



진동과 파동

물리올림피아드 고급과정

제1장 단진동과 파동

최근 5회분(90문항)에서 진동과 파동은 5문항(5.6%)이 출제되었다. 문항 수는 많지 않지만 **매회 1문항 안팎으로 빠짐없이** 나오는 단원이어서, 버리면 그대로 한 문제를 잃는다. 출제 측은 셋으로 좁혀진다 – (i) **단진동의 각진동수를 유효질량·유효 용수철상수로 다시 세우기** (굴림이 얹힌 진동, 두 물체가 용수철로 연결된 진동), (ii) $a_{\max} = \omega^2 A$ **로 진폭의 상한을 정하는 문항** (접착력·마찰력이 버틸 수 있는 최대 진폭), 그리고 (iii) **파동의 위상 – 경로차에 의한 상쇄와 도플러 효과**다. 세 축 모두 공식을 외우는 문제가 아니라 어떤 질량·어떤 기준틀을 넣을지 고르는 문제라는 점이 공통이다.

학습 목표

- $a = -\omega^2 x$ 꼴을 알아보고 각진동수·주기·최대 속력·최대 가속도를 즉시 쓸 수 있다.
- 굴림 운동과 여러 개의 용수철이 얹힌 계에서 유효질량 m_{eff} 와 유효 용수철상수 k_{eff} 를 세울 수 있다.
- 접착력·정지마찰력이 주어졌을 때 달려가는 물체가 떨어지지 않는 최대 진폭을 구할 수 있다.
- 경로차 $(n + 1/2)\lambda$ 상쇄 조건을 능동 소음제어 같은 실제 상황에 적용할 수 있다.
- 음파 도플러(매질 기준)와 빛의 도플러(상대속도만)를 구분해 설명할 수 있다.

1.1 단진동의 정의 - $a = -\omega^2 x$

복원력이 **평형점으로부터의 변위에 비례하고 방향이 반대인** 운동을 단진동(SHM)이라 한다. 용수철이라면 $F = -kx$ 이고 뉴턴 법칙에 넣으면

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \implies a = -\frac{k}{m}x \equiv -\omega^2 x, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

여기서 결정적인 것은 오른쪽 정의식이다. 계가 용수철이든 진자든 굴림이든, 운동방정식을 정리해 $a = -(\quad)x$ 꼴이 나오면 **그 괄호 안의 값이 곧 ω^2** 다. 경시에서 새로 보는 진동계를 만났을 때 쓸 유일한 열쇠가 이것이다.

$$x = A \sin(\omega t + \varphi), \quad v = A\omega \cos(\omega t + \varphi), \quad a = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$v_{\max} = \omega A, \quad a_{\max} = \omega^2 A, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

주기는 **진폭에 무관하다**(등시성). 진폭을 두 배로 키우면 $v_{\max}$ 와 $a_{\max}$ 는 두 배가 되지만 주기는 그대로다. 단진자 $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ 도 진폭이 작을 때만 성립하는 근사임을 기억한다.

1.2 단진동의 에너지와 $K-x$ 그래프

마찰이 없으면 역학적 에너지가 보존되고, 평형점을 원점으로 잡을 때

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2, \quad K(x) = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2)$$

즉 **운동에너지를 위치의 함수로 그리면 위로 볼록한 포물선**이다. 경시에서 $K-x$ 그래프가 나오면 그림 한 장에서 세 가지를 한꺼번에 읽어야 한다.

$K-x$ 그래프에서 읽어낼 것

1. 그래프가 x 축과 만나는 두 점 $\rightarrow$ 운동의 양 끝(반환점). 두 점의 **중점이 평형위치**, 반값이 **진폭 A** .
2. 포물선의 **꼭짓점 높이** $K_{\max}$ $\rightarrow$ 계의 전체 역학적 에너지 E (평형점에서는 $U = 0$).
3. 두 값을 묶어 $k = 2K_{\max}/A^2$, 이어서 $\omega = \sqrt{k/m}$, T , $a_{\max} = \omega^2 A$ 까지 전부.

자주 하는 실수

$K-x$ 그래프의 평형위치가 **원점이라는 보장이 없다**. 2024년 제2회 3번은 그래프가 $x = 2 \text{ cm}$ 에서 $x = 4 \text{ cm}$ 사이에 놓여 평형점이 $x = 3 \text{ cm}$, 진폭이 1 cm 였다. 꼭짓점의 x 좌표를 진폭으로 착각하면 k 가 9배 어긋난다. 단위도 함께 본다 – 가로축이 cm 이면 $A = 0.01 \text{ m}$ 로 고쳐 넣어야 한다.

1.3 유효질량과 유효 용수철상수

진동계가 복잡해도 결국 $\omega = \sqrt{k_{\text{eff}}/m_{\text{eff}}}$ 한 줄로 환원된다. 두 값을 세우는 방법은 **에너지를 v 와 x 로만 쓰는 것이다.**

미끄러짐 없이 구르는 물체는 회전 운동에너지를 함께 가진다. $v = R\omega_{\text{회전}}$ 이므로

$$K = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega_{\text{회전}}^2 = \frac{1}{2}\left(M + \frac{I}{R^2}\right)v^2 \implies m_{\text{eff}} = M + \frac{I}{R^2}$$

굴러가는 물체는 같은 질량의 미끄러지는 물체보다 무겁게 행동한다 – 따라서 진동이 더 느리다. 용수철이 여럿이면 유효 용수철상수를 먼저 합친다.

상황	유효값	각진동수
미끄러지는 물체 M	$m_{\text{eff}} = M$	$\sqrt{k/M}$
구르는 원판 ($I = 1/2MR^2$)	$m_{\text{eff}} = 3M/2$	$\sqrt{2k/(3M)}$
구르는 고리 ($I = MR^2$)	$m_{\text{eff}} = 2M$	$\sqrt{k/(2M)}$
구르는 균일 구 ($I = 2/5MR^2$)	$m_{\text{eff}} = 7M/5$	$\sqrt{5k/(7M)}$
용수철 병렬 (나란히)	$k_{\text{eff}} = k_1 + k_2$	커진다
용수철 직렬 (일렬로)	$1/k_{\text{eff}} = 1/k_1 + 1/k_2$	작아진다
두 물체를 용수철로 연결	$\mu = (m_1m_2)/(m_1 + m_2)$	$\sqrt{k/\mu}$

마지막 줄이 **환산질량(reduced mass)** 이다. 무게중심이 정지한 채 두 물체가 서로를 향해 진동하는 계는 질량 μ 인 물체 하나가 벽에 매달린 것과 완전히 같다. 같은 물체 둘이면 $\mu = m/2$ 이므로 $\omega = \sqrt{2k/m}$ 로 **혼자일 때보다 $\sqrt{2}$ 배 빨라진다**. 환산질량을 쓰지 않고 풀려면, “각자가 x 만큼 움직이면 용수철은 $2x$ 늘어난다”는 점만 챙기면 된다.

1.4 진폭을 제한하는 조건 – 접착·마찰·이탈

단진동에서 가속도의 최댓값은 $a_{\max} = \omega^2 A$ 이고, 이 값은 **반환점에서** 나온다. 진동하는 덩어리에 무언가가 붙어 함께 실려 간다면, 그 부속을 끌고 가는 데 필요한 힘은

$$F_{\text{필요}} = m_{\text{떨러가는 부분}} \times a_{\max} = m_{\text{부분}} \omega^2 A$$

이고, 이 힘을 실제로 공급하는 것은 접착력·정지마찰력·수직항력이다. 공급 가능한 최대치를 $F_{\max}$ 라 하면

$$m_{\text{부분}} \omega^2 A \leq F_{\max} \implies A_{\max} = \frac{F_{\max}}{m_{\text{부분}} \omega^2}$$

전형적인 세 가지 변형은 다음과 같다.

1. **접착**: 두 물체가 풀로 붙어 있고 접착력 한계가 주어진다. $F_{\max} = \text{접착력}$.
2. **얹힌 물체**: 진동판 위에 물체가 얹혀 함께 움직인다. $F_{\max} = \mu_s mg$ 이므로 $\omega^2 A \leq \mu_s g$.
3. **연직 진동에서 튀어오름**: 수직항력 $N \geq 0$ 조건에서 $\omega^2 A \leq g$.

자주 하는 실수

ω^2 을 구할 때의 질량과 $F_{\text{필요}}$ 에 곱하는 질량은 **서로 다르다**. $\omega^2 = k/(m + M)$ 은 함께 진동하는 **전체** 질량이지만, 접착면이 전달해야 하는 힘은 **떨러가는 쪽 질량만** 곱한 $M\omega^2 A$ 다. 둘 다 전체 질량으로 쓰면 답이 4배쯤 어긋난다. 또 접착력이 필요한 구간은 두 물체가 서로 **당겨야** 하는 반주기뿐이다 – 미는 반주기에는 접촉면이 그냥 밀어주므로 접착력이 필요 없다.

1.5 파동의 기본량과 중첩 – 경로차

파동에서 진동수는 **파원**이 정하고, 속력은 **매질**이 정한다. 파장은 그 둘의 몫으로 따라온다.

$$v = f\lambda, \quad T = \frac{1}{f}$$

매질이 바뀌면 v 가 바뀌는데 f 는 변하지 않으므로 **바뀌는 것은 λ** 다. 이 순서를 뒤집지 않는다.

같은 진동수의 두 파원에서 나온 파가 한 점에서 만나면, 그 점에서의 위상차는 경로차 Δr 로 정해진다.

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta r$$

두 파원이 같은 위상일 때 (동위상 파원)

- 보강 간섭(가장 크게 들림): $\Delta r = n\lambda$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)
- 상쇄 간섭(가장 조용함): $\Delta r = (n + \frac{1}{2})\lambda = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{2}, \dots$
- 두 파원이 **역위상**이면 위 두 조건이 그대로 맞바뀐다.

능동 소음제어(active noise cancellation)가 바로 이 원리다. 소음원과 **완벽히 같은 위상**의 소리를 중간에서 내보내면, 청취 지점까지의 경로차가 반파장의 홀수배일 때 두 소리가 서로 지운다.

자주 하는 실수

“소음을 상쇄하는 스피커”라는 말에 이끌려 **상쇄 조건과 보강 조건을 거꾸로** 쓰는 실수가 잦다. 문제가 “위상까지 완벽히 같은 소리를 재생한다”고 못 박았다면 두 파원은 **동위상**이므로, 지워지려면 경로차가 $(n + 1/2)\lambda$ 여야 한다. 경로차 0(스피커를 청취자 바로 옆에 두는 경우)은 상쇄가 아니라 **소리가 두 배로 커지는** 최악의 배치다.

1.6 도플러 효과 – 소리와 빛은 기준틀이 다르다

파원이나 관측자가 움직이면 관측 진동수가 달라진다. 그런데 **음파와 빛은 근본적으로 다른 식을 따른다**.

음파. 소리는 공기라는 매질을 타고 간다. 소리의 속력 v 는 **공기에 대해** 정의된 값이므로, 공기가 특별한 기준틀 역할을 한다. 따라서 음원의 속도와 관측자의 속도가 **각각 따로** 식에 들어간다.

$$f' = f \frac{v \pm v_O}{v \mp v_S}$$

부호는 “가까워지면 진동수가 올라간다”에 맞춰 고른다 – 관측자가 다가오면 분자는 $v + v_O$, 음원이 다가오면 분모는 $v - v_S$ 다. 같은 상대속도라도 **누가 움직이는지에 따라 결과가 다르다**. 예를 들어 $v_S = u$ 로 음원이 다가오는 경우와 $v_O = u$ 로 관측자가 다가오는 경우의 f' 은 서로 같지 않다. 바람이 불어 매질 자체가 움직이면 v 를 $v \pm v_{\text{바람}}$ 으로 고쳐야 한다는 것도 여기서 나온다.

빛. 진공에는 매질이 없고, 광속은 어느 관성계에서 보아도 c 다. 특별한 기준틀이 없으므로 “광원이 움직였는지 관측자가 움직였는지”를 구별할 방법 자체가 없다. 결과는 오직 **두 사람 사이의 상대속도** $\beta = u/c$ 하나로 결정된다.

$$f' = f \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \quad (\text{서로 멀어질 때}), \quad f' = f \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad (\text{서로 가까워질 때})$$

	음파 (소리)	전자기파 (빛, 진공)
매질	있음 (공기)	없음
기준틀	매질이 기준	특별한 기준틀 없음
결정 요소	v_S 와 v_O 가 따로	상대속도 β 하나뿐
음원·관측자 대칭	비대칭 (결과가 다름)	대칭 (구별 불가)
매질이 움직이면	v 를 보정해야 함	해당 없음

자주 하는 실수

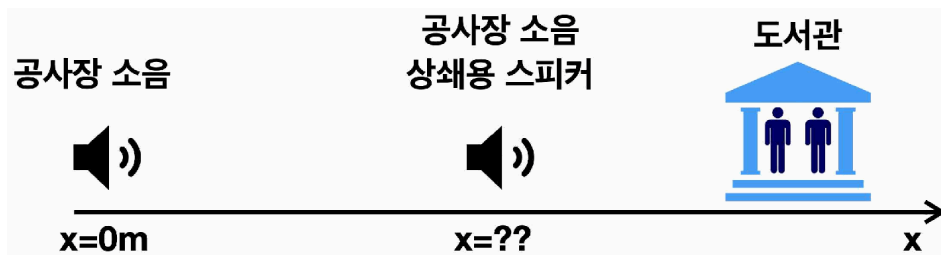
- “소리의 도플러 효과도 상대속도만 알면 결정된다”는 서술은 **거짓**이다. 음파는 매질이 기준이므로 음원이 u 로 다가오는 것과 관측자가 u 로 다가오는 것이 서로 다른 f' 을 준다.
- 멀어지는 별의 빛은 진동수가 낮아지고 파장이 길어진다 → **적색편이(red shift)**. “멀어지면 청색편이”는 방향이 뒤집힌 대표적 오답이다. 다가오는 별이 청색편이다.

기출 문항

제1장 단진동과 파동 수록 문항 5개. 해설은 다음 절에 있다.

문제 1 2024년 제1회 · 2번 · 능동 소음상쇄 스피커 위치

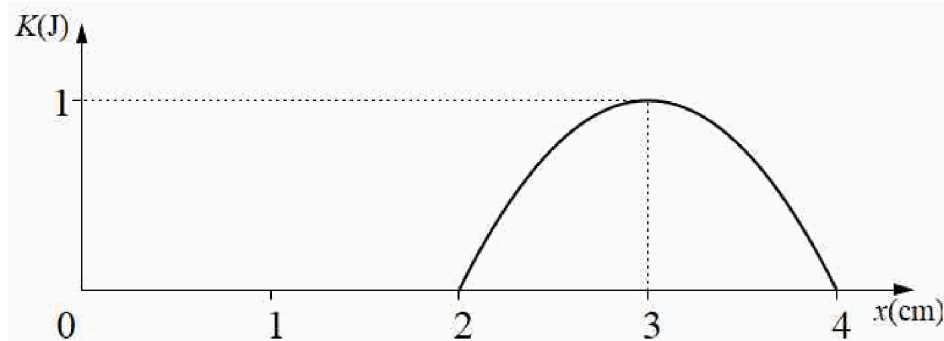
근처 공사 현장으로부터의 낮게 울리는 공사 소음에 의한 소음 피해를 겪고 있는 도서관을 생각해 보자. 공사 소음에 의한 이용객들의 불편을 해소하기 위해, 도서관에서는 소음의 능동적 상쇄를 위한 스피커를 공사 현장으로부터 일정 거리 떨어진 위치에 설치하기로 하였다. (아래 그림 참조) 이 스피커가 공사 현장으로부터의 소음과 진폭, 진동수 및 파동의 위상까지 ‘완벽히 같은’ 소음을 재생한다 하면, 이 스피커를 공사 현장과 도서관 사이 어떤 지점에 설치했을 때 가장 소음 감쇄 효과가 높은 위치를 고르시오. 단, 공기 중 음파의 진행 속력은 320 m/s 이며, 공사장 소음은 주로 진동수가 20 Hz 인 저주파가 주를 이룬다고 하자. 공사 현장과 도서관은 50 m 이상 떨어져 있으며, 공사장 소음과 스피커 소리의 세기가 거리에 따라 변하지 않는다 가정한다.



- ① 50 m
- ② 40 m
- ③ 30 m
- ④ 20 m
- ⑤ 10 m

문제 2 2024년 제2회 · 3번 · 용수철 단진동 K-x 그래프

그림은 용수철에 매달려 단진동을 하는 질량 1 kg인 물체의 운동 에너지 K 를 물체의 위치 x 의 함수로 나타낸 것이다. 이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? 단, 용수철 상수가 k , 매달린 물체의 질량이 m 인 용수철 진자의 진동 주기는 $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ 로 주어진다.



< 보기 >

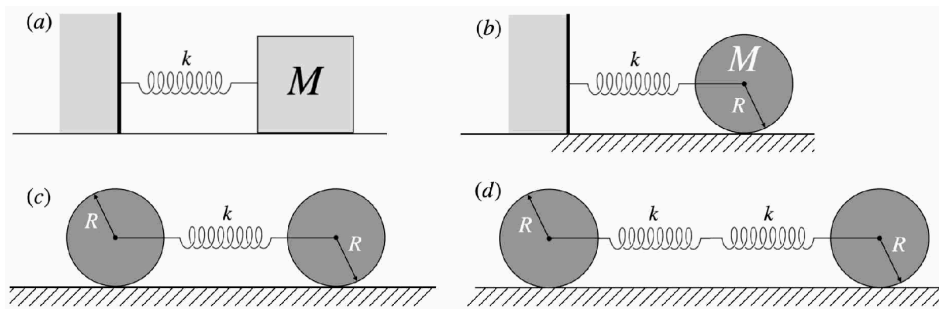
- ㄱ. 용수철 상수는 2×10^4 N/m 이다.
- ㄴ. 물체의 가속도의 최댓값은 200m/s^2 이다.
- ㄷ. 단진동의 주기는 $\frac{\sqrt{2}\pi}{100}$ s 이다.

- ① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

그림처럼 다양한 상황에서 용수철 상수 k 인 용수철로 단진동 실험을 한다.

- (a) 스프링이 박스와 벽에 연결되어, 박스는 단진동 운동을 한다.
- (b) 스프링이 원판의 질량중심과 벽에 연결되어, 원판은 미끄러짐 없이 구르면서 단진동 운동을 한다.
- (c) 스프링이 두 원판의 질량중심에 연결되고, 각 원판은 미끄러짐 없이 구르면서 단진동 운동을 한다. 진동계의 무게 중심은 움직이지 않는다.
- (d) 두 개의 스프링이 각각 원판의 질량중심에 연결되고, 각 원판은 미끄러짐 없이 구르면서 단진동 운동을 한다. 진동계의 무게 중심은 움직이지 않는다.

이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기> 에서 있는 대로 고른 것은? (단, 박스와 원판의 질량은 M 으로 동일하며, 스프링의 질량은 무시한다. 원판의 밀도는 균일하다. (a)의 경우에만 바닥과 물체 사이의 마찰이 없으며, 나머지 경우는 마찰이 존재한다.)



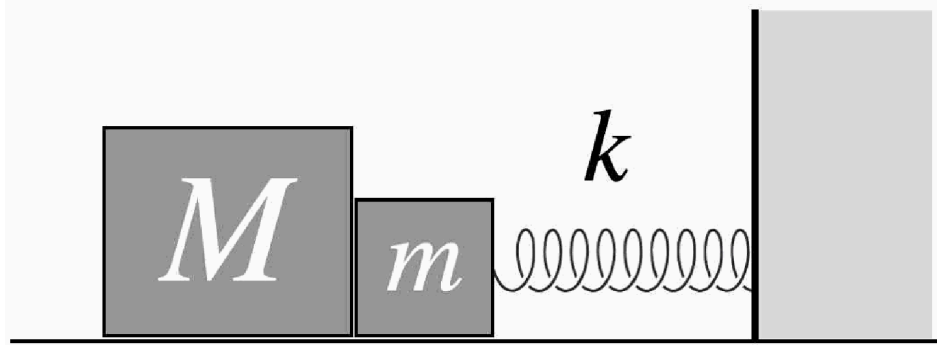
< 보기 >

- ㄱ. (a)의 각진동수 $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$ 이다.
- ㄴ. (b)의 각진동수는 (a)의 각진동수보다 크다.
- ㄷ. (c)에서 진동계의 각진동수는 (b)의 각진동수의 $\sqrt{2}$ 배이다.
- ㄹ. (d)에서 진동계의 각진동수는 (b)의 각진동수보다 더 크다.

- ① ㄱ
- ② ㄱ, ㄴ
- ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄹ

문제 4 2025년 제1회 · 6번 · 접촉된 두 물체 단진동 최대 진폭

그림은 질량이 각각 $m = 1 \text{ kg}$, $M = 3 \text{ kg}$ 인 두 물체가 풀로 접촉되어 있다. 두 물체를 반대 방향으로 300 N 으로 당기면 접촉력이 약해져 두 물체는 떨어진다. 이제 두 물체들을 용수철 상수 $k = 1000 \text{ N/m}$ 인 용수철에 연결 시킨다. 마찰이 없는 수평면 위에서 두 물체를 진동시킬 때, 물체가 떨어지지 않으면서 진동할 수 있는 진동의 최대 진폭은?



- ① 0.3미터
- ② 0.4미터
- ③ 0.5미터
- ④ 0.6미터
- ⑤ 0.7미터

문제 5 2025년 제2회 · 16번 · 빛과 소리의 도플러 효과 비교

빛과 소리의 도플러 효과에 대한 설명으로, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

- ㄱ. 진공에서 빛 도플러 효과는 광원과 관측자의 상대속도만 알면 결정된다.
- ㄴ. 소리의 도플러 효과는 매질의 운동과 무관하며, 음원과 관측자의 상대속도만 알면 결정된다.
- ㄷ. 지구에서 멀어지는 별에서 방출되는 빛의 파장은 청색편이가 된다.

- ① ㄱ
- ② ㄴ
- ③ ㄷ
- ④ ㄱ, ㄷ
- ⑤ ㄴ, ㄷ

해설

문제 1 2024년 제1회 · 2번 · 능동 소음상쇄 — 경로차 반파장의 홀수배

정답 ②

풀이

“진폭·진동수·위상까지 완벽히 같은” 소리를 낸다고 했으므로 두 파원은 **동위상**이다. 동위상 파원 둘이 한 점에서 지워지려면 그 점까지의 **경로차가 반파장의 홀수배**여야 한다.

① 파장부터 구한다.

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{320 \text{ m/s}}{20 \text{ Hz}} = 16 \text{ m}$$

② **경로차를 x 로 표현한다.** 공사장은 $x = 0$, 스피커는 x , 도서관은 $x = L$ 에 있다. 도서관까지 공사 소음은 L 만큼, 스피커 소리는 $L - x$ 만큼 진행하므로

$$\Delta r = L - (L - x) = x$$

도서관의 위치 L 이 소거된다. 그래서 “50 m 이상 떨어져 있다”는 조건은 답을 정하는 데 쓰이지 않고, 스피커가 둘 사이에 들어갈 수 있는지만 보증한다.

③ 상쇄 조건.

$$x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda = 8, 24, 40, 56, \dots \text{ m}$$

선택지 50, 40, 30, 20, 10 중 이 목록에 있는 값은 40 m 뿐이다($n = 2$). 나머지를 $\lambda = 16 \text{ m}$ 로 나누면 $50/16 = 3.125$, $30/16 = 1.875$, $20/16 = 1.25$, $10/16 = 0.625$ 로 소수부가 0.5인 것이 없다. → ②

이 유형의 표준 절차

1. $\lambda = v/f$ 를 먼저 구한다. 이 값 없이는 아무 판단도 못 한다.
2. 두 파원의 **위상 관계**를 확인한다 — 동위상인가 역위상인가. 상쇄 조건이 여기서 갈린다.
3. 청취 지점까지의 **경로차**를 문자로 쓴다. 대개 미지의 거리가 소거되어 식이 짧아진다.
4. 동위상이면 상쇄는 $\Delta r = (n + 1/2)\lambda$, 보강은 $\Delta r = n\lambda$.
5. 선택지를 λ 로 나눠 소수부가 0.5인 것을 찾는다 — 계산보다 훨씬 빠르다.

자주 하는 실수

$x = 50 \text{ m}$ 를 고르는 오답이 가장 많다. “도서관 바로 앞에 놓아야 가장 잘 지워진다”는 직관인데, 경로차가 0에 가까워지면 두 소리는 오히려 **완전히 보강**되어 소음이 두 배로 커진다. 능동 소음제어 장치가 실제로는 마이크로 들은 소리를 **뒤집어서** 내보내는 것과 달리, 이 문항은 “완벽히 같은” 소리라고 못 박았으므로 위상 반전은 오직 **경로차**로만 만들어야 한다.

풀이

그래프에서 세 정보를 먼저 확정한다.

- 곡선이 x 축과 만나는 점이 $x = 2 \text{ cm}$ 와 $x = 4 \text{ cm} \rightarrow$ 두 반환점.
- 따라서 **평형위치**는 $x = 3 \text{ cm}$, **진폭**은 $A = 1 \text{ cm} = 0.01 \text{ m}$ (원점이 평형점이 아니다).
- 꼭짓점 높이 $K_{\max} = 1 \text{ J} \rightarrow$ 계의 전체 역학적 에너지 $E = 1 \text{ J}$.

ㄱ. 반환점에서는 운동에너지가 0이고 탄성위치에너지가 전부이므로 $E = \frac{1}{2}kA^2$.

$$k = \frac{2E}{A^2} = \frac{2 \times 1 \text{ J}}{(0.01 \text{ m})^2} = 2 \times 10^4 \text{ N/m}$$

$\rightarrow$ 참

ㄴ. 최대 가속도는 반환점에서 나오며 $a_{\max} = \omega^2 A = (k/m)A$.

$$a_{\max} = \frac{2 \times 10^4}{1} \times 0.01 = 200 \text{ m/s}^2$$

(반환점에서 용수철 힘이 $kA = 2 \times 10^4 \times 0.01 = 200 \text{ N}$ 이고 질량이 1 kg 이므로 $a = F/m = 200 \text{ m/s}^2$ 로 확인해도 같다.) $\rightarrow$ 참

ㄷ. 주기는 진폭과 무관하게

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{2 \times 10^4}} = \frac{2\pi}{100\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{100} \text{ s} \approx 0.0444 \text{ s}$$

$2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$ 로 유리화하는 마지막 한 걸음이 핵심이다. $\rightarrow$ 참

ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 참이므로 $\rightarrow$ ⑤

이 유형의 표준 절차

1. 그래프가 x 축과 만나는 두 점 $\rightarrow$ 중점이 평형위치, 반값이 진폭 A . **cm** 를 **m** 로 고친다.
2. 꼭짓점 높이 $= K_{\max} = E$ (평형점에서 위치에너지가 0이므로).
3. $k = 2E/A^2 \rightarrow \omega = \sqrt{k/m} \rightarrow a_{\max} = \omega^2 A, v_{\max} = \omega A, T = 2\pi/\omega$.
4. 보기의 수치는 대개 유리화된 형태로 제시된다. $2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$ 처럼 정리해 비교한다.

풀이

네 상황 모두 $\omega = \sqrt{k_{\text{eff}}/m_{\text{eff}}}$ 로 환원한다. 균일 원판은 $I = \frac{1}{2}MR^2$ 이고, 미끄러짐 없이 구르면 $v = R\omega_{\text{회전}}$ 이므로

$$K = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}M\right)v^2 \Rightarrow m_{\text{eff}} = \frac{3}{2}M$$

(a) 마찰이 없는 바닥 위의 박스 – 회전이 없다. $m_{\text{eff}} = M$.

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

(b) 벽에 매인 용수철 + 구르는 원판. $m_{\text{eff}} = 3M/2$ 이므로

$$\omega_b = \sqrt{\frac{k}{3M/2}} = \sqrt{\frac{2k}{3M}} \approx 0.816\sqrt{\frac{k}{M}}$$

(c) 원판 두 개를 용수철 하나로 연결하고 무게중심이 고정. 각 원판이 x 만큼 움직이면 용수철의 변형은 $2x$ 이므로 각 원판이 받는 힘은 $2kx$ 다.

$$\left(\frac{3}{2}M\right)\ddot{x} = -2kx \Rightarrow \omega_c = \sqrt{\frac{2k}{3M/2}} = \sqrt{\frac{4k}{3M}}$$

(환산질량으로 풀어도 같다. $\mu = m_{\text{eff}}/2 = 3M/4$ 이므로 $\omega_c = \sqrt{k/\mu} = \sqrt{4k/(3M)}$.)

(d) 같은 배치인데 용수철이 두 개 직렬이다. 직렬이면 유효 상수가 절반이 된다.

$$\frac{1}{k_{\text{eff}}} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k} \Rightarrow k_{\text{eff}} = \frac{k}{2}, \quad \omega_d = \sqrt{\frac{k/2}{3M/4}} = \sqrt{\frac{2k}{3M}}$$

이제 보기를 판정한다.

ㄱ. (a)의 각진동수는 $\sqrt{k/M}$ 이다. → 참

ㄴ. $\omega_b = \sqrt{2k/(3M)} \approx 0.816\sqrt{k/M} < \omega_a$. 굴러가는 원판은 회전관성 때문에 더 무겁게 행동하므로 진동이 느려진다. “크다”는 서술은 방향이 반대다. → 거짓

ㄷ. $\omega_c/\omega_b = \sqrt{4k/(3M)}/\sqrt{2k/(3M)} = \sqrt{2}$. → 참

ㄹ. $\omega_d = \sqrt{2k/(3M)} = \omega_b$ 로 정확히 같다. 용수철이 두 개라서 세질 것 같지만, 직렬 연결은 상수를 절반으로 낮추고 그 절반이 (c)에서 얻은 2배 효과를 정확히 상쇄한다. → 거짓

ㄱ, ㄷ 이므로 → ③

자주 하는 실수

ㄹ이 이 문항의 승부처다. 용수철 두 개를 보고 반사적으로 $k_{\text{eff}} = 2k$ 라고 쓰면 ㄹ이 참이 되어 ⑤를 고르게 된다. 나란히 놓인 것(병렬)이 $k_1 + k_2$, 일렬로 이어진 것(직렬)이 $1/k_1 + 1/k_2$ 다. 그림에서 두 용수철이 두 원판 사이에 일렬로 놓여 있으므로 직렬이다.

풀이

$m = 1 \text{ kg}$ 이 용수철에 직접 연결되어 있고, 그 뒤에 $M = 3 \text{ kg}$ 이 풀로 붙어 함께 진동한다. 접착이 유지되는 동안 두 물체는 한 덩어리이므로

$$\omega^2 = \frac{k}{m+M} = \frac{1000 \text{ N/m}}{4 \text{ kg}} = 250 \text{ s}^{-2}, \quad a_{\max} = \omega^2 A = 250A$$

접착면이 전달해야 하는 힘은 M 만의 운동방정식에서 나온다. M 에 작용하는 유일한 수평력은 접착면이 주는 힘 F 뿐이므로

$$F = Ma = 3 \times 250A = 750A$$

이 힘이 당기는 방향으로 걸리는 반주기(용수철이 늘어나 m 이 벽 쪽으로 끌려갈 때, M 은 접착력에 매달려 따라간다)에 접착이 끊어질 수 있다. 반대 반주기에는 두 면이 서로 밀기만 하므로 접착력이 필요 없다. 조건은 최대 인장력이 300 N 이하일 것.

$$750A \leq 300 \implies A \leq 0.4 \text{ m}$$

따라서 최대 진폭은 0.4 m . $\rightarrow$ ②

검산: $A = 0.4 \text{ m}$ 일 때 $a_{\max} = 250 \times 0.4 = 100 \text{ m/s}^2$, $F = 3 \times 100 = 300 \text{ N}$ 으로 정확히 한계값이다.

자주 하는 실수

가장 흔한 오답은 접착면에 걸리는 힘을 **전체 질량**으로 계산해 $F = (m+M)\omega^2 A = kA$ 로 놓는 것이다. 그러면 $1000A \leq 300$ 에서 $A = 0.3 \text{ m}$ ①이 나온다. 접착면이 붙잡아야 하는 것은 **용수철에 직접 매이지 않은 쪽 질량 M 뿐**이다. “어느 물체가 용수철에 직접 연결되어 있고, 어느 물체가 접착면에 의지해 끌려가는가”를 그림에서 먼저 확인하는 습관을 들여야 한다.

풀이

ㄱ. 진공에는 매질이 없고 광속은 모든 관성계에서 c 로 같다. 따라서 “광원이 움직였는지 관측자가 움직였는지”를 구별할 물리적 방법이 없고, 관측 진동수는 오직 두 좌표계의 **상대속도** $\beta = u/c$ 로만 결정된다.

$$f' = f \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad (\text{멀어질 때})$$

→ 참

ㄴ. 소리는 공기라는 매질을 타고 가며, 음속 v 는 **공기에 대한 값**이다. 매질이 특별한 기준틀 노릇을 하므로 음원 속도와 관측자 속도가 비대칭적으로 들어간다.

$$f' = f \frac{v \pm v_O}{v \mp v_S}$$

같은 상대속도라도 결과가 다르다. 예를 들어 $v = 340 \text{ m/s}$ 에서 음원이 34 m/s 로 다가오면 $f' = f \cdot 340/306 \approx 1.111f$ 이지만, 관측자가 34 m/s 로 다가오면 $f' = f \cdot 374/340 = 1.100f$ 로 서로 다르다. 게다가 바람이 불어 매질 자체가 움직이면 v 를 보정해야 하므로 “매질의 운동과 무관”하다는 서술도 틀렸다. 두 군데가 모두 틀린 진술이다. → 거짓

ㄷ. 멀어지는 광원은 $\beta > 0$ 이므로 $f' < f$, 즉 $\lambda' > \lambda$ 로 파장이 길어진다. 이것이 **적색편**이다. 청색편이는 다가오는 별에서 나타난다. → 거짓

ㄱ만 옳으므로 → ①

자주 하는 실수

ㄴ은 “매질의 운동과 무관하며”와 “상대속도만 알면 결정된다”라는 **두 개의 거짓**을 한 문장에 넣어 길이로 압박하는 문항이다. 도플러 문항에서는 항상 다음 한 줄만 기억하면 된다 – **소리는 매질이 기준, 빛은 상대속도뿐.** $\sqrt{(1-\beta)/(1+\beta)}$ 라는 상대론적 형태를 외우지 못해도 이 한 줄로 ㄱ·ㄴ은 갈린다.

이 장의 요약

1. $a = -\omega^2 x$ – 새로운 진동계를 만나면 운동방정식을 이 꼴로 정리한다. 괄호 안이 곧 ω^2 이고, 나머지(T , $v_{\max} = \omega A$, $a_{\max} = \omega^2 A$)는 자동으로 따라온다.
2. **K-x 그래프** – 축과 만나는 두 점의 중점이 평형위치, 반값이 진폭, 꼭짓점 높이가 전체 에너지. $k = 2E/A^2$. 평형점이 원점이라고 가정하지 않는다.
3. **유효질량·유효 상수** – 구르는 원판은 $m_{\text{eff}} = 3M/2$ 로 **느려지고**, 무게중심이 고정된 두 물체 계는 환산질량 μ 로 **빨라진다**. 용수철은 나란하면 $k_1 + k_2$, 일렬이면 $1/k_1 + 1/k_2$.
4. **진폭의 상한** – 떨어가는 쪽 질량을 $m_{\text{부분}}$ 이라 하면 $F_{\max} = m_{\text{부분}}\omega^2 A$. ω^2 에는 **전체** 질량, 힘에는 **부분** 질량. 두 질량을 섞지 않는다.
5. **위상과 기준틀** – 동위상 파원의 상쇄는 경로차 $(n + 1/2)\lambda$. 도플러는 소리가 매질 기준(음원·관측자 비대칭), 빛은 상대속도 하나뿐이며 멀어지면 적색편이다.