2025학년도 대학 신입학생 수시모집 일반전형

면접 및 구술고사

수학

문항 · 제시문 · 예시 답안

문제 1. 움직이는 여섯 점 — 삼각형 넓이의 곱과 최대·최소
문제 2. 세 자동차의 연료 — 최적 정비와 도달 거리
문제 3. 세 공의 위치·기록 — 수열의 귀납적 정의와 등비수열

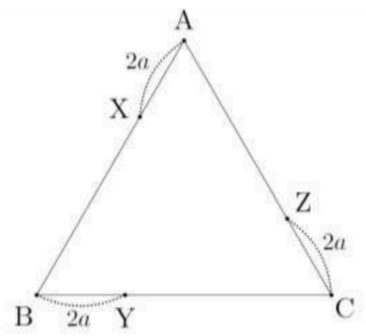
서울대학교

※ 예시 답안은 자체 풀이·검산 결과이며 학습용 참고 자료입니다.

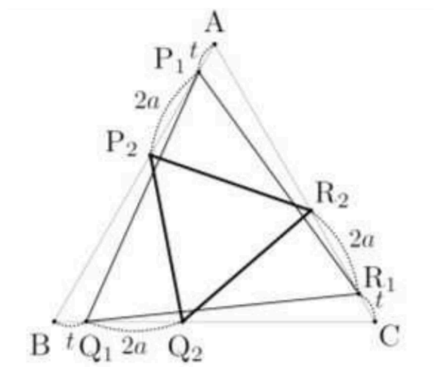
문제 1. 움직이는 여섯 점 — 삼각형 넓이의 곱과 최대·최소

문항 및 제시문

[그림 1]과 같이 한 변의 길이가 2 인 정삼각형 ABC 가 있다. 세 점 X, Y, Z 는 각각 변 AB, 변 BC, 변 CA 위의 점으로 $\overline{AX} = \overline{BY} = \overline{CZ} = 2a$ 를 만족한다. (단, a 는 $0 < a < 1$ 인 실수)



[그림 1] 삼각형 ABC 와 점 X, Y, Z



[그림 2] 시각 t 에 여섯 점의 위치

정삼각형 ABC 의 세 변 위를 여섯 점 $P_1, P_2, Q_1, Q_2, R_1, R_2$ 가 다음 [규칙]에 따라 [그림 2]와 같이 움직인다.

> (가) 두 점 P_1, P_2 는 각각 점 A, X 에서 시각 $t = 0$ 에 동시에 출발하여 변 AB 를 따라 속도 1 로 점 B 를 향해 움직인다.
>
> (나) 두 점 Q_1, Q_2 는 각각 점 B, Y 에서 시각 $t = 0$ 에 동시에 출발하여 변 BC 를 따라 속도 1 로 점 C 를 향해 움직인다.
>
> (다) 두 점 R_1, R_2 는 각각 점 C, Z 에서 시각 $t = 0$ 에 동시에 출발하여 변 CA 를 따라 속도 1 로 점 A 를 향해 움직인다.
>
> (라) 시각 $t = 2 - 2a$ 가 되어 세 점 P_2, Q_2, R_2 가 각각 점 B, C, A 에 도착하면, 여섯 점 $P_1, P_2, Q_1, Q_2, R_1, R_2$ 는 모두 이동을 멈춘다.

1–1.

시각 t $(0 \le t \le 2 - 2a)$ 에서의 삼각형 $P_1Q_1R_1$ 의 넓이를 t 에 대한 식으로 나타내시오.

1–2.

두 삼각형 $P_1Q_1R_1$ 과 $P_2Q_2R_2$ 의 넓이가 같아지는 시각 t_0 를 a 에 대한 식으로 나타내시오.

1–3.

시각 t $(0 \le t \le 2 - 2a)$ 에서의 삼각형 $P_1Q_1R_1$ 의 넓이와 삼각형 $P_2Q_2R_2$ 의 넓이의 곱을 $f(t)$ 라 하자. 닫힌구간 $[0, 2 - 2a]$ 에서 함수 $f(t)$ 가 $t = t_0$ 에서 최솟값을 가지도록 하는 실수 a 의 값의 범위를 구하시오. (단, t_0 은 문제 1–2에서 구한 값이다.)

1–4.

닫힌구간 $[0, 2 - 2a]$ 에서 함수 $f(t)$ 가 $t = t_0$ 에서 최댓값을 가지도록 하는 실수 a 의 값의 범위를 구하시오. (단, t_0 은 문제 1–2에서 구한 값이다.)

예시 답안 — 문제 1

설정 — 전진량으로 넓이를 표준화

좌표를 $A(0,0), B(2,0), C\left(1,\sqrt{3}\right)$ 로 놓는다. 세 변을 따라 각 꼭짓점에서 같은 거리 u 만큼 전진한 세 점이 이루는 삼각형은 회전대칭에 의해 정삼각형이다. 꼭짓점 A 부근에서 두 점은 A 로부터 거리 u (변 AB 위)와 거리 $2-u$ (변 CA 위)에 있고 끼인각이 $60°$ 이므로, 코사인법칙으로 한 변의 제곱은

$$u^2 + (2-u)^2 - 2u(2-u)\cos 60° = 3u^2 - 6u + 4.$$

따라서 전진량이 u 인 삼각형의 넓이는

$$S(u) = \frac{\sqrt{3}}{4}(3u^2 - 6u + 4).$$

삼각형 $P_1Q_1R_1$ 은 $u = t$, 삼각형 $P_2Q_2R_2$ 는 $u = t + 2a$ 에 해당한다.

1–1.
넓이는 $u = t$ 를 대입하여

$$\boxed{S(t) = \frac{\sqrt{3}}{4}(3t^2 - 6t + 4)}$$

1–2.
$S(u)$ 는 $u = 1$ 에 대하여 대칭인 아래로 볼록한 함수이므로 $S(t) = S(t+2a)$ 는 t 와 $t + 2a$ 가 $u = 1$ 에서 같은 거리일 때 성립한다. 즉 $t + (t + 2a) = 2$ 에서

$$\boxed{t_0 = 1 - a}$$

($0 < a < 1$ 이므로 $0 < t_0 < 1$ 로 구간 $[0, 2-2a]$ 안에 있다.)

1–3. · 1–4.
$P(u) = 3u^2 - 6u + 4 = 3(u-1)^2 + 1$ 로 두면 $f(t) = \frac{3}{16}P(t)P(t+2a)$. 대칭점을 원점으로 옮기기 위해 $w = t - (1-a)$ 로 치환하면 $t - 1 = w - a$, $t + 2a - 1 = w + a$ 이고 구간은 $w \in [-(1-a), 1-a]$ 로 원점 대칭이 된다.

$$f = \frac{3}{16}[3(w-a)^2 + 1][3(w+a)^2 + 1] = \frac{3}{16}\left[(3w^2 + 3a^2 + 1)^2 - 36a^2w^2\right].$$

$s = w^2 (\geq 0)$ 로 두면

$$h(s) = 9s^2 + 6(1 - 3a^2)s + (3a^2 + 1)^2, \qquad s \in [0, (1-a)^2].$$

$t = t_0$ 는 $w = 0$, 즉 $s = 0$ 에 대응하고, f 는 w 에 대한 짝함수이므로 t_0 는 항상 임계점이다. h 는 아래로 볼록한 이차함수이고 꼭짓점은 $s^* = \frac{3a^2-1}{3}$.

[1–3] t_0 에서 최소: $s = 0$ 이 $[0, (1-a)^2]$ 에서 h 의 최소이려면 $s^* \leq 0$, 즉 $3a^2 - 1 \leq 0$.

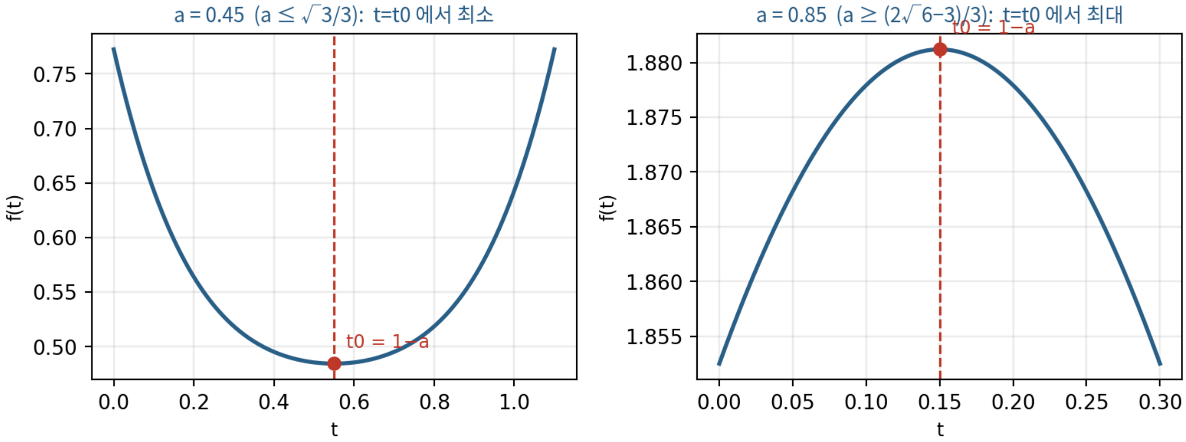
$$\boxed{0 < a \leq \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

[1–4] t_0 에서 최대: 아래로 볼록한 h 의 최대는 두 끝점 중 하나에서 나오므로, $s = 0$ 이 최대이려면 $h(0) \geq h((1-a)^2)$. 정리하면

$$(1-a)^2[9(1-a)^2 + 6 - 18a^2] \leq 0 \Rightarrow 3a^2 + 6a - 5 \geq 0.$$

$0 < a < 1$ 에서 $a \geq \frac{-3+2\sqrt{6}}{3}$.

$$\boxed{\frac{2\sqrt{6}-3}{3} \le a < 1}$$



예시 작도 — $f(t)$ 의 개형. 좌: $a \le \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이면 t_0 에서 최소, 우: $a \ge \frac{2\sqrt{6}-3}{3}$ 이면 t_0 에서 최대. 두 경계 사이 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.577, \frac{2\sqrt{6}-3}{3} \approx 0.633\right)$ 에서는 t_0 가 최대·최소 어느 쪽도 아니다.

핵심. (1) 사인·코사인법칙으로 전진량 u 의 넓이 $S(u) = \frac{\sqrt{3}}{4}(3u^2 - 6u + 4)$ 를 얻고, (2) S 의 대칭성으로 $t_0 = 1 - a$, (3) 곱 f 를 대칭변수 $s = w^2$ 의 이차함수 $h(s)$ 로 환원한 뒤 꼭짓점 위치·끝점 비교로 최소/최대 조건을 나눈다.

문제 2. 세 자동차의 연료 — 최적 정비와 도달 거리

문항 및 제시문

시각 $t = 0$ 에 수직선 위 원점에 위치한 세 대의 자동차 A, B, C 는 아래와 같이 연료를 소모하며 수직선 위를 이동한다. (단, 자동차의 크기는 무시한다.)

[자동차 A]

(ㄱ) 속도는 1 이다. 즉, 시각 t 에 자동차 A 의 위치는 t 이다.

(ㄴ) 거리 s 를 이동할 때 연료를 $4s$ 리터 소모한다.

[자동차 B, C]

(ㄷ) 먼저 속도 -1 로 수직선 위 -10 에 위치한 정비소를 향해 이동하며, 이때 거리 s 마다 연료를 $4s$ 리터 소모한다.

(ㄹ) 정비소에 도착하면 정비소에 멈추어 각각 원하는 시간만큼 정비한 뒤 다시 수직선 위를 이동한다.

(ㅁ) 정비 후 거리 s 를 이동할 때 연료를 s 리터 소모한다.

(ㅂ) 자동차 B 의 정비시간이 r_B 라면, 정비하는 동안 연료는 총 $2r_B$ 리터 소모되며 정비 후 속도 $2 + r_B$ 로 움직인다.

(ㅅ) 자동차 C 의 정비시간이 r_C 라면, 정비하는 동안 연료는 총 $2r_C$ 리터 소모되며 정비 후 속도 $2 + r_C$ 로 움직인다.

※ 정비시간이 0 인 경우(도착 후 바로 떠나는 경우)도 정비된 것으로 하며, 이때 속도는 2, 거리 s 이동 시 연료 s 리터를 소모한다. ※ 연료가 0 리터가 되면 속도가 0 이 되어 멈춘다. ※ B, C 는 연료가 충분하지 못하면 정비소에 도착하지 못한다.

2-1.

실수 t_0 $(t_0 \geq 12)$ 에 대해 자동차 B 가 시각 $t = t_0$ 에 도착할 수 있는 위치의 최댓값을 t_0 에 대한 식으로 나타내시오. 단, 자동차 B 의 연료는 충분하다고 하자.

2-2.

자동차 A 와 B 가 수직선 위의 위치 y $(y \geq 0)$ 로 이동하려고 한다. 자동차 A 보다 자동차 B 가 먼저 도착할 수 있는 y 의 범위를 구하시오. 단, 자동차 A 와 B 의 연료는 충분하다고 하자.

2-3.

실수 k $(k \geq 60)$ 에 대해 연료 k 리터를 가지고 출발한 자동차 B 가 시각 $t = 20$ 에 도착할 수 있는 위치의 최댓값을 k 에 대한 식으로 나타내시오.

2-4.

연료를 60 리터씩 가지고 있는 자동차 B 와 C 에 추가로 연료 51 리터를 나누어 넣고 출발하고자 한다. (즉, 출발할 때 B 와 C 가 가진 연료의 총합은 171 리터이다.) 시각 $t = 20$ 에 자동차 B 와 C 의 위치를 각각 y_B, y_C 라고 할 때, $y_B + y_C$ 의 최댓값을 구하시오.

예시 답안 — 문제 2

설정 — 정비소를 거친 자동차 B 의 여정

B 는 원점에서 정비소 (-10) 까지 거리 10 을 속도 1 로 이동하므로 시각 10 에 도착하고 연료 $4 \times 10 = 40$ 리터를 쓴다. 정비시간을 $r\ (\geq 0)$ 로 하면 시각 $10 + r$ 에 위치 -10, 속도 $v = 2 + r$, 남은 연료 $(\text{초기} - 40 - 2r)$ 이 되고, 이후 오른쪽으로는 1 리터당 거리 1 을 간다.

2–1.

연료가 충분하므로 시각 t_0 의 위치는

$$g(r) = -10 + (2 + r)(t_0 - 10 - r), \qquad 0 \leq r \leq t_0 - 10.$$

r 에 대해 미분하면 $g'(r) = (t_0 - 12) - 2r = 0$ 에서 $r^* = \frac{t_0 - 12}{2}$. $t_0 \geq 12$ 이므로 $r^* \geq 0$ (정비시간 조건이 붙는 이유). 대입하면

$$\boxed{g(r^*) = \frac{t_0^2 - 16t_0 + 24}{4} \quad \left(= 2t_0 - 30 + \frac{(t_0 - 12)^2}{4} \right)}$$

2–2.

B 가 y 에 도착하는 시간은 $10 + r + \frac{y+10}{2+r}$. $v = 2 + r (\geq 2)$ 로 두면

$$T_B(v) = 8 + v + \frac{y + 10}{v}, \qquad {T_B}' = 1 - \frac{y + 10}{v^2} = 0 \Rightarrow v^* = \sqrt{y + 10}.$$

$y \geq 0$ 이면 $v^* \geq \sqrt{10} > 2$ 이므로 최소시간은 $T_B = 8 + 2\sqrt{y + 10}$. A 의 도착시간은 y 이므로 B 가 먼저 도착할 조건은 $8 + 2\sqrt{y + 10} < y$. $(y > 8$ 에서) 양변을 제곱하면 $y^2 - 20y + 24 > 0$, 즉 $y < 10 - 2\sqrt{19}$ 또는 $y > 10 + 2\sqrt{19}$. $y > 8$ 과 합치면

$$\boxed{y > 10 + 2\sqrt{19}}$$

2–3.

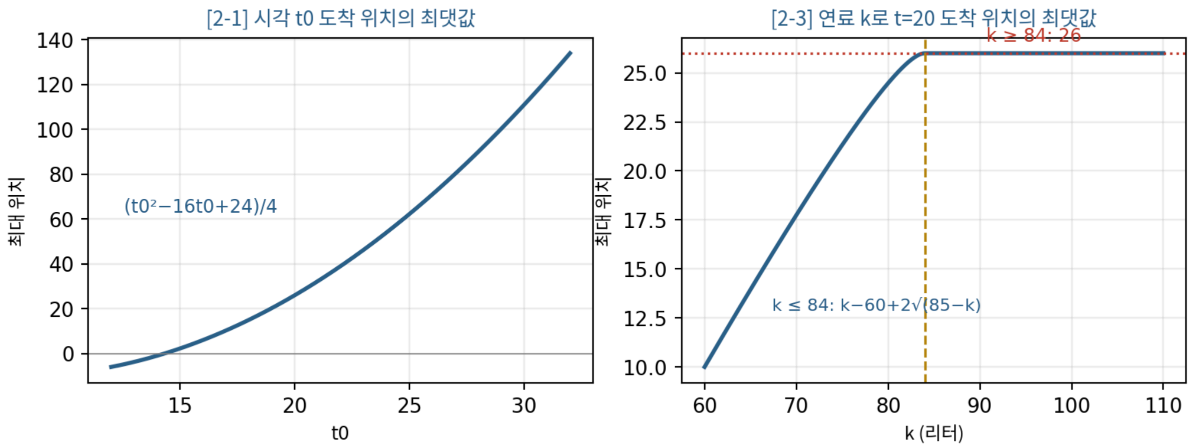
시각 20, 초기 연료 k. 정비시간 r 후 위치는 시간·연료 두 제약의 최솟값으로 정해진다.

$$\text{위치} = -10 + \min\left\{ \underbrace{(2 + r)(10 - r)}_{\text{시간 제약}}, \underbrace{k - 40 - 2r}_{\text{연료 제약}} \right\}.$$

시간 제약 $(2 + r)(10 - r) = -r^2 + 8r + 20$ 은 $r = 4$ 에서 최대 36.

- $k \geq 84$: $r = 4$ 에서도 연료가 충분$(k - 40 - 8 \geq 36)$하므로 시간 제약이 지배 → 위치 $-10 + 36 = 26$.
- $60 \leq k \leq 84$: 두 제약이 같아지는 $r = 5 - \sqrt{85 - k}\ (\in [0, 4])$ 에서 최대. 이때 위치 $= -10 + (k - 40 - 2r) = k - 60 + 2\sqrt{85 - k}$.

$$\boxed{\begin{cases} k - 60 + 2\sqrt{85 - k} & (60 \leq k \leq 84) \\ 26 & (k \geq 84) \end{cases}}$$



예시 작도 — 좌: [2-1] 도달 위치 최댓값 $(t_0^2 - 16t_0 + 24)/4$. 우: [2-3] 연료 k 에 대한 최댓값 $\varphi(k)$ 로, $k = 84$ 에서 값 26 에 도달한 뒤 일정하다.

2-4.

각 자동차의 시각 20 최대 위치를 $\varphi(k)$ (2-3의 결과)라 하자. φ 는 $k \geq 84$ 에서 최댓값 26 으로 포화된다. B 의 연료를 $60 + x, C$ 의 연료를 $111 - x$ $(0 \leq x \leq 51)$ 로 두면, 두 자동차가 모두 26 에 도달하려면 각각 연료 ≥ 84 가 필요하다. 즉 $60 + x \geq 84$ 이고 $111 - x \geq 84$ 에서 $24 \leq x \leq 27$. 총 연료 $171 \geq 84 \times 2 = 168$ 이므로 이 구간이 비어 있지 않다. 따라서

$$\boxed{y_B + y_C \text{ 의 최댓값} = 26 + 26 = 52}$$

핵심. 모든 소문항은 「정비소까지 고정비용(시간 10·연료 40) → 정비시간 r 이 속도 $2 + r$ 와 소모 $2r$ 를 동시에 결정」이라는 구조를 공유한다. 목적에 따라 (2-1) 시간, (2-2) 도착시간, (2-3) 시간·연료 제약의 최솟값, (2-4) 포화값 26 의 합으로 최적화가 이루어진다.

문제 3. 세 공의 위치·기록 — 수열의 귀납적 정의와 등비수열

문항 및 제시문

수직선 위에 세 공 P, Q, R 이 $p_1 = 1, q_1 = 2, r_1 = 3$ 에 각각 놓여있고, 각 공에는 $x_1 = 3, y_1 = 2, z_1 = 1$ 이 쓰여있다. 세 공 P, Q, R 에 대해 다음 시행을 반복한다. 시행에서 h 는 양수이다. (단, 공의 크기는 무시한다.)

> **[시행]**
>
> (가) 세 공에 쓰여있는 수들의 평균을 계산한다.
>
> (나) P 에 쓰여있는 수에 h 를 곱한 값과 P 의 현재 위치를 더한 값으로 P 의 위치를 옮긴다.
>
> (다) (가)에서 계산한 평균에서 P 에 쓰여있는 수를 뺀 값에 h 를 곱한다. 그 결과와 현재 P 에 쓰여있는 수를 더한 값을 P 에 쓰여있는 수로 고쳐 쓴다.
>
> (라) P 대신 Q 와 R 에 대해서도 (나)와 (다)를 같은 방식으로 적용하여 공의 위치와 쓰여있는 수를 바꾼다.

시행을 n 번 반복한 후 P, Q, R 의 위치를 각각 $p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1}$ 이라 하고, 각 공에 쓰여있는 수를 $x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}$ 이라 하자. (아래 그림은 $h = 0.5$ 인 경우 첫 번째 시행 전후의 위치와 쓰여있는 수의 예이다: 시행 전 $P(3)@1$, $Q(2)@2$, $R(1)@3$ → 시행 후 $P(2.5)@2.5$, $Q(2)@3$, $R(1.5)@3.5$.)

3–1.

시행을 2 회 반복한 후 세 공에 쓰여있는 수 x_3, y_3, z_3 의 평균을 구하시오.

3–2.

시행을 2023 회 반복한 후 P 에 쓰여있는 수 x_{2024} 를 h 에 대한 식으로 나타내시오.

3–3.

시행을 2023 회 반복한 후 공들의 위치가 $r_{2024} \le q_{2024} \le p_{2024}$ 를 만족하도록 하는 양수 h 의 값의 범위를 구하시오.

예시 답안 — 문제 3

설정 — 두 점화식과 「합의 보존」

쓰여있는 수의 갱신은 (다)에 의해

$$x_{n+1} = x_n + h(m_n - x_n) = (1-h)x_n + hm_n, \qquad m_n = \frac{x_n + y_n + z_n}{3}$$

이고 y, z 도 같은 꼴이다. 세 식을 더하면 $x_{n+1} + y_{n+1} + z_{n+1} = (1-h)(x_n + y_n + z_n) + 3hm_n = (x_n + y_n + z_n)$ 이므로 **쓰여있는 수들의 합은 시행에 관계없이 항상 $\mathbf{6}$**, 따라서 평균 $m_n = 2$ 로 일정하다. 그러면 각 점화식은 상수 2 를 향한 등비 수렴이 된다:

$$x_{n+1} - 2 = (1-h)(x_n - 2).$$

3–1.

합이 보존되므로 몇 번을 반복하든 세 수의 합은 6, 평균은 항상 2 이다.

$$\boxed{\frac{x_3 + y_3 + z_3}{3} = 2}$$

3–2.

$x_n - 2 = (1-h)^{n-1}(x_1 - 2)$ 이고 $x_1 - 2 = 1$ 이므로 $x_n = 2 + (1-h)^{n-1}$. 2023 회 반복 후는 $n = 2024$ 이므로

$$\boxed{x_{2024} = 2 + (1-h)^{2023}}$$

3–3.

위치는 (나)에 의해 $p_{n+1} = p_n + hx_n$ 이므로 $p_{n+1} = p_1 + h\sum_{k=1}^{n} x_k$. $x_k = 2 + (1-h)^{k-1}$ 이고 $y_k = 2$ (일정), $z_k = 2 - (1-h)^{k-1}$ 이므로, 등비수열의 합 $\sum_{k=1}^{n}(1-h)^{k-1} = \frac{1-(1-h)^n}{h}$ 를 이용하면

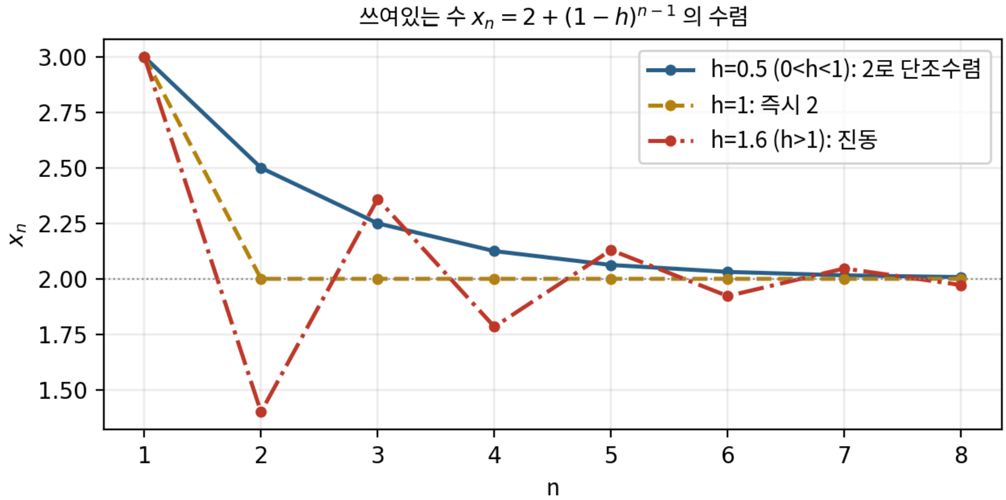
$$p_{n+1} = 2 + 2nh - (1-h)^n, \qquad q_{n+1} = 2 + 2nh, \qquad r_{n+1} = 2 + 2nh + (1-h)^n.$$

$n = 2023$ 을 넣으면 $q_{2024} = 2 + 4046h$ 이고

$$p_{2024} = q_{2024} - (1-h)^{2023}, \qquad r_{2024} = q_{2024} + (1-h)^{2023}.$$

따라서 $r_{2024} \le q_{2024} \le p_{2024}$ 는 모두 $(1-h)^{2023} \le 0$ 과 동치이다. 지수 2023 이 홀수이므로 $(1-h)^{2023} \le 0 \Leftrightarrow 1 - h \le 0$. 양수 h 이므로

$$\boxed{h \ge 1}$$



예시 작도 — $x_n = 2 + (1-h)^{n-1}$ 의 수렴 양상. $0 < h < 1$ 이면 2 로 단조 수렴, $h = 1$ 이면 즉시 2, $h > 1$ 이면 부호가 번갈아 진동한다. 위치 순서 $r \le q \le p$ 는 $(1-h)^{2023} \le 0$, 즉 $h \ge 1$ 에서 성립.

핵심. (1) 세 갱신식을 더해 「쓰여있는 수의 합 $=6$·평균 $=2$ 불변」을 얻으면 각 수열은 $x_{n+1} - 2 = (1-h)(x_n - 2)$ 의 등비수열, (2) 위치는 그 부분합이므로 등비수열의 합 공식으로 p, q, r 를 닫힌형으로 얻는다. (3) p, r 는 q 에서 $\pm(1-h)^{2023}$ 만큼 어긋나므로 순서 조건이 $(1-h)^{2023} \le 0$ 하나로 귀결된다.