 일 때 전체 막대의 각 가속도는

$$\alpha = \frac{Mg(L/2) \sin \theta}{(1/3)ML^2} = \frac{3g \sin \theta}{2L}$$

① **왜 내부에 힘이 생기는가.** 막대를 O 에서 거리 h 인 곳에서 가상으로 자르고 **윗동강만** 본다. 따로 떼어 놓으면 중력이 무게중심에 걸려 무게중심 둘레의 돌림힘이 0, 즉 **혼자서는 각가속도가 0**이다. 그런데 붙어 있는 동안에는 억지로 $\alpha = 3g \sin \theta / 2L$ 로 돌려져야 한다. 그 차이를 만드는 것이 단면에 걸리는 **굽힘 모멘트** M_b 이고, 막대는 이것이 재료의 한계를 넘는 지점에서 부러진다.

② **굽힘 모멘트를 계산한다.** 윗동강의 질량은 $m = \lambda(L - h)$, 무게중심은 O 에서 $d = (L + h)/2$, 자기 무게중심에 대한 관성모멘트는 $I_{cm} = \frac{1}{12}m(L - h)^2$ 이다. 접선(회전) 방향 뉴턴 법칙과 무게중심 둘레의 회전 방정식을 연립하면

$$F_t = m\alpha d - mg \sin \theta, \quad M_b = I_{cm}\alpha + (d - h)F_t$$

$d - h = (L - h)/2$ 를 넣고 정리하면 놀랄 만큼 간단해진다.

$$M_b(h) = \frac{Mg \sin \theta}{4L^2} \cdot h(L - h)^2$$

③ **최대가 되는 위치.** $h(L - h)^2$ 을 h 로 미분하면

$$(L - h)^2 - 2h(L - h) = (L - h)(L - 3h) = 0 \implies h = \frac{L}{3}$$

$h = 0$ 과 $h = L$ 에서 $M_b = 0$ 이고 그 사이 $h = L/3$ 에서 최대($M_b^{\max} = MgL \sin \theta / 27$)이므로, 막대는 **아래에서 $L/3$ 지점에서** 부러진다. 무너지는 굴뚝이 아래쪽 $1/3$ 높이에서 꺾이는 것이 이 결과다.

• **ㄱ. $h = L/3$. → 참**

• **ㄴ. 부러지는 순간은 $M_b(L/3) = MgL \sin \theta / 27$ 이 재료의 한계를 넘는 순간이고, 그 한계값은 재질에 따라 다르다. 따라서 거꾸로 풀어 얻는 각도 θ 도 재질에 따라 달라진다 – 강한 재질일수록 더 많이 기운 뒤에 부러진다. → 거짓**

• **ㄷ. 부러진 직후를 보자. 윗동강은 이제 자유물체이고 중력은 무게중심에 걸리므로 무게중심 둘레의 돌림힘이 0, 즉 **각속도가 그대로 유지된다**($\alpha_{\text{위}} = 0$). 반면 아랫동강은 길이가 h 로 짧아졌으므로 $\alpha_{\text{아래}} = 3g \sin \theta / 2h > 3g \sin \theta / 2L$ 로 오히려 각가속도가 **커진다**. 결국 아랫부분이 윗부분보다 빠르게 회전해 앞질러 나가고 윗동강은 뒤처진다. “윗부분이 더 빨리 회전한다”는 서술은 방향이 반대다. → 거짓**

옳은 것은 **ㄱ**뿐이다. → ①

자주 하는 실수

ㄷ은 “위쪽이 더 멀리 있으니 더 빠르다”는 착각을 노린다. 여기서 비교하는 것은 **선속도**가 아니라 **각속도**다. 부러지는 순간 두 동강의 각속도는 같고, 그 뒤 아랫동강만 α 가 커지므로 각속도 차이는 아래쪽이 앞선다. 회전하는 막대가 짧아질수록 각가속도는 길이에 반비례해 커진다($\alpha \propto 1/h$)는 점을 기억하라.

풀이

줄은 A → 도르래 1(고정) → 아래로 내려가 도르래 2(움직도르래)를 감고 → 천장에 고정된다. B는 도르래 2의 회전축에 매달려 있다.

① **구속조건.** 도르래 2를 떠받치는 줄 가닥이 둘이므로, 도르래 2가 s 만큼 움직이면 줄은 $2s$ 만큼 풀린다. 따라서 도르래 2(와 B)의 속력을 v 라 하면 A의 속력은 $2v$ 다.

② **어느 쪽이 내려가는가.** 도르래 2 쪽에는 도르래($2m$)와 B(m), 합 $3m$ 이 매달려 있고 반대쪽에는 A(m)뿐이다. 다만 변위가 다르므로 무게만 비교하면 안 된다. 도르래 2 쪽이 s 내려가면 A는 $2s$ 올라가므로 위치에너지 변화는

$$\Delta U = -3mgs + mg(2s) = -mgs < 0$$

음수이므로 실제로 B와 도르래 2가 내려가고 A가 올라간다.

③ **변위 관계.** B가 s 내려가고 A가 $2s$ 올라가므로 두 물체의 연직 거리는 $3s$ 만큼 벌어진다.

$$3s = h \implies s = \frac{h}{3}$$

④ **운동에너지를 빠짐없이 센다.** 도르래 1 위의 줄 속력은 $2v$, 도르래 2 표면의 줄 속력은 (도르래 2와 함께 움직이는 좌표계에서 보면) v 이므로 $\omega_1 = 2v/R$, $\omega_2 = v/R$ 이다.

항목	식	값
A 병진	$\frac{1}{2}m(2v)^2$	$2mv^2$
B 병진	$\frac{1}{2}mv^2$	$0.5mv^2$
도르래 2 병진	$\frac{1}{2}(2m)v^2$	mv^2
도르래 2 회전	$\frac{1}{2}(mR^2)(v/R)^2$	$0.5mv^2$
도르래 1 회전	$\frac{1}{2}(mR^2)(2v/R)^2$	$2mv^2$
합계		$6mv^2$

⑤ **에너지 보존.**

$$6mv^2 = mgs = \frac{mgh}{3} \implies v^2 = \frac{gh}{18} \implies v_B = \sqrt{\frac{gh}{18}}$$

보기 ㄹ이다. → ④

연결계 에너지 보존 체크리스트

- 속력 구속: 움직도르래는 줄 속력의 **절반**. 고정도르래와 움직도르래의 ω 를 각각 따로 구한다.
- 변위 구속: “두 물체 사이 거리 h ”는 각자의 변위를 **더한** 값이다($2s + s = 3s$).
- 에너지 항: 물체 병진 + **움직도르래의 병진** + 모든 도르래의 회전. 셋 중 하나라도 빠지면 답이 커진다.
- 위치에너지는 부호를 반드시 확인한다. $\Delta U > 0$ 이 나오면 운동 방향을 반대로 가정한 것이다.

이 장의 요약

- 구심가속도** — 회전수는 반드시 rad/s로. 각속도가 공통이면 $a = \omega^2 r$ 로 축에서 멀수록 위험하고, 속력이 공통이면 $a = v^2/r$ 로 반대다.

2. **원운동의 순서** – 기하로 r 를 먼저 확정한 뒤 연직 식($= mg$)과 수평 식($= m\omega^2 r$)을 세워 나눈다. 두 실의 각이 30° – 60° 이고 장력이 같으면 $\omega^2 = g/r$.
3. **정적평형** – 모르는 힘이 걸린 점을 회전축으로 잡는다. 모멘트 팔은 **축에서 잰 거리**다.
4. **관성모멘트** – 막대 $\frac{1}{12}, \frac{1}{3}$, 원판·원기둥 $1/2$, 구 $2/5$, 구각 $2/3$, 고리 1. 평행축 정리 $I = I_{\text{cm}} + Md^2$. 원판과 원기둥은 언제나 같다.
5. **굴림** – $a = g \sin \theta / (1 + c)$, $t \propto \sqrt{1 + c}$, $v = \sqrt{2gH / (1 + c)}$. 질량·반지름은 전부 약분되고 **모양만** 순서를 정한다. 정지마찰력은 일을 하지 않는다.
6. **강체 회전** – 놓는 순간은 $\tau = I\alpha$, 나중 속도는 에너지 보존. 무게중심 가속도는 $\alpha L/2$ 이지 αL 이 아니다. 쓰러지는 막대는 굽힘 모멘트가 최대인 $h = L/3$ 에서 부러진다.

제4장 중력과 궤도 운동

최근 5회분(90문항)에서 역학은 20문항이 출제되었고, 그중 중력·궤도 운동은 2문항이다. 문항 수는 적지만 두 문항 모두 그 회차에서 **가장 어려운 축**에 속했고, 놀랍게도 **똑같은 무기 하나로** 풀린다 – **각운동량 보존과 역학적 에너지 보존을 나란히 세우는 것**이다. 출제 축은 두 가지로 좁혀진다 – (i) **속도가 위치벡터에 수직인 순간을 잡아 그 점이 근점인지 원점인지 판정하기**, (ii) **무한원에서의 충돌 매개변수 b 를 최근접거리로 번역하기**. 두 축 모두 “ L 과 E 를 두 지점에서 같다고 놓고 연립한다”는 하나의 절차로 수렴한다. 이 장은 그 절차를 만들기 위해 필요한 최소한의 궤도역학을 정리한다.

학습 목표

- 만유인력과 중력 퍼텐셜에너지 $U = -(GMm)/r$ 로부터 원궤도의 속력·주기·에너지를 유도할 수 있다.
- 중심력에서 각운동량이 보존됨을 알고, 근점·원점과 무한원에서 L 을 같은 식으로 쓸 수 있다.
- 역학적 에너지의 부호와 이심률로 궤도의 종류(원·타원·포물선·쌍곡선)를 판별할 수 있다.
- 접선 방향 속력이 바뀐 지점이 새 궤도의 근점인지 원점인지 즉시 판정할 수 있다.

4.1 만유인력과 중력 퍼텐셜에너지

질량 M, m 인 두 질점 사이에는 항상 인력이 작용한다.

$$F = G \frac{Mm}{r^2}, \quad G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$$

여기서 r 는 **두 질점의 중심 사이 거리**다. 구대칭으로 질량이 분포한 천체가 상대라면 **껍질 정리(shell theorem)**에 의해 그 천체는 전 질량이 중심에 모인 점질량처럼 행동한다. 즉 지구 밖에서는 언제나 r 를 **지구 중심으로부터의 거리**로 잡아야 하며, 지표면이 기준이 아니다. 반대로 균일한 구각 **내부**에서는 알짜 중력이 정확히 0이다 – 전자기학 제1장의 구각 결과와 완전히 같은 구조다.

중력은 보존력이므로 퍼텐셜에너지를 정의할 수 있다. 무한원을 기준($U(\infty) = 0$)으로 잡으면

$$U(r) = - \int_{\infty}^r \left(-G \frac{Mm}{r'^2} \right) dr' = - \frac{GMm}{r}$$

부호가 음수인 것이 핵심이다. 무한원에서 0이고 가까워질수록 낮아지므로, 속박된 물체는 반드시 $U < 0$ 이다. 고등학교에서 쓰던 $U = mgh$ 는 이 식을 $r = R + h$ 에서 $h \ll R$ 로 전개한 근사일 뿐이며, 궤도 문제에서는 절대 쓸 수 없다. 두 지점의 퍼텐셜에너지 차는

$$\Delta U = GMm \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

로 계산한다.

4.2 원궤도의 속력·주기·에너지

반지름 r 의 원궤도에서는 만유인력이 그대로 구심력이 된다.

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v_{\text{원}} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

궤도가 낮을수록 빠르다 ($v \propto 1/\sqrt{r}$). 주기는 $T = 2\pi r/v$ 이므로

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 \quad (\text{케플러 제3법칙})$$

에너지를 보자. 운동에너지는 위 관계에서 곧바로 나온다.

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r}, \quad U = -\frac{GMm}{r}$$
$$E = K + U = -\frac{GMm}{2r} = -K = \frac{U}{2}$$

이 세 줄이 원궤도의 전부다. $E = -K = U/2$ 라는 관계를 **비리얼 정리**라 부르며, $1/r^2$ 힘에 속박된 계에서는 시간평균으로 항상 성립한다.

여기서 경시가 좋아하는 역설이 나온다. 위성에 접선 방향으로 **가속**을 주면 에너지가 늘어 $E = -(GMm)/2r$ 에서 r 가 커지고, 그 결과 새 궤도의 평균 속력은 오히려 **느려진다**. 반대로 감속시키면 궤도가 낮아지면서 결국 더 빨라진다. “밀면 느려지고 당기면 빨라진다”는 것이다.

자주 하는 실수

$E = -(GMm)/2r$ 의 r 를 “지표면에서의 높이”로 잡는 실수가 가장 흔하다. 모든 궤도 공식의 r 는 **중심으로부터의 거리**이며, 고도 h 인 위성이라면 $r = R + h$ 다.

또 하나 $-K = -E$ 는 **원궤도에서만** 성립하는 순간 관계다. 타원에서는 K 가 위치에 따라 변하므로 근일점·원일점에서 $K = -E$ 를 쓰면 즉시 틀린다. 타원에서 항상 참인 것은 $E = -(GMm)/(2a)$ 뿐이다.

4.3 각운동량 보존과 충돌 매개변수

중력은 언제나 중심을 향하므로 중심에 대한 **토크가 0**이다. 따라서

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = \text{일정}$$

크기로 쓰면 $L = mrv \sin \phi = mrv_{\perp}$ 이고, 여기서 $v_{\perp}$ 는 속도의 **위치벡터에 수직인 성분**이다. 이것을 면적으로 번역한 것이 케플러 제2법칙이다.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{일정} \quad (\text{면적 속도 일정})$$

L 보존이 가장 강력하게 쓰이는 자리는 두 곳이다.

1. **근점·원점.** 이 두 점에서는 r 가 극값이므로 $dr/dt = 0$, 즉 속도가 위치벡터에 완전히 수직이다. 그러므로 $L = mrv$ 로 $\sin$ 없이 쓸 수 있다.
2. **무한원.** 멀리서 속력 v_{∞} 로 다가오는 물체의 진행 직선과 중심 사이의 수직거리를 **충돌 매개변수 b** 라 한다. $r \rightarrow \infty, r \sin \phi \rightarrow b$ 이므로

$$L = mv_{\infty}b$$

즉 b 는 **무한원에서 측정한 각운동량을 속력·질량으로 나눈 것에 지나지 않는다.** b 를 “최소 접근거리”로 착각하지 마라. 둘은 중력이 있는 한 결코 같지 않다.

무한원의 (v_{∞}, b) 와 최근접점의 (v_p, r_p) 를 잇는 방정식은 언제나 다음 두 줄뿐이다.

$$mv_{\infty}b = mv_p r_p, \quad \frac{1}{2}mv_{\infty}^2 = \frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{GMm}{r_p}$$

미지수 두 개, 식 두 개. 이 연립이 이 장 두 기출 문항 중 하나를 통째로 결정한다.

중심력 문제의 두 보존량 – 이것만 세우면 끝난다

1. **각운동량** $L = mrv_{\perp}$ – 속도가 $\vec{r}$ 에 수직인 지점(근점·원점·무한원의 b)을 골라 쓴다.
2. **역학적 에너지** $E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$ – 위치와 속력만 있으면 어디서든 같다.
3. 두 식을 두 지점에서 세워 연립하면 미지수 두 개(속력·거리)가 반드시 풀린다.
4. 질량 m 은 거의 항상 약분된다. 답에 m 이 남았다면 대개 계산 실수다.

4.4 타원궤도와 케플러 법칙

속박된 궤도($E < 0$)는 타원이고, 중심 천체는 그 **한 초점에** 있다(제1법칙). 장반경 a , 이심률 e 인 타원에서

$$r_{\text{근점}} = a(1 - e), \quad r_{\text{원점}} = a(1 + e), \quad r_{\text{근점}} + r_{\text{원점}} = 2a$$

에너지는 오직 장반경만으로 결정된다.

$$E = -\frac{GMm}{2a}$$

e 는 에너지에 전혀 들어가지 않는다. 즉 **길쭉하든 동그랗든 장반경이 같으면 에너지도 주기도 같다**. 주기 역시 $T^2 = 4\pi^2 a^3 / (GM)$ 로 장반경만 본다(제3법칙).

임의의 위치에서의 속력은 위 두 식을 결합한 **활력방정식(vis-viva)**으로 한 번에 나온다.

$$v^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

$a \rightarrow r$ 를 넣으면 원궤도 $v^2 = GM/r$, $a \rightarrow \infty$ 를 넣으면 탈출속도 $v^2 = 2GM/r$ 가 되어 앞 절 결과를 모두 포함한다.

이 장에서 실제로 손에 쥐고 있어야 할 결론은 다음 한 줄이다.

어떤 순간 속도가 위치벡터에 **수직**이라면, 그 점은 새 궤도의 **근점 아니면 원점**이다.
그 점에서의 속력을 그 거리의 원궤도 속력 $v_{\text{원}} = \sqrt{GM/r}$ 와 비교하기만 하면 된다.

4.5 궤도 종류의 판별 – 탈출속도와 이심률

거리 r 에서 무한원까지 도달하려면 $E \geq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \geq 0 \implies v_{\text{탈출}} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{2} v_{\text{원}}$$

탈출속도는 같은 거리의 원궤도 속력의 $\sqrt{2} \approx 1.414$ 배다. 이 두 기준 속력이 모든 판별의 눈금자다. 일반적인 이심률은

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2 M^2 m^3}}$$

로, E 의 부호가 그대로 e 를 1과 비교해 준다. 아래 표는 **속도가 위치벡터에 수직인 지점에서** 속력 v 만 알 때의 완전한 판별표다. 경시 문항의 90%는 이 표의 한 줄을 고르는 문제다.

속력 조건	에너지 E	이심률 e	궤도	그 직후의 거리
$v = 0$	$E = -(GMm)/r$	$e = 1$ (퇴화)	직선 낙하	중심으로 직행
$0 < v < v_{\text{원}}$	$E < 0$	$0 < e < 1$	타원 – 그 점이 원점	가까워진다
$v = v_{\text{원}} = \sqrt{(GM)/r}$	$E = -(GMm)/(2r)$	$e = 0$	원	변하지 않는다
$v_{\text{원}} < v < v_{\text{탈출}}$	$E < 0$	$0 < e < 1$	타원 – 그 점이 근점	멀어진다
$v = v_{\text{탈출}} = \sqrt{2}v_{\text{원}}$	$E = 0$	$e = 1$	포물선	멀어진다 ($v_{\infty} = 0$)
$v > v_{\text{탈출}}$	$E > 0$	$e > 1$	쌍곡선	멀어진다 ($v_{\infty} > 0$)

표에서 반드시 읽어야 할 두 가지. 첫째, **속력의 방향(앞으로 도는지 거꾸로 도는지)은 판별에 전혀 들어가지 않는다**. v 와 $-v$ 는 E 도 $|L|$ 도 같으므로 같은 모양의 궤도를 준다 – 도는 방향만 반대다. 둘째, “멀어진다 / 가까워진다”는 **충돌 직후의 추세**를 묻는 것이지 최종 운명이 아니다. $0 < v < v_{\text{원}}$ 이면 일단 가까워지다가 근점을 지나 다시 원래 거리로 돌아온다.

자주 하는 실수

충돌 매개변수 b 는 최소 접근거리가 아니다. 중력이 궤도를 안쪽으로 휘게 하므로 최근접거리는 언제나 b 보다 작다. 반지름 R 인 천체에 부딪히지 않을 조건은 $b > R$ 이 아니라 $b > R\sqrt{1 + v_{\text{탈출}}^2/v_{\infty}^2}$ 이며, 이 확대 효과를 **중력 집중(gravitational focusing)** 이라 한다. 느리게 다가올수록(v_{∞} 가 작을수록) 유효 표적이 훨씬 커진다. 또 하나 – **탄성충돌에서 두 물체의 질량이 같으면 속도가 그대로 교환된다**. 이 사실을 잊고 운동량·에너지 연립을 다시 푸느라 시간을 버리는 경우가 많다. 반대로 완전비탄성충돌은 “붙어서 함께 간다”이므로 운동량 보존 한 줄로 끝난다.

기출 문항

제4장 중력과 궤도 운동 수록 문항 2개. 해설은 다음 절에 있다.

문제 1 2024년 제2회 · 5번 · 원궤도 위성 충돌 후 궤도 변화

질량 m 인 물체가 태양을 중심으로 속력 v 로 등속원운동을 하고 있다. 이 때 다른 입자가 질량 M , 속력 V 를 가지고 처음 입자와 충돌했다. 충돌 순간 두 물체의 속도의 방향이 같은 직선 위에 있고, 두 물체의 질량은 태양의 질량보다 매우 작다고 가정한다. 다음 보기 중에서 충돌 직후 움직임으로 옳은 것은? (속도 부호가 반대라는 것은 방향이 반대라는 것을 뜻한다.)

〈 보기 〉

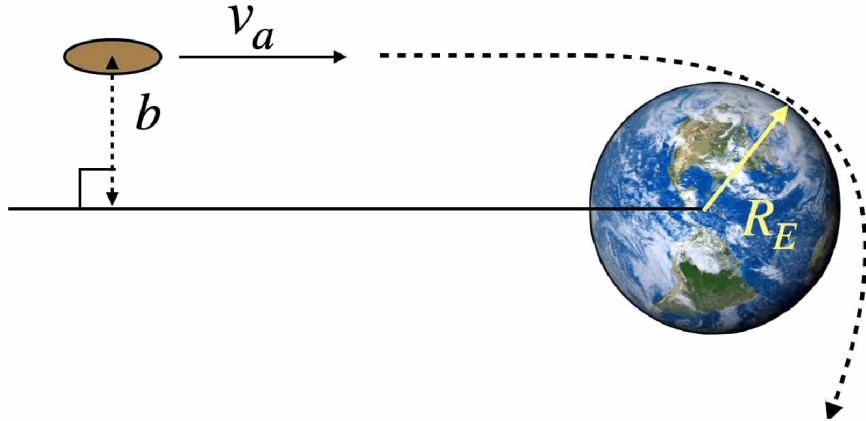
- ㄱ. $M = m, V = -v$ 이고 두 물체가 완전비탄성충돌을 하는 경우 입자는 태양에 더 가까워지는 방향으로 움직인다.
- ㄴ. $M = 2m, V = 2v$ 이고 두 물체가 완전비탄성충돌을 하는 경우 입자는 태양에서 더 멀어지는 방향으로 움직인다.
- ㄷ. $M = m, V = 2v$ 이고 두 물체가 완전탄성충돌을 하는 경우 원래 입자는 태양에 더 가까워지는 방향으로 움직인다.
- ㄹ. $M = m, V = -v$ 이고 두 물체가 완전탄성충돌을 하는 경우 원래 입자와 태양과의 거리는 동일하게 유지된다.
- ㅁ. $M = m, V = 0.5v$ 이고 두 물체가 완전탄성충돌을 하는 경우 원래 입자는 태양에서 더 멀어지는 방향으로 움직인다.

- ① ㄱ, ㄴ, ㄷ ② ㄱ, ㄴ, ㄹ ③ ㄱ, ㄷ, ㅁ
④ ㄴ, ㄹ, ㅁ ⑤ ㄷ, ㄹ, ㅁ

문제 2

2025년 제1회 · 1번 · 혜성 충돌 매개변수와 최소 접근거리

그림과 같이 질량 m_a 인 혜성이 멀리서 속도 v_a 로 지구 쪽으로 접근하고 있다. 혜성이 지구에서 아주 멀리 떨어져 있을 때, 지구와 혜성 사이의 충돌 매개변수 즉, 지구 중심에서 혜성 운동 방향과 수평인 선분과 혜성 운동 방향 사이의 거리를 b 라 하자. 혜성이 지구와 충돌하지 않을 수 있는 최소한의 충돌 매개변수 b 를 구하여라. (단, 지구의 반지름은 R_E , 질량은 M_E 이며, 만유인력 상수를 G 로 표시하며, 혜성의 크기는 무시한다.)



〈 보기 〉

ㄱ. $R_E \sqrt{1 + \frac{2GM_E}{R_E v_a^2}}$ ㄴ. $\frac{2GM_E}{v_a^2}$ ㄷ. R_E ㄹ. $\frac{\sqrt{2GM_E R_E}}{v_a}$ ㅁ. $R_E \sqrt{1 + \frac{3GM_E}{R_E v_a^2}}$

- ① ㄱ
- ② ㄴ
- ③ ㄷ
- ④ ㄹ
- ⑤ ㅁ

해설

문제 1 2024년 제2회 · 5번 · 충돌 후 궤도 변화 — ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답 ②

풀이

이 문항의 난이도는 계산이 아니라 **구조 파악**에 있다. 다섯 보기를 다 계산하려 들면 시간을 잃는다. 구조는 다음 두 단계뿐이다.

1단계 — 충돌 자체를 본다. 충돌은 순간적이므로 그 사이에 위치는 변하지 않고 중력은 무시한다. 남은 것은 1차원 충돌 공식 두 개다.

• **완전비탄성:** 두 물체가 붙는다. 운동량 보존 한 줄.

$$u = \frac{mv + MV}{m + M}$$

• **완전탄성 + 질량이 같음:** 두 속도가 그대로 맞바뀐다. 즉 원래 입자는 상대의 속도 V 를 그대로 갖는다. (연립을 풀 필요가 없다.)

2단계 — 새 속력을 원궤도 속력과 비교한다. 문제가 “충돌 순간 두 물체의 속도가 같은 직선 위에 있다”고 못 박았으므로, 충돌 직후 속도는 여전히 **접선 방향** — 즉 위치벡터에 수직이다. 그러면 4.4절의 한 줄이 그대로 적용된다: 그 점은 새 궤도의 근점 아니면 원점이다. 원래 궤도가 반지름 r 의 원궤도였으므로 그 지점의 기준 속력은 이미 주어져 있다.

$$v_{\text{원}} = v, \quad v_{\text{탈출}} = \sqrt{2}v \approx 1.414v$$

$|u| < v$ 면 그 점이 원점 → **가까워진다**. $|u| > v$ 면 그 점이 근점 → **멀어진다**. $|u| = v$ 면 원궤도 유지 → **거리 동일**. 속도의 부호(도는 방향)는 E 도 $|L|$ 도 바꾸지 않으므로 판정에 들어가지 않는다.

이제 다섯 보기를 한 줄씩 처리한다.

ㄱ. $M = m, V = -v$, 완전비탄성. $u = (mv + m(-v))/(2m) = 0$. 속력이 0이므로 각운동량도 0이고, 물체는 접선 속도 없이 정지 상태에서 놓인 셈이다. 곧바로 태양을 향해 직선으로 자유낙하한다(표의 첫 줄, 퇴화 타원). → **참**

ㄴ. $M = 2m, V = 2v$, 완전비탄성.

$$u = \frac{mv + 2m \cdot 2v}{3m} = \frac{5}{3}v \approx 1.667v$$

$u > v$ 이므로 그 점은 근점이고 멀어진다. 실제로는 $u > \sqrt{2}v$ 이므로 에너지가

$$E = \frac{1}{2}(3m)u^2 - \frac{GM_S(3m)}{r} = (3m)\frac{GM_S}{r}\left(\frac{25}{18} - 1\right) = \frac{7}{18}\frac{3mGM_S}{r} > 0$$

로 양수 — 타원도 아닌 **쌍곡선**으로 태양계를 이탈한다. 어느 쪽이든 “멀어진다”는 서술은 옳다. → **참**

ㄷ. $M = m, V = 2v$, 완전탄성. 속도 교환으로 원래 입자는 $u = 2v$. $u > \sqrt{2}v$ 이므로 $E = 2(GM_S m)/r - (GM_S m)/r = +(GM_S m)/r > 0$, 이심률 $e = 3$ 인 쌍곡선을 그리며 **멀어진다**. 보기는 “가까워진다”고 했다. → **거짓**

ㄹ. $M = m, V = -v$, 완전탄성. 속도 교환으로 원래 입자는 $u = -v$. 크기가 정확히 $v_{\text{원}}$ 이므로 궤도는 여전히 반지름 r 의 **원궤도**다. 도는 방향만 뒤집혔을 뿐 태양과의 거리는 그대로 유지된다. → **참**

□. $M = m$, $V = 0.5v$, 완전탄성. 질량이 같으므로 속도 교환, 원래 입자는 $u = 0.5v$. $u < v$ 이므로 그 점은 **원점**이고 태양에 **가까워진다**. 보기는 “멀어진다”고 했다. → **거짓** (구체적으로 $a = 4r/7$, $e = 0.75$, 근일점은 $r_{\text{근}} = a(1 - e) = r/7$ 까지 내려간다.)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ. → ②

이 유형의 표준 절차 – “충돌 + 궤도” 복합 문항

- 충돌은 **순간**이다. 위치와 퍼텐셜에너지는 변하지 않고, 속도만 바뀐다.
- 충돌 종류로 새 속도 u 를 구한다. 완전비탄성은 운동량 보존 한 줄, **질량이 같은 완전탄성은 속도 교환** – 연립하지 마라.
- 새 속도가 위치벡터에 수직인지 확인한다. 수직이면 그 점은 근점 또는 원점이다.
- $|u|$ 를 $v_{\text{원}} = \sqrt{GM/r}$ 및 $v_{\text{탈출}} = \sqrt{2}v_{\text{원}}$ 과 비교해 표에서 한 줄을 고른다.
- 부호(도는 방향)는 무시한다. E 와 $|L|$ 만이 궤도 모양을 결정한다.

자주 하는 실수

ㄷ에서 “속력이 2배가 되었으니 원심력이 커져 바깥으로 튕겨 나간다”는 식의 설명은 결론만 우연히 맞다. 정작 위험한 것은 ㄹ이다. “충돌로 속도가 줄었으니 태양의 중력에 저서 안쪽으로 떨어진다” – 여기까지는 맞다. 그런데 많은 학생이 이 대목에서 **ㄷ과 ㄹ을 한 묶음으로 보고 둘 다 참 또는 둘 다 거짓으로 처리한다**. 두 보기는 결론이 서로 반대 방향인데 서술도 각각 반대로 쓰여 있어서, 둘 다 거짓이 되는 구조다. 보기의 서술이 “가까워진다”인지 “멀어진다”인지를 계산 결과와 **한 글자씩 대조**하는 것이 이 문항에서 실제로 점수를 가르는 지점이다.

풀이

“충돌하지 않을 최소한의 b ”란, **최근접거리가 정확히 R_E 가 되는 임계 궤도의 b** 를 뜻한다. b 가 그보다 작으면 궤도가 지구 표면을 파고들고, 크면 스쳐 지나간다.

혜성이 받는 힘은 지구 중심을 향하는 중심력뿐이므로 **각운동량과 역학적 에너지가 모두 보존된다**. 두 지점을 잡는다 – 무한원(먼 곳)과 최근접점.

① **각운동량**. 무한원에서 진행 직선과 중심 사이의 수직거리가 b 이므로 $L = m_a v_a b$. 최근접점에서는 r 가 극값이라 속도가 위치벡터에 수직이므로 $L = m_a v_p R_E$. 따라서

$$m_a v_a b = m_a v_p R_E \implies v_p = \frac{v_a b}{R_E}$$

② **에너지**. 무한원에서 $U = 0$, 최근접점에서 $U = -(GM_E m_a)/R_E$ 이므로

$$\frac{1}{2} m_a v_a^2 = \frac{1}{2} m_a v_p^2 - \frac{GM_E m_a}{R_E}$$

③ **연립**. ①을 ②에 대입하고 m_a 를 약분한다(질량은 반드시 사라진다).

$$\frac{1}{2} v_a^2 = \frac{1}{2} \frac{v_a^2 b^2}{R_E^2} - \frac{GM_E}{R_E}$$

$$\frac{v_a^2 b^2}{R_E^2} = v_a^2 + \frac{2GM_E}{R_E}$$

$$b^2 = R_E^2 \left(1 + \frac{2GM_E}{R_E v_a^2} \right) \implies b_{\min} = R_E \sqrt{1 + \frac{2GM_E}{R_E v_a^2}}$$

이것이 ㄱ이다. → ①

결과 읽기. 괄호 안의 둘째 항은 정확히 $v_{\text{탈출}}^2/v_a^2$ 다($v_{\text{탈출}}^2 = 2GM_E/R_E$). 즉

$$b_{\min} = R_E \sqrt{1 + \frac{v_{\text{탈출}}^2}{v_a^2}} > R_E$$

중력이 궤도를 안쪽으로 휘게 하므로 **유효 표적 반지름이 기하학적 반지름보다 항상 크다** – 중력 집중이다. 느린 혜성일수록($v_a \rightarrow 0$) $b_{\min}$ 이 무한히 커지고, 아주 빠른 혜성이라면($v_a \gg v_{\text{탈출}}$) 중력이 휘게 할 틈이 없어 $b_{\min} \rightarrow R_E$ 로 직진 기하에 수렴한다. 이 두 극한 확인이 검산이다.

오답 보기의 정체.

- $\square = R_E$ – 중력을 아예 무시한 직진 기하. $v_a \rightarrow \infty$ 극한에서만 맞다.
- $\equiv = \sqrt{2GM_E R_E}/v_a$ – 위 식에서 1을 빠뜨린 것, 즉 $v_a \ll v_{\text{탈출}}$ 인 느린 극한. $v_a \rightarrow \infty$ 에서 0 으로 가버려 R_E 보다 작아지므로 물리적으로 불가능하다.
- $\perp = 2GM_E/v_a^2$ – 길이 차원이긴 하나 R_E 가 전혀 들어 있지 않다. 지구가 아무리 작아도 같은 답이 된다는 뜻이므로 즉시 버린다.
- $\square$ – 계수 2가 3으로 바뀐 것. 에너지식의 $-(GMm)/r$ 앞 인수를 잘못 옮긴 전형적 오답이다.

이 유형의 표준 절차 – 충돌 매개변수 문항

1. 두 지점을 정한다: **무한원**과 **최근접점**. 그 사이는 계산하지 않는다.
2. 무한원에서 $L = mv_\infty b, U = 0$. 최근접점에서 $L = mv_p r_p$ (속도 $\perp$ 위치벡터).
3. L 보존으로 v_p 를 소거하고, E 보존식 하나로 b 와 r_p 의 관계를 얻는다.
4. 표면을 스치는 조건은 $r_p = R$. 충돌 회피 조건은 $b > b_{\min}$.
5. 검산: $v_\infty \rightarrow \infty$ 면 $b_{\min} \rightarrow R, v_\infty \rightarrow 0$ 이면 $b_{\min} \rightarrow \infty$.

자주 하는 실수

b 를 **최소 접근거리**로 착각하는 것이 이 문항의 유일한 함정이며, 그 착각을 하면 ∞ 을 고르게 된다. b 는 “중력이 없었다면 스쳐 지나갔을 거리”이지 실제 최근접거리가 아니다. 또 하나, 행성 질량 m_a 가 발문에 주어져 있지만 답에는 들어가지 않는다. L 과 E 를 모두 m_a 에 비례하게 세우면 자동으로 약분되므로, **답에 m_a 가 남아 있는 보기가 있다면 계산 없이 지울 수 있다.**

이 장의 요약

1. **두 보존량이 전부다.** 중력은 중심력이므로 $L = mrv_\perp$ 와 $E = \frac{1}{2}mv^2 - (GMm)/r$ 가 함께 보존된다. 두 지점에서 두 식을 세워 연립하는 것이 이 장 모든 문항의 골격이다.
2. **속도가 위치벡터에 수직인 지점**은 근점 아니면 원점이다. 그 지점의 속력을 $v_{\text{원}} = \sqrt{GM/r}$ 와 비교하라 – 작으면 원점(가까워짐), 크면 근점(멀어짐), 같으면 원궤도(거리 유지).
3. **속력의 부호는 무의미하다.** v 와 $-v$ 는 E 와 $|L|$ 이 같으므로 같은 모양의 궤도를 준다. $v_{\text{탈출}} = \sqrt{2}v_{\text{원}}$ 을 넘으면 $E > 0$ 인 쌍곡선이다.
4. **에너지는 장반경만 본다.** $E = -(GMm)/(2a), T^2 \propto a^3$, 활력방정식 $v^2 = GM(2/r - 1/a)$. 이심률은 에너지에 들어가지 않는다.
5. **충돌 매개변수 $b \neq$ 최근접거리.** 중력 집속으로 유효 표적은 $b_{\min} = R\sqrt{1 + v_{\text{탈출}}^2/v_\infty^2} > R$ 로 커진다.
6. 충돌이 없으면 **충돌은 순간·중력은 무시**, 질량이 같은 완전탄성충돌은 **속도 교환**으로 끝낸다.