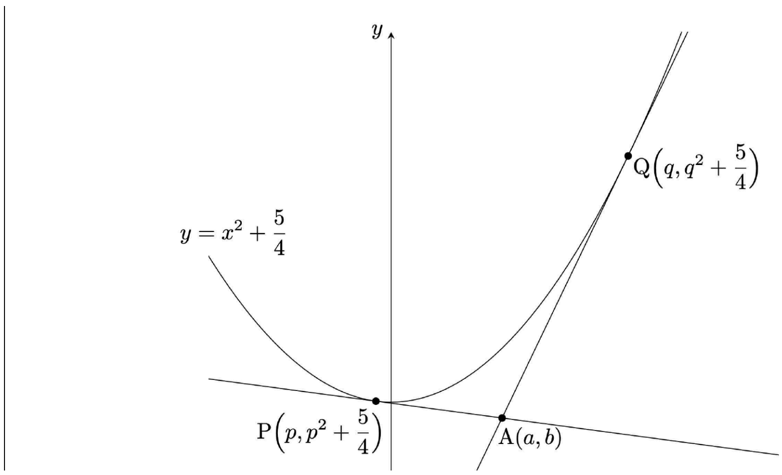
2024학년도 대학 신입학생 수시모집 일반전형

면접 및 구술고사 — 수학

문항·제시문 원문과 예시답안 재조판

문제 1 · 포물선의 두 접선과 넓이

곡선 C의 방정식은 $y = x^2 + \frac{5}{4}$ 이다. 다음 그림과 같이 점 $A(a, b)$에서 곡선 C에 서로 다른 두 접선을 그을 수 있을 때, 그 두 접점과 곡선 C의 접점을 각각 $P\left(p, p^2 + \frac{5}{4}\right), Q\left(q, q^2 + \frac{5}{4}\right)$ 라 하자. (단, $p < q$.)



곡선 $C : y = x^2 + \frac{5}{4}$와 점 $A(a, b)$에서 그은 두 접선, 접점 P, Q.

1-1. $\dfrac{\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{AQ}}^2}{\overline{\mathrm{PQ}}^2}$ **의 값을 p와 q에 대한 식으로 나타내시오.**

1-2. 점 A가 곡선 C와 만나지 않는 직선 $y = \frac{3}{2}x$ 위에 있을 때, $\dfrac{\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{AQ}}^2}{\overline{\mathrm{PQ}}^2}$ **의 값을 점 A의 x좌표 a에 대한 식으로 나타내시오.**

1-3. 1-2에서 얻은 식을 $f(a)$라 하자.

(1) 구간 $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ 에서 함수 $f(a)$의 최댓값 M과 최솟값 m을 구하시오.

(2) $f(a) = f(t)$ 를 만족하는 a가 두 개 존재하도록 하는 실수 t의 값을 모두 구하시오. (단, $t \neq 0$.)

1-4. 점 A가 원점 O일 때, 두 접선과 곡선 C로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

예시답안 · 문제 1

1-1. $y' = 2x$ 이므로 점 P에서의 접선은 $y = 2p(x - p) + p^2 + \frac{5}{4}$, 점 Q에서의 접선은 $y = 2q(x - q) + q^2 + \frac{5}{4}$ 이다. 두 접선의 교점 A는 $2p(x - p) + p^2 = 2q(x - q) + q^2$ 에서

$$a = \frac{p + q}{2}, \quad b = pq + \frac{5}{4}.$$

접점 좌표로부터

$$\overline{\mathrm{AP}}^2 = (p - a)^2(1 + 4p^2) = \left(\frac{p - q}{2}\right)^2(1 + 4p^2),$$

$$\overline{\mathrm{AQ}}^2 = (q - a)^2(1 + 4q^2) = \left(\frac{p - q}{2}\right)^2(1 + 4q^2),$$

$$\overline{\mathrm{PQ}}^2 = (q-p)^2 + \left(q^2-p^2\right)^2 = (q-p)^2\left(1+(p+q)^2\right).$$

따라서

$$\frac{\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{AQ}}^2}{\overline{\mathrm{PQ}}^2} = \frac{\frac{(p-q)^2}{4}\left(2+4p^2+4q^2\right)}{(q-p)^2\left(1+(p+q)^2\right)} = \frac{p^2+q^2+\frac{1}{2}}{(p+q)^2+1}.$$

결론:

$$\frac{\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{AQ}}^2}{\overline{\mathrm{PQ}}^2} = \frac{p^2+q^2+\frac{1}{2}}{(p+q)^2+1}.$$

(검산: $p=-1, q=2$ 대입 시 좌·우 모두 $\frac{5.5}{10}=0.55$.)

1-2. 점 $A\left(a, \frac{3}{2}a\right)$ 에서 $a=\frac{p+q}{2}$, $\frac{3}{2}a = pq + \frac{5}{4}$ 이므로 $p+q=2a$, $pq = \frac{3}{2}a - \frac{5}{4}$. 그러면

$$p^2+q^2 = (p+q)^2 - 2pq = 4a^2 - 3a + \frac{5}{2}, \quad (p+q)^2 = 4a^2.$$

따라서

$$f(a) = \frac{4a^2-3a+\frac{5}{2}+\frac{1}{2}}{4a^2+1} = \frac{4a^2-3a+3}{4a^2+1}.$$

결론:

$$f(a) = \frac{4a^2-3a+3}{4a^2+1}.$$

(직선 $y=\frac{3}{2}x$가 곡선과 만나지 않아 서로 다른 두 접선이 존재하는 범위에서 유효하다.)

1-3. (1)

$$f'(a) = \frac{(8a-3)(4a^2+1)-(4a^2-3a+3)(8a)}{\left(4a^2+1\right)^2} = \frac{12a^2-16a-3}{\left(4a^2+1\right)^2}.$$

분자 $12a^2-16a-3=(2a-3)(6a+1)=0$ 의 해는 $a=-\frac{1}{6}, a=\frac{3}{2}$. 구간 $\left[-\frac{1}{2},1\right]$ 안의 임계점은 $a=-\frac{1}{6}$ 뿐이다.

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1+\frac{3}{2}+3}{2} = \frac{11}{4}, \quad f\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{\frac{1}{9}+\frac{1}{2}+3}{\frac{1}{9}+1} = \frac{\frac{65}{18}}{\frac{10}{9}} = \frac{13}{4},$$

$$f(1) = \frac{4-3+3}{5} = \frac{4}{5}.$$

$a=-\frac{1}{6}$ 에서 극대(부호가 $+\to-$)이고, $f\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{13}{4}$ 가 최댓값, $f(1)=\frac{4}{5}$ 가 최솟값이다. 그런데 $\frac{4}{5}<\frac{3}{4}$ 인지 확인하면 $\frac{4}{5}=0.8>0.75$. 구간 끝 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{4}=2.75$, $f(1)=0.8$. 최솟값은 $a=1$의 $\frac{4}{5}$.

결론:

$$M = \frac{13}{4} \quad \left(a=-\frac{1}{6}\right), \qquad m = \frac{4}{5} \quad (a=1).$$

1-3. (2) $f(a)=f(t)$ 를 a에 대한 방정식으로 보면, $k=f(t)$ 로 두었을 때

$$(4-4k)a^2 - 3a + (3-k) = 0.$$

이 방정식이 서로 다른 두 실근 a를 가지려면 (i) 이차항 계수 $4-4k\neq 0$, 즉 $k\neq 1$ 이고 (ii) 판별식 $D=9-4(4-4k)(3-k) = -16k^2+64k-39>0$, 즉 $\frac{3}{4}<k<\frac{13}{4}$ 이어야 한다.

f의 치역은 $\left[\frac{3}{4},\frac{13}{4}\right]$ 이고 극댓값 $\frac{13}{4}$ (에서 $t=-\frac{1}{6}$), 극솟값 $\frac{3}{4}$ (에서 $t=\frac{3}{2}$), $f(t)=1$ 은 $t=\frac{2}{3}$ 에서 나온다. 따라서 두 실근이 나오지 않는 예외는 $f(t)\in\left\{\frac{3}{4},\frac{13}{4}\right\}$ (중근) 및 $f(t)=1$ (일차식) 인 경우, 즉 $t\in\left\{-\frac{1}{6},\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right\}$ 이다.

결론:

$$t \neq 0, \quad t \neq -\frac{1}{6}, \quad t \neq \frac{2}{3}, \quad t \neq \frac{3}{2}.$$

즉 이 네 값을 제외한 모든 실수 t에서 $f(a) = f(t)$ 를 만족하는 a가 정확히 두 개 존재한다. (판별식 $-16k^2 + 64k - 39$ 의 근이 $k = \frac{3}{4}, \frac{13}{4}$ 임과 $k = 1$ 에서 일차화됨을 sympy로 검증하였다.)

1-4. $A = O(0,0)$ 이면 $a = 0$ 에서 $p + q = 0, pq = -\frac{5}{4} \to p = -\frac{\sqrt{5}}{2}, q = \frac{\sqrt{5}}{2}$. 두 접선은

$$y = 2p(x-p) + p^2 + \frac{5}{4} = 2px, \quad y = 2qx \quad \left(\Rightarrow y = \pm\sqrt{5}x\right).$$

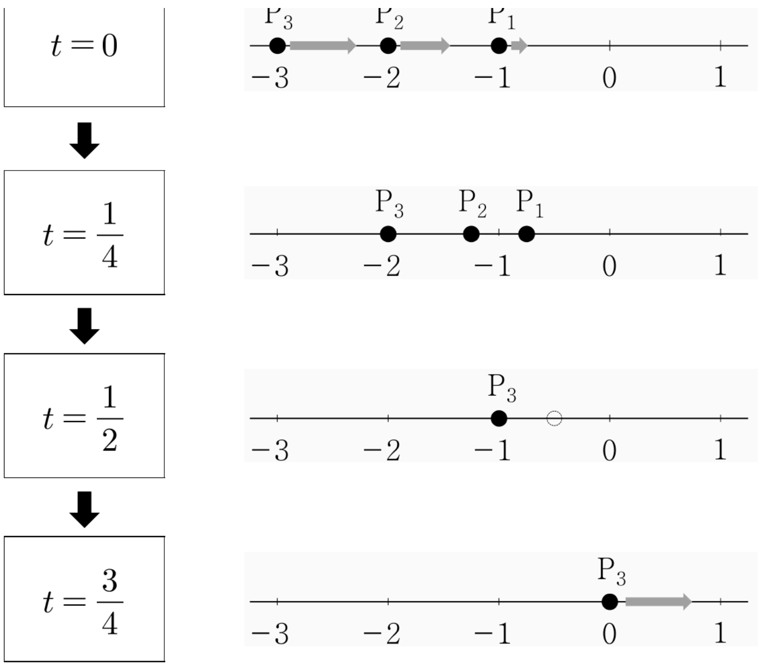
곡선과 접선으로 둘러싸인 넓이는 대칭이므로 $q = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 쪽 절반을 두 배한다. 접선 $y = 2qx$ 아래, 곡선 $y = x^2 + \frac{5}{4}$ 위의 영역을 $x \in [0, q]$ 에서 적분하면

$$2\int_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \left(\left(x^2 + \frac{5}{4}\right) - 2qx\right) \mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \left(x - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = 2 \cdot \left[\frac{\left(x - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} = 2 \cdot \frac{5\sqrt{5}}{24} = \frac{5\sqrt{5}}{12}.$$

결론: 둘러싸인 도형의 넓이는 $\dfrac{5\sqrt{5}}{12}$ 이다. (수치: ≈ 0.9317. 두 접선의 대칭성과 $(x-q)^2$ 완전제곱꼴로 검산하였다.)

문제 2 · 수직선 위 점들의 이동과 소멸

> 양의 정수 $n(n \geq 2)$ 에 대하여 수직선 위의 n개의 점 $P_1, \ldots, P_n$ 이 다음 [규칙]에 따라 움직이고 있다.
> **[규칙]**
> (가) 점 P_k 는 수직선 위의 점 $-k$ 에서 출발하여 속도 v_k 로 움직인다. 즉, 시각 t 에서 P_k 의 위치는 $-k + v_k t$ 이다.
> (나) 모든 점들은 동시에 출발하며, 점들의 속도는 $0 < v_1 < v_2 < \ldots < v_n$ 을 만족한다.
> (다) 두 개 이상의 점이 한 곳에서 만나면 그 점들은 모두 사라진다. (단, 점들이 동시에 같은 위치에 놓이면 "만난다"라고 한다.)



예시 $(n = 3, v_1 = 1, v_2 = 2, v_3 = 4)$: $t = \frac{1}{2}$ 에서 P_1, P_2 가 위치 -1 에서 만나 사라지고, P_3 는 계속 움직인다.

2-1. $n=5$ **인 경우, 다섯 점의 속도가** $v_1=1, v_2=4, v_3=6, v_4=18, v_5=20$ **으로 주어질 때, 사라지지 않고 계속 움직이는 점을 구하시오.**

2-2. $n=6$ **인 경우,** $v_1=13, v_2=15, v_3=16, v_4=17, v_5=22, v_6=26$ **으로 주어질 때, 원점을 통과한 뒤 사라지는 점의 개수를 구하시오.**

2-3. $n=4$ **인 경우,** $v_1=12, v_2=3a, v_3=a+26, v_4=39$ **이고 실수** a**의 값의 범위는** $4<a<13$ **이다.**
(1) 가장 먼저 사라지는 점들을 a의 값의 범위에 따라 구하시오.
(2) 두 개의 점만 원점을 통과한 뒤 사라지도록 하는 a의 값의 범위를 구하시오. (단, 어떤 점이 원점에서 다른 점과 만나 사라졌다면, 이 점은 원점을 통과하지 못한 것으로 한다.)

예시답안 · 문제 2

풀이 원리. 점 P_i, P_j $(i<j)$의 위치가 같아지는 시각은 $-i+v_it=-j+v_jt$ 에서 $t_{ij}=\frac{i-j}{v_i-v_j}=\frac{j-i}{v_j-v_i}>0$. 시각을 진행시키며 가장 이른 충돌부터 처리하되, 같은 시각·같은 위치에 모인 점은 (2개든 3개든) 모두 사라진다. 사라진 점은 이후 충돌 판정에서 제외한다.

2-1. 충돌 시각을 계산하면 $t_{34}=\frac{1}{18-6}=\frac{1}{12}$ (위치 $-\frac{5}{2}$)에서 P_3, P_4 가 먼저 만나 사라지고, $t_{25}=\frac{3}{20-4}=\frac{3}{16}$ (위치 $-\frac{5}{4}$)에서 P_2, P_5 가 만나 사라진다. 남는 점은 P_1 뿐이며, 다른 상대가 모두 사라져 더 이상 만날 수 없으므로 계속 움직인다.

결론: 사라지지 않고 계속 움직이는 점은 P_1 이다.

2-2. 충돌을 시각순으로 처리하면:

$$t=\frac{1}{5}: P_4, P_5 \quad \text{위치} \quad -\frac{3}{5} \text{ 에서 소멸 (원점 왼쪽)},$$

$$t=\frac{3}{10}: P_3, P_6 \quad \text{위치} \quad \frac{9}{5} \text{ 에서 소멸 (원점 통과 후)},$$

$$t=\frac{1}{2}: P_1, P_2 \quad \text{위치} \quad \frac{11}{2} \text{ 에서 소멸 (원점 통과 후)}.$$

원점을 통과$(x>0)$한 뒤 사라지는 점은 P_1, P_2, P_3, P_6 의 4개이다.

결론: 원점을 통과한 뒤 사라지는 점은 4개이다.

2-3. (1) 속도가 $v_1=12, v_2=3a, v_3=a+26, v_4=39$ 이므로 이른 충돌 후보는

$$t_{12}=\frac{1}{3(a-4)}, \quad t_{23}=\frac{1}{26-2a}.$$

$t_{12}=t_{23}$ 는 $5a-38=0$, 즉 $a=\frac{38}{5}$ 에서 성립한다.

- $4<a<\frac{38}{5}$ 이면 $t_{23}<t_{12}$ 이므로 $\boldsymbol{P_2, P_3}$ 가 가장 먼저 사라진다.
- $a=\frac{38}{5}$ 이면 세 점이 동시에 같은 위치에서 만나 $\boldsymbol{P_1, P_2, P_3}$ 가 함께 사라진다.
- $\frac{38}{5}<a<13$ 이면 $t_{12}<t_{23}$ 이므로 $\boldsymbol{P_1, P_2}$ 가 가장 먼저 사라진다.

2-3. (2) 충돌 위치를 a의 식으로 나타내면 P_1P_2 충돌 위치 $=\frac{8-a}{a-4}$, P_2P_3 충돌 위치 $=\frac{52-7a}{2(a-13)}$ 이다.

- P_2P_3 가 원점에서 만나는 것은 $52-7a=0$, 즉 $a=\frac{52}{7}$.
- P_1P_2 가 원점에서 만나는 것은 $8-a=0$, 즉 $a=8$.

경우를 나누면, 원점을 통과$(x>0)$한 뒤 사라지는 점의 개수는

$$4<a\le\frac{52}{7}: 2\text{ 개 } (P_1, P_4), \qquad \frac{52}{7}<a<8: 4\text{ 개 (단 } a=\frac{38}{5}\text{ 은 3개)}, \qquad 8\le a<13: 2\text{ 개}.$$

따라서 **두 개의 점만** 원점을 통과한 뒤 사라지도록 하는 a의 범위는

$$4<a\le\frac{52}{7} \quad \text{또는} \quad 8\le a<13.$$

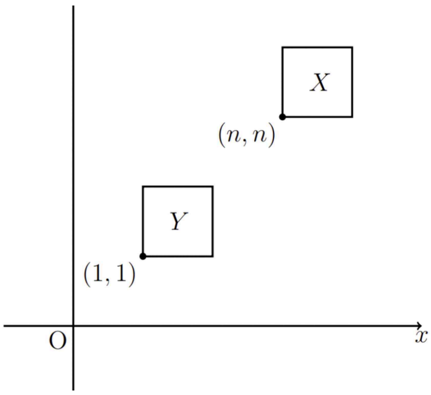
결론:

$$4 < a \le \frac{52}{7} \quad \text{또는} \quad 8 \le a < 13.$$

(사건 구동 시뮬레이션으로 경계 $a = \frac{52}{7}, \frac{38}{5}, 8$ 전후를 정확히 검증하였다.)

문제 3 · 두 정사각형과 직선, 정적분

다음 그림과 같이 양의 정수 $n(n \ge 3)$ 에 대하여 점 (n, n), $(n+1, n)$, $(n+1, n+1)$, $(n, n+1)$ 을 꼭짓점으로 하는 정사각형 X와 점 $(1,1)$, $(2,1)$, $(2,2)$, $(1,2)$ 를 꼭짓점으로 하는 정사각형 Y가 좌표평면 위에 있다.



두 정사각형 X(왼쪽 아래 꼭짓점 (n, n))와 Y(왼쪽 아래 꼭짓점 $(1, 1)$).

3-1. 실수 a에 대하여 기울기가 a인 직선 $y = ax + b$ 가 X와 적어도 한 점에서 만나기 위한 y절편 b의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

3-2. 3-1에서 구한 b의 최댓값을 $p(a)$, 최솟값을 $q(a)$라 하자. 함수 $y = p(x)$와 $y = q(x)$ 에 대하여 다음 정적분의 값을 구하시오.

$$\int_{-3}^{2} (p(x) - q(x))\, dx.$$

3-3. 실수 a에 대하여 기울기가 a인 직선 $y = ax + b$ 가 Y와 적어도 한 점에서 만나기 위한 y절편 b의 최댓값을 $r(a)$, 최솟값을 $s(a)$라 하자. 네 함수 $y = p(x)$, $y = q(x)$, $y = r(x)$, $y = s(x)$ 의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, S_3의 값을 구하시오.

3-4. 극한값 $\lim_{n\to\infty} nS_n$ 을 구하시오. (단, S_n은 3-3에서 제시한 넓이이다.)

예시답안 · 문제 3

3-1. 직선 $y = ax + b$ 가 정사각형 X (범위 $n \le x \le n+1$, $n \le y \le n+1$)와 만나려면 $b = y - ax$ 가 X의 네 꼭짓점에서의 값 사이에 있어야 한다. 기울기 $a \ge 0$ 이면 왼쪽·위 꼭짓점 $(n, n+1)$ 에서 b가 최대, 오른쪽·아래 꼭짓점 $(n+1, n)$ 에서 최소이고, $a < 0$ 이면 반대 꼭짓점에서 나온다. 정리하면

$$p(a) = \begin{cases} n+1-an & (a \ge 0) \\ n+1-a(n+1) & (a < 0) \end{cases}, \quad q(a) = \begin{cases} n-a(n+1) & (a \ge 0) \\ n-an & (a < 0) \end{cases}.$$

결론: 최댓값 $p(a)$, 최솟값 $q(a)$ 는 위와 같고, 특히

$$p(a) - q(a) = 1 + |a|.$$

(이 차는 n에 무관하다.)

3-2. 피적분함수는 $p(x) - q(x) = 1 + |x|$ 이므로

$$\int_{-3}^{2}(1+|x|)\,\mathrm{d}x=\int_{-3}^{2}1\,\mathrm{d}x+\int_{-3}^{0}(-x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}x\,\mathrm{d}x.$$

각 항은 $5, \frac{9}{2}, 2$ 이므로 합은 $5+\frac{9}{2}+2=\frac{23}{2}$ 이다.

결론:

$$\int_{-3}^{2}(p(x)-q(x))\,\mathrm{d}x=\frac{23}{2}.$$

(수치: $=11.5.\ 1+|x|$ 를 부호별로 나누어 sympy로 검산하였다.)

3-3. 정사각형 Y (범위 $1\le x\le 2, 1\le y\le 2$)에 대해 같은 방법으로

$$r(a)=\begin{cases}2-a & (a\ge 0)\\ 2-2a & (a<0)\end{cases},\quad s(a)=\begin{cases}1-2a & (a\ge 0)\\ 1-a & (a<0)\end{cases}.$$

네 직선 그래프 p,q (정사각형 X)와 r,s (정사각형 Y)는 $a\ge 0$ 영역에서 서로 교차하며 사각형 하나를 이룬다. 교점은

$$p\ \texttt{sect}\ r: x=1,\quad q\ \texttt{sect}\ r: x=\frac{n-2}{n},\quad q\ \texttt{sect}\ s: x=1,\quad p\ \texttt{sect}\ s: x=\frac{n}{n-2}.$$

이 네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이를 신발끈 공식으로 계산하면

$$S_n=\frac{4(n-1)}{n(n-2)}.$$

따라서

$$S_3=\frac{4\cdot 2}{3\cdot 1}=\frac{8}{3}.$$

결론:

$$S_3=\frac{8}{3}.$$

(신발끈 공식과 수치 시뮬레이션으로 $S_3=2.667$ 을 교차 검증하였다.)

3-4. $nS_n=n\cdot\frac{4(n-1)}{n(n-2)}=\frac{4(n-1)}{n-2}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}nS_n=\lim_{n\to\infty}\frac{4(n-1)}{n-2}=4.$$

결론:

$$\lim_{n\to\infty}nS_n=4.$$

(수치: $n=1000$ 에서 $nS_n\approx 4.004$ 로 수렴을 확인하였다.)

문제 4 · 동전 패턴 선택 게임

앞면이 나올 확률이 p, 뒷면이 나올 확률이 q인 동전이 있다. (단, $0<p<1$ 이고 $q=1-p$.) 이 동전을 던져서 앞면이 나오면 H, 뒷면이 나오면 T라고 나타낸다. 주어진 양의 정수 $n(n\ge 3)$ 에 대해 두 선수 A와 B가 다음 규칙을 따르는 게임을 한다.

[규칙]

(가) A와 B는 카드 HH, HT, TH, TT 중 1장씩 선택한다. (단, A와 B는 서로 다른 카드를 선택한다.)

(나) 심판이 동전을 반복하여 던지다가 어느 선수가 선택한 카드에 적힌 것과 동일하게 나오는 순간, 해당

카드를 선택한 선수를 승리자로 선언하고 동전 던지기를 멈춘다.
(다) 동전을 n번 던졌을 때까지 승자가 없는 경우 무승부를 선언하고 동전 던지기를 멈춘다.

A의 승리 확률을 a_n, B의 승리 확률을 b_n, 무승부 확률을 c_n이라 하자.

2-1. $n = 3$ **이고** $p = \frac{1}{4}$ **인 경우, A와 B가 각각 HT와 TH를 선택했을 때** a_3**과** b_3**을 구하시오.**

2-2. 주어진 양의 정수 $n(n \geq 3)$ **에 대하여 A와 B가 각각 HT와 TH를 선택했을 때,** $a_n = b_n$ **이 성립하도록 하는** p**를 모두 구하시오.**

2-3. A와 B가 각각 HH와 TH를 선택했다. 두 극한값 $\lim_{n\to\infty} a_n$ **과** $\lim_{n\to\infty} b_n$ **이 같도록 하는** p**를 구하고, 그때의** p**의 값에 대하여** $a_m > b_m$ **이 성립하도록 하는** $m(m \geq 3)$ **의 범위를 구하시오.**

2-4. 규칙 (가)를 변형하여 선택할 수 있는 카드에 HHT를 추가하자. (단, 나머지 규칙은 동일하다.) A는 HHT를, B는 TH를 선택했다. 두 극한값 $\lim_{n\to\infty} a_n$ **과** $\lim_{n\to\infty} b_n$ **이 같도록 하는** p**를 구하고, 그때의** p**의 값에 대하여** $a_m < b_m$ **이 성립하도록 하는** $m(m \geq 3)$ **의 범위를 구하시오.**

예시답안 · 문제 4

2-1. $n = 3, p = \frac{1}{4}, q = \frac{3}{4}$. A는 HT, B는 TH. 길이 ≤ 3 인 모든 던지기 결과에서 먼저 완성되는 패턴을 판정하여 확률을 합한다. HT가 먼저 나오는 경우와 TH가 먼저 나오는 경우를 열거하여 $p = \frac{1}{4}$ 를 대입하면

$$a_3 = \frac{15}{64}, \qquad b_3 = \frac{21}{64}.$$

결론: $a_3 = \frac{15}{64}, \quad b_3 = \frac{21}{64}$. (모든 길이 ≤ 3 열거로 검산.)

2-2. A=HT, B=TH 일 때 $a_n - b_n$ 을 전개하면 공통 인수 $p(p-1)(2p-1)$ 을 가진다. 예를 들어

$$n = 3 : a_3 - b_3 = -p(p-1)(2p-1), \quad n = 5 : a_5 - b_5 = -p(p-1)(2p-1)(p^2 - p + 3), \quad \ldots$$

$0 < p < 1$ 에서 $p \neq 0, p - 1 \neq 0$, 그리고 나머지 인수는 부호가 일정하므로, $a_n = b_n$ 이 되는 것은 오직 $2p - 1 = 0$ 일 때이다.

결론:

$$p = \frac{1}{2}.$$

(모든 $n \geq 3$ 에서 성립함을 $n = 3, \ldots, 6$ 로 확인.)

2-3. A=HH, B=TH. 무한 시행에서의 승리 확률은 흡수 마르코프 연쇄로

$$\lim_{n\to\infty} a_n = p^2, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = 1 - p^2.$$

두 극한이 같으려면 $p^2 = 1 - p^2$, 즉 $p^2 = \frac{1}{2} \to p = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $(0 < p < 1)$.

이 p에서 유한 m에 대한 값을 보면 A=HH 의 승리 확률은 임의의 $m \geq 3$ 에서 $a_m = p^2 = \frac{1}{2}$ 로 **일정**하고, B=TH 는 b_m 이 $\frac{1}{2}$ 로 아래에서 증가하며 수렴한다 $(b_3 \approx 0.414, b_4 \approx 0.475, \ldots)$. 따라서 항상 $a_m > b_m$.

결론: $p = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이고, 이때 **모든** $\boldsymbol{m \geq 3}$ 에서 $a_m > b_m$ 이 성립한다.

2-4. A=HHT, B=TH (HHT 카드 추가). 무한 시행 극한은 흡수 마르코프 연쇄로

$$\lim_{n\to\infty} a_n = p^2, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = 1 - p^2.$$

두 극한이 같을 조건은 2-3과 동일하게 $p = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

이 p에서 A=HHT 는 길이 3 패턴이라 완성이 늦어 a_m 이 아래에서 천천히 $\frac{1}{2}$ 로 증가하고 $(a_3 \approx 0.146, a_4 = 0.25, a_5 \approx 0.323, \ldots)$, B=TH 는 b_m 이 위쪽에서 $\frac{1}{2}$ 로 수렴한다 $(b_3 \approx 0.414, \ldots)$. 유한한 m 에서는 항상 $a_m < b_m$.

결론: $p = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이고, 이때 **모든** $\boldsymbol{m \geq 3}$ 에서 $a_m < b_m$ 이 성립한다. (2-3·2-4 모두 마르코프 극한과 $m = 3, \ldots, 8$ 의 직접 계산으로 검증하였다.)