2026학년도 대학 신입학생 수시모집 일반전형

면접 및 구술고사

수학

문항 · 제시문 · 예시 답안

서울대학교

※ 예시 답안은 학습용 참고 자료입니다.

문제 1. 금 거래 게임 — 확률변수의 평균·분산과 최적반응

문항 및 제시문

민호는 1그램, 영희는 2그램의 금을 보유하고 있고, 다음 [규칙]에 따라 금을 주고받는 시행을 한다.

> (가) 어떤 실수 a $(0 \le a \le 1)$ 에 대하여, 민호는 a 그램의 금을 영희에게 지급한다. 이때, a 의 값을 **투자량**이라고 한다.
>
> (나) 어떤 실수 b $(0 \le b \le 1)$ 에 대하여, 공정한 주사위를 한 번 던져 그 결과에 따라 영희는 민호에게 다음과 같이 금을 지급한다.
> - 나온 눈의 수가 2 이하이면 투자량 1그램 당 $(2+b)$ 그램의 금을 지급
> - 나온 눈의 수가 3 이상이면 투자량 1그램 당 $(1-b)$ 그램의 금을 지급
>
> 이때, b 의 값을 **활성도**라고 한다.

위 [규칙]에 주어진 a 와 b 의 값은 (나)에서 주사위를 던지기 전에 다음 두 방식 중 하나로 결정된다.

> [방식 1] 영희가 먼저 b 를 결정하여 공지하면, 민호는 그 값을 알고 a 를 결정
>
> [방식 2] 민호가 먼저 a 를 결정하여 공지하면, 영희는 그 값을 알고 b 를 결정

민호와 영희가 시행의 결과로 보유하게 될 금의 그램 수를 나타내는 확률변수를 각각 X 와 Y 라고 하자. 민호와 영희는 평균을 기대수익으로, 분산을 위험도로 간주한 후, 각자 적절한 자산관리지표를 설정한다.

1–1.

주어진 두 실수 a, b $(0 \le a \le 1, 0 \le b \le 1)$ 에 대하여, 투자량이 a 로, 활성도가 b 로 결정되었을 때, 확률변수 X 의 평균 $E(X)$ 와 분산 $V(X)$ 를 구하시오.

1–2.

주어진 실수 b $(0 \le b \le 1)$ 에 대하여 영희가 먼저 활성도를 b 로 결정하여 공지하였다. 민호의 자산관리지표 U 는 다음과 같다.

$$U = E(X) - \frac{1}{2}V(X)$$

범위 $0 \le a \le 1$ 에서 자산관리지표 U 의 값이 최대가 되도록 하는 투자량 a 의 값을 민호의 **최적 투자량**이라고 할 때, 이 값을 구하시오.

1–3.

주어진 실수 a $(0 \le a \le 1)$ 에 대하여 민호가 먼저 투자량을 a 로 결정하여 공지하였다. 영희의 자산관리지표 W 는 다음과 같다.

$$W = E(Y) - \frac{1}{2}V(Y)$$

범위 $0 \le b \le 1$ 에서 자산관리지표 W 의 값이 최대가 되도록 하는 활성도 b 의 값을 영희의 **최적 활성도**라고 할 때, 이 값을 구하시오. (단, W 의 값이 최대가 되도록 하는 b 의 값이 여러 개인 경우, 그 값들을 모두 최적 활성도라고 한다.)

1–4.

다음 조건을 만족하는 순서쌍 (a, b) 를 모두 구하시오. (단, $0 \le a \le 1, 0 \le b \le 1$)

> (ㄱ) 영희가 먼저 활성도를 b 로 결정하여 공지했을 때, a 는 민호의 최적 투자량이다.
>
> (ㄴ) 민호가 먼저 투자량을 a 로 결정하여 공지했을 때, b 는 영희의 최적 활성도이다.

문제 1 · 예시 답안

설정 정리

민호는 1 g, 영희는 2 g 으로 시작한다. 민호가 투자량 a g 을 영희에게 주고, 공정한 주사위를 던져
- 눈 ≤ 2 (확률 $1/3$): 영희가 민호에게 $a(2+b)$ g 지급
- 눈 ≥ 3 (확률 $2/3$): 영희가 민호에게 $a(1-b)$ g 지급

따라서 민호의 최종 보유량 X 와 영희의 최종 보유량 Y 는

$$X = \begin{cases} 1+a(1+b) & \text{확률 } 1/3, \quad (\text{눈} \leq 2 \text{ 일 때,} \;\; 1-a+a(2+b)) \\ 1-ab & \text{확률 } 2/3, \quad (\text{눈} \geq 3 \text{ 일 때,} \;\; 1-a+a(1-b)) \end{cases}$$

$$Y = 3 - X \quad (\text{총량} \;\; 1+2=3 \text{ g 은 항상 보존})$$

1-1. $E(X)$, $V(X)$

답 두 값의 확률가중 평균이 $E(X)$ 이다.

$$E(X) = \frac{1}{3}(1+a(1+b)) + \frac{2}{3}(1-ab) = 1 + \frac{a(1-b)}{3}.$$

두 값의 차가 $(1+a(1+b)) - (1-ab) = a(1+2b)$ 인 두 점 분포이므로, 분산은 $p(1-p) \times (\text{차})^2$ 로 ($p = 1/3$):

$$V(X) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot (a(1+2b))^2 = \frac{2}{9}a^2(1+2b)^2.$$

$$\boxed{E(X) = 1 + \frac{a(1-b)}{3}, \quad V(X) = \frac{2}{9}a^2(1+2b)^2}$$

1-2. 민호의 최적 투자량 (b 고정)

답 $U = E(X) - \frac{1}{2}V(X)$ 를 $0 \leq a \leq 1$ 에서 최대로 하는 a 를 구한다.

$$U(a) = 1 + \frac{a(1-b)}{3} - \frac{1}{9}a^2(1+2b)^2.$$

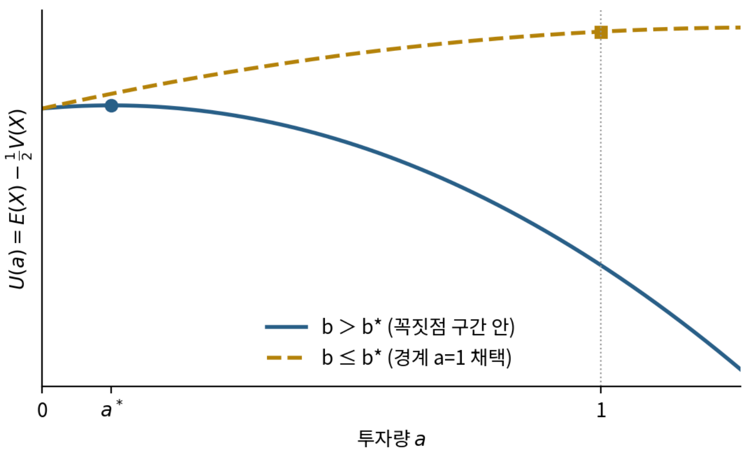
a^2 의 계수가 음수이므로 위로 볼록한 포물선이고, 꼭짓점은

$$a^* = \frac{(1-b)/3}{\frac{2}{9}(1+2b)^2} = \frac{3(1-b)}{2(1+2b)^2}.$$

$a \in [0,1]$ 로 제한되므로, $a^* = 1$ 이 되는 b 는 $3(1-b) = 2(1+2b)^2$, 즉 $8b^2 + 11b - 1 = 0$ 에서

$$b_0 = \frac{3\sqrt{17} - 11}{16} \approx 0.0856.$$

$b \leq b_0$ 이면 꼭짓점이 구간 밖($a^* > 1$)이라 경계 $a = 1$ 이 최적이다.



예시 작도 — $U(a)$ 의 두 경우. 꼭짓점이 구간 안이면 a^*, 밖이면 경계 $a=1$ 을 택한다.

$$a^* = \begin{cases} 1, & 0 \le b \le \frac{3\sqrt{17}-11}{16} \\ \frac{3(1-b)}{2(1+2b)^2}, & \frac{3\sqrt{17}-11}{16} \le b \le 1 \end{cases}$$

1-3. 영희의 최적 활성도 (a 고정)

답 $X+Y=3$ 이므로 $E(Y)=3-E(X)=2-\frac{a(1-b)}{3}$, $V(Y)=V(X)$. 따라서

$$W(b) = 2 - \frac{a}{3} + \frac{ab}{3} - \frac{1}{9}a^2(1+2b)^2.$$

b 에 대한 위로 볼록 포물선의 꼭짓점은

$$b^* = \frac{3-4a}{8a} \quad (a \ne 0).$$

이를 $0 \le b \le 1$ 로 제한한다.

$$b^* = \begin{cases} \text{임의의 } b \in [0,1], a=0 & (W \equiv 2 \text{ 상수}) \\ 1, & 0 < a \le 1/4 \\ \frac{3-4a}{8a}, & 1/4 \le a \le 3/4 \\ 0, & 3/4 \le a \le 1 \end{cases}$$

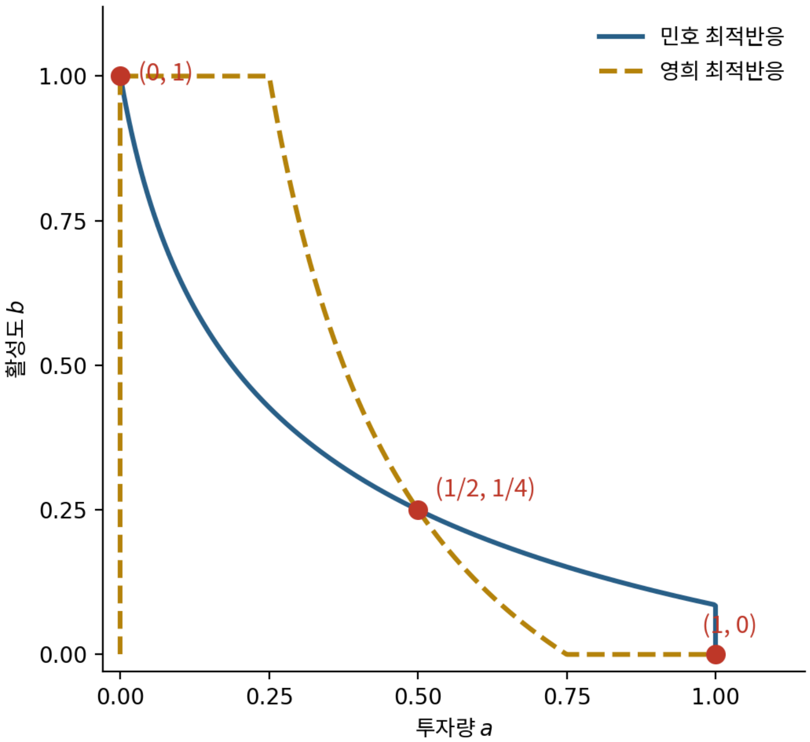
1-4. 상호 최적이 되는 순서쌍 (a, b)

답 (ㄱ)은 a 가 민호의 최적반응, (ㄴ)은 b 가 영희의 최적반응인 조건이다. 두 최적반응을 동시에 만족하는 점(내시 균형)을 찾는다.

내부해 — [1-2]의 꼭짓점 식 $a = \frac{3(1-b)}{2(1+2b)^2}$ 와 [1-3]의 $b = \frac{3-4a}{8a}$, 즉 $1 + 2b = 3/(4a)$ 를 연립하면 $a(1-b) = 3/8$ 을 얻고, 정리하면 $a = 1/2, b = 1/4$.

경계해 —

- $b = 0$ 이면 민호 최적 $a = 1$ 이고, $a = 1(> 3/4)$ 이면 영희 최적 $b = 0 \Rightarrow (1, 0)$.
- $b = 1$ 이면 민호 최적 $a = 0$ 이고, $a = 0$ 이면 영희는 모든 b 가 최적($b = 1$ 포함) $\Rightarrow (0, 1)$.



예시 작도 — 민호·영희의 두 최적반응 곡선. 두 곡선의 교점 세 곳이 곧 해이다.

$$(a, b) = (0, 1), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \quad (1, 0)$$

핵심 — $X + Y = 3$ 이라는 총량 보존 덕분에 $V(X) = V(Y)$ 이고 두 사람의 지표는 같은 분산 항을 공유한다. 각자 상대의 선택을 상수로 보고 위로 볼록한 이차함수의 꼭짓점을 구간 $[0, 1]$ 로 자른 것이 최적반응이며, 두 최적반응이 만나는 세 점이 [1-4]의 답이다.

문제 2. 단항식의 ‘열매’ — 동차식과 연립일차방정식

문항 및 제시문

(가) 세 문자 x, y, z 로 이루어진 단항식을, 실수 a 와 음이 아닌 정수 l, m, n 에 대해 $ax^l y^m z^n$ 과 같이 표현되는 식으로 정의한다. 세 문자 x, y, z 로 이루어진 다항식은 단항식들의 합으로 표현되는 식을 의미한다. 특히, 0 을 포함한 실수 또한 다항식으로 본다.

(나) 두 다항식 p 와 q 에 대하여, 어떤 실수 a, b, c 를 p 와 q 의 세 문자에 대입($x = a, y = b, z = c$)하여 얻은 식의 값이 서로 다르면, p 와 q 는 서로 다른 다항식이라 한다.

(다) 계수가 1 인 단항식을 **기본 단항식**이라 한다. 즉, 음이 아닌 정수 l, m, n 에 대하여 $x^l y^m z^n$ 과 같이 표현되는 단항식이다. 이때 기본 단항식 $x^l y^m z^n$ 의 **차수**는 $l + m + n$ 을 의미한다.

(라) 세 다항식 p_1, p_2, p_3 이 주어져 있을 때, 어떤 세 다항식 q_1, q_2, q_3 에 대하여

$$r = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3$$

와 같이 나타낼 수 있는 기본 단항식 r 을 p_1, p_2, p_3 의 **열매**라고 한다. 예를 들어 $p_1 = x^2 + 3yz, p_2 = 7xz + 4z^2, p_3 = 2xy$ 는

$$x^4 = (x^2 + 3yz)(x^2 - xy) + (7xz + 4z^2)(-xy) + (2xy)(2xz + 2z^2)$$

를 만족하므로, 기본 단항식 x^4 은 p_1, p_2, p_3 의 열매이다.

2–1.
차수가 4 인 기본 단항식 가운데 다음 세 다항식 p_1, p_2, p_3 의 열매가 **아닌** 것의 개수를 구하시오.

$$p_1 = 2x^2 - 2xy - xz + yz, \quad p_2 = 2xy - xz - 2y^2 + yz, \quad p_3 = 4xy - 2xz - 2yz + z^2$$

2–2.
실수 a 에 대하여 세 다항식이 다음과 같이 주어져 있다.

$$p_1 = x^2 - y^2 + yz, \quad p_2 = ax^2 + xz + y^2, \quad p_3 = z^2$$

기본 단항식 가운데 p_1, p_2, p_3 의 열매가 아닌 것이 **무수히 많도록** 하는 a 의 값을 구하시오.

2–3.
다음 세 다항식 p_1, p_2, p_3 의 열매 중 차수가 4 인 것을 모두 구하시오.

$$p_1 = x^2 - y^2 + yz, \quad p_2 = x^2 + xz + y^2, \quad p_3 = z^2$$

문제 2 · 예시 답안

핵심 정리

기본 단항식 $r = x^l y^m z^n$ 이 p_1, p_2, p_3 의 열매라는 것은, 어떤 다항식 q_1, q_2, q_3 에 대해 $r = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3$ 으로 쓸 수 있다는 뜻이다. 이때 두 가지 성질이 유용하다.

성질 A — 차수 분리 (선형대수)

세 p_i 가 모두 동차 2 차이고 r 이 동차 4 차이면, q_i 도 동차 2 차로 두어도 충분하다. 따라서 "4 차 열매 찾기"는

$$\{(\text{동차 2차 단항식}) \times p_i\} \quad (i = 1, 2, 3)$$

이 생성하는 4 차 동차식 공간이 어떤 기본 단항식을 포함하는가를 묻는 **연립일차방정식** 문제가 된다.

성질 B — 대입 판정

$r = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3$ 이면, p_1, p_2, p_3 을 모두 0 으로 만드는 점 (x, y, z) 에서는 r 도 반드시 0 이다. 즉 **세 식을 동시에 0 으로 만드는 점에서 r 이 0 이 아니면, r 은 열매가 될 수 없다.**

2-1. 열매가 아닌 것의 개수

답 세 식은 모두 인수분해된다.

$$p_1 = (x-y)(2x-z), \quad p_2 = (x-y)(2y-z), \quad p_3 = (2x-z)(2y-z).$$

$A = x - y$, $B = 2x - z$, $C = 2y - z$ 로 두면 $p_1 = AB$, $p_2 = AC$, $p_3 = BC$. 세 식이 동시에 0 이 되려면 A, B, C 중 **적어도 둘**이 0 이어야 한다. 특히 $A = B = 0$ (즉 $x = y$, $z = 2x$) 인 직선 $(x, y, z) = (t, t, 2t)$ 위에서는 $p_1 = p_2 = p_3 = 0$ 이다. 그런데 이 직선 위에서 임의의 4 차 기본 단항식은

$$x^l y^m z^n = t^l \cdot t^m \cdot (2t)^n = 2^n t^{l+m+n} = 2^n t^4$$

이고, 이는 $t \neq 0$ 일 때 항상 0 이 아니다. 성질 B에 의해 어떤 4 차 기본 단항식도 열매가 될 수 없다.

$$\boxed{4 \text{ 차 기본 단항식 } 15 \text{ 개 모두 열매가 아니다} \Rightarrow \text{개수} = 15}$$

2-2. 열매가 아닌 것이 무수히 많은 a

답 $p_3 = z^2$ 이므로 세 식의 공통 영점에서는 $z = 0$ 이다. $z = 0$ 을 대입하면 $p_1 = x^2 - y^2$, $p_2 = ax^2 + y^2$. $p_1 = 0$ 에서 $y^2 = x^2$, 이를 $p_2 = 0$ 에 넣으면

$$(a+1)x^2 = 0.$$

(i) $\boldsymbol{a \neq -1}$ — $x = 0$, 따라서 $y = 0, z = 0$. 공통 영점이 원점뿐이면 충분히 큰 차수의 기본 단항식은 모두 열매가 되어, 열매가 아닌 것은 **유한**하다.

(ii) $\boldsymbol{a = -1}$ — $(a+1)x^2 = 0$ 이 항등적으로 성립하므로, $y = \pm x$, $z = 0$ 인 두 직선 $(t, t, 0)$, $(t, -t, 0)$ 전체가 공통 영점이다. 점 $(t, t, 0)$ $(t \neq 0)$ 에서 z 를 포함하지 않는 기본 단항식 $x^l y^m$ 은 $t^{l+m} \neq 0$ 이므로 열매가 될 수 없다. 이런 단항식은 무수히 많다.

$$\boxed{a = -1}$$

2-3. 차수가 4 인 열매 모두

답 $p_3 = z^2$ 에서 공통 영점은 $z = 0$, 그러면 $p_1 = x^2 - y^2$, $p_2 = x^2 + y^2$ 이고 $x^2 = y^2$, $x^2 + y^2 = 0$ 에서 $x = y = 0$. 즉 공통 영점은 원점뿐이다.

세 식이 모두 동차 2 차이므로 성질 A에 따라 $\{(\text{동차 } 2\text{차 단항식}) \times p_i\}$ 들이 생성하는 4 차 동차식 공간의 차원을 따져보면 15 로, 4 차 동차식 공간 전체($\dim = 15$)와 일치한다. 따라서 **모든 4 차 기본 단항식이 열매**이다. 예를 들어 x^4 은 다음과 같이 직접 표현된다.

$$4x^4 = p_1(x^2 - 2xz - y^2 - yz) + p_2(3x^2 - xz - y^2 + z^2) + p_3(2xy - xz)$$

차수 4 인 기본 단항식 15 개 전부:

$x^4, x^3y, x^3z, x^2y^2, x^2yz, x^2z^2, xy^3, xy^2z, xyz^2, xz^3, y^4, y^3z, y^2z^2, yz^3, z^4$

핵심 — 열매 여부는 "p_i 들의 곱들이 생성하는 공간에 그 단항식이 들어가는가"라는 선형대수 문제(성질 A)와, "공통 영점에서 0 이 되는가"라는 대입 판정(성질 B)의 두 각도로 판별한다. [2-1]은 공통 영점 직선이 존재해 아무것도 열매가 아니고, [2-3]은 공통 영점이 원점뿐이라 4 차가 전부 열매가 된다. [2-2]는 공통 영점이 직선으로 커지는 순간 ($a = -1$) 비열매가 무한해진다.

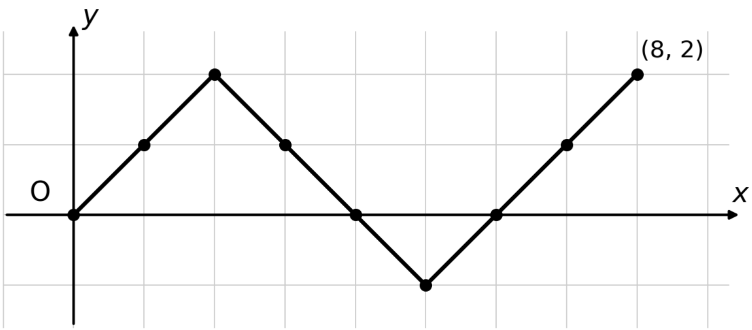
문제 3. 도둑의 도주 — 격자 경로와 확률

문항 및 제시문

자연수 n 에 대하여 $-2n \le k \le 2n$ 을 만족하는 정수 k 가 주어져 있을 때, 다음 조건을 모두 만족하며 좌표평면 위를 움직이는 도둑이 있다.

> (가) 점 (x, y) 에 위치한 도둑은 한 번 움직일 때마다 점 $(x+1, y+1)$ 또는 $(x+1, y-1)$ 까지 최단 거리로 이동한다.
>
> (나) 도둑은 원점 $O(0,0)$ 에서 출발해 $4n$ 번 움직여 점 $(4n, 2k)$ 에 도착한다.

도둑이 이동하는 동안 지나간 모든 점들의 집합을 **도주경로**라 하자. (단, 도둑의 크기는 무시한다.) 예를 들어, [그림 1]은 $n=2$ 이고 $k=1$ 일 때 가능한 도주경로 중 하나를 나타낸 것이다.



[그림 1] — $n=2, k=1$ 인 경우의 한 도주경로. 매 걸음 x 는 1 늘고 y 는 ± 1 변한다.

경찰은 도둑이 점 $(4n, 2k)$ 에 도착하였다는 제보를 받고, 도둑의 가능한 모든 도주경로 중 하나를 임의로 선택하여 수사를 진행한다. (단, 각 도주경로가 선택될 확률은 모두 같다.) 경찰이 선택한 도주경로가 세 점 $(2n, 2n)$, $(2n, 0)$, $(2n, -2n)$ 중 하나를 포함하면 경찰은 **단서를 발견**한다고 하자.

3–1.

자연수 n 의 값이 3 이고 정수 k 의 값이 $0, 2, 4$ 일 때, 경찰이 단서를 발견할 확률을 각각 구하시오.

3–2.

자연수 n 에 대하여, 정수 k 의 값이 $2n-3$ 일 때 경찰이 단서를 발견할 확률을 p_n 이라 하자. 다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty} p_n$$

3–3.

주어진 자연수 n $(n \ge 2)$ 에 대하여, 경찰이 단서를 발견할 확률이 최소가 되도록 하는 정수 k 의 값을 모두 구하시오.

3–4.

자연수 n 에 대하여, 정수 k 의 값이 [3–3]에서 구한 값 중 가장 큰 값일 때 경찰이 단서를 발견할 확률을 q_n 이라 하자. 다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln q_n$$

문제 3 · 예시 답안

기본 셈 — 경로의 수와 세 검문점

도둑의 이동 $(x, y) \to (x+1, y\pm 1)$ 은 격자 위의 $45°$ 대각선 이동이다. $4n$ 걸음 중 위로 오른 횟수 u, 아래로 내린 횟수 d 라 하면 $u + d = 4n$, $u - d = 2k$ 이므로 $u = 2n + k$. 따라서 원점에서 $(4n, 2k)$ 로 가는 **전체 도주경로의 수**는 파스칼 삼각형에 따라

$$\binom{4n}{2n+k}.$$

핵심은 **중간 시점 $x = 2n$.** 모든 도주경로는 $x = 2n$ 에서 하나의 격자점 $(2n, \text{짝수})$ 를 지나고, 세 단서점 $(2n, 2n)$, $(2n, 0)$, $(2n, -2n)$ 은 이 세로선 위의 서로 다른 세 점이다. 따라서 한 경로가 두 개 이상을 지날 수 없어(**배반**), 단서 발견 경로의 수는 세 점 각각을 지나는 경로 수의 **단순 합**이다.

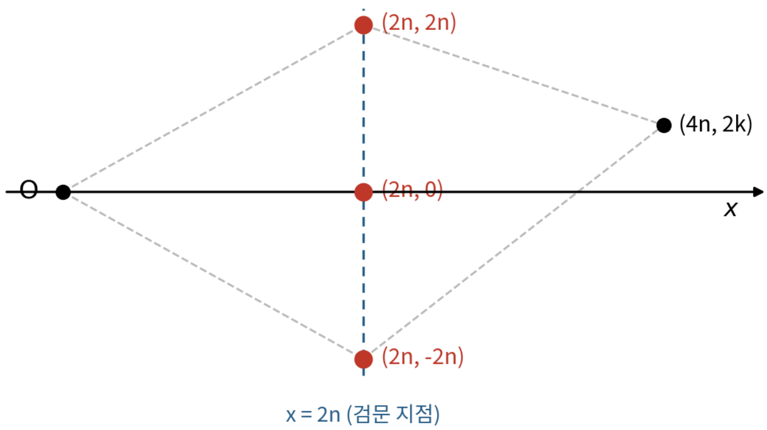
중간점 분해

점 $(2n, j)$ 를 지나는 경로 수 $= (O \to (2n, j)) \times ((2n, j) \to (4n, 2k))$ 이며, 세 점에 대해

$$N(2n) = 1 \cdot \binom{2n}{k}, \quad N(0) = \binom{2n}{n}\binom{2n}{n+k}, \quad N(-2n) = \binom{2n}{2n+k} \cdot 1.$$

따라서 단서 발견 확률은

$$P(n, k) = \frac{\binom{2n}{k} + \binom{2n}{n}\binom{2n}{n+k} + \binom{2n}{2n+k}}{\binom{4n}{2n+k}}.$$



예시 도해 — 검문 지점 $x = 2n$ 의 세로선 위 세 단서점. 경로는 반드시 이 선을 한 번 지나므로 세 사건은 서로 배반이다.

3–1. $n = 3$**,** $k = 0, 2, 4$

답 $2n = 6$, $\binom{2n}{n} = \binom{6}{3} = 20$, 분모는 $\binom{12}{2n+k}$.

$$k = 0: \quad \frac{\binom{6}{0}+\binom{6}{3}\binom{6}{3}+\binom{6}{6}}{\binom{12}{6}} = \frac{1+400+1}{924} = \frac{402}{924} = \frac{67}{154}.$$

$$k = 2: \quad \frac{\binom{6}{2}+\binom{6}{3}\binom{6}{5}+\binom{6}{8}}{\binom{12}{8}} = \frac{15+20\cdot 6+0}{495} = \frac{135}{495} = \frac{3}{11}.$$

$$k = 4: \quad \frac{\binom{6}{4}+\binom{6}{3}\binom{6}{7}+\binom{6}{10}}{\binom{12}{10}} = \frac{15+0+0}{66} = \frac{15}{66} = \frac{5}{22}.$$

$$\boxed{k = 0 \Rightarrow \frac{67}{154}, \quad k = 2 \Rightarrow \frac{3}{11}, \quad k = 4 \Rightarrow \frac{5}{22}}$$

3–2. $k = 2n - 3$ **일 때** $\lim p_n$

답 도착점 $(4n, 4n-6)$ 은 위쪽 모서리 $(4n, 4n)$ 바로 아래에 있다. $k = 2n-3$ 이면 중간점 세 항 중 가운데·아래 항은 0 이 되어($\binom{2n}{n+k} = \binom{2n}{3n-3} = 0$, $\binom{2n}{2n+k} = \binom{2n}{4n-3} = 0$ for $n \geq 4$), **맨 위 단서점 $(2n, 2n)$ 만** 살아남는다. 따라서

$$p_n = \frac{\binom{2n}{2n-3}}{\binom{4n}{4n-3}} = \frac{\binom{2n}{3}}{\binom{4n}{3}} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{4n(4n-1)(4n-2)} \to \frac{8n^3}{64n^3} = \frac{1}{8}.$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{8}}$$

3–3. 확률이 최소가 되는 k $(n \geq 2)$

답 대칭성 $P(n,k) = P(n,-k)$ 이므로 $0 \leq k \leq 2n$ 만 보면 된다. 도착점 $(4n, 2k)$ 가 오른쪽 모서리를 따라 위로 올라갈수록 분모 $\binom{4n}{2n+k}$ 가 빠르게 작아지고 분자도 함께 줄어, P 는 $k = 0 \to n$ 에서 감소했다가 $k = n \to 2n$ 에서 증가한다. 실제로 $n = 4$ 에서 P 값은

$$0.381, 0.343, 0.248, 0.141, \mathbf{0.0769}, 0.1, 0.233, 0.5, 1 \quad (k = 0, 1, \ldots, 8)$$

로 $k = 4 = n$ 에서 최소이다. 대칭에 의해 $k = -n$ 도 같다.

$$\boxed{k = n \quad \text{및} \quad k = -n}$$

3-4. $k=n$ 일 때 $\lim \frac{1}{n}\ln q_n$

답 [3-3]의 최솟값 k 중 가장 큰 값은 $k=n$ 이다. $k=n$ 을 대입하면 $\binom{2n}{n+k}=\binom{2n}{2n}=1$, $\binom{2n}{2n+k}=\binom{2n}{3n}=0$ 이므로

$$q_n=P(n,n)=\frac{\binom{2n}{n}+\binom{2n}{n}\cdot 1+0}{\binom{4n}{n}}=\frac{2\binom{2n}{n}}{\binom{4n}{n}}.$$

스털링 근사 $\ln m!\approx m\ln m-m$ 으로 지수증가율을 구하면

$$\frac{1}{n}\ln\binom{2n}{n}\to 2\ln 2,\quad \frac{1}{n}\ln\binom{4n}{n}\to 4\ln 4-3\ln 3.$$

따라서

$$\frac{1}{n}\ln q_n\to 2\ln 2-(4\ln 4-3\ln 3)=3\ln 3-6\ln 2=\ln\frac{27}{64}.$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln q_n=\ln\frac{27}{64}\quad(\approx -0.863)}$$

핵심 — 전체 경로 수는 $\binom{4n}{2n+k}$, 중간 시점 $x=2n$ 에서 세 단서점이 한 세로선 위에 있어 사건이 배반이므로 확률이 세 이항곱의 단순 합이 된다. 특정 k 에서는 세 항 중 일부가 0 이 되어 식이 간단해지고([3-2]), 대칭성으로 최소는 $k=\pm n$ ([3-3]), 그 확률의 지수증가율이 $\ln(27/64)$ 이다([3-4]).

문제 4. 꺾인 선과 넓이·활성도 최소화

양의 실수 s 가 주어져 있다. 좌표평면 위의 두 점 $A(1, s)$ 와 $B(s+1, 0)$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

> **(가)** 함수 $f(x)$ 를 어떤 실수 k, a, b 에 대하여 다음과 같이 나타낼 수 있을 때, $y = f(x)$ 의 그래프를 **꺾인 선** 이라 한다.
>
> $$f(x) = \begin{cases} k(x-a)+b & (x \le a) \\ (k+1)(x-a)+b & (x > a) \end{cases}$$
>
> 이때 실수 k 와 점 (a, b) 를 각각 이 꺾인 선의 **비탈** 과 **꺾인 점** 이라 한다.
>
> **(나)** 주어진 양의 실수 m 에 대하여, 꺾인 점이 (a, b) 인 꺾인 선의 **활성도** 는 $ma^2 + b$ 를 의미한다.

[4-1] 두 점 A 와 B 를 모두 지나는 꺾인 선의 비탈로 가능한 값의 범위를 구하여라.
[4-2] 두 점 A 와 B 를 모두 지나는 꺾인 선과 x 축, y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이의 최소값을 s 에 대한 식으로 나타내어라.
[4-3] 양의 실수 s 의 값이 2 일 때, 다음 조건을 만족하는 m 의 값을 모두 구하여라.

두 점 A 와 B 를 모두 지나는 꺾인 선 가운데 활성도가 가장 작은 것의 개수는 2 이다.

문제 4 · 예시 답안

설정 — 세 가지 경우로 갈라지는 꺾인 선

꺾인 선은 왼쪽 기울기 k, 오른쪽 기울기 $k+1$ 로 꺾인 점 $x=a$ 에서 이어진 두 반직선이다. A, B 를 잇는 평균 기울기는 $(0-s)/((s+1)-1)=-1$ 이다. 꺾인 점 a 의 위치에 따라 세 경우로 나뉜다.

꺾인 점 위치별 분류

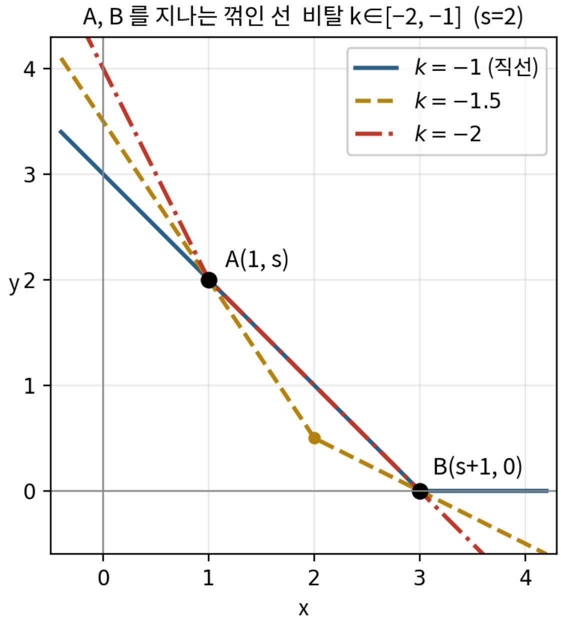
- $a \ge s+1$ (두 점이 왼쪽 조각) ⇒ 기울기 $k=-1$ (직선).
- $a \le 1$ (두 점이 오른쪽 조각) ⇒ 기울기 $k+1=-1$, 즉 $k=-2$.
- $1 \le a \le s+1$ (사이에서 꺾임) ⇒ A 는 왼쪽, B 는 오른쪽 조각. 두 조건 $s=k(1-a)+b, 0=(k+1)(s+1-a)+b$ 를 빼면

$$k=\frac{a-2s-1}{s}, \quad b=\frac{(s+1-a)^2}{s}.$$

4-1. 비탈 k 의 범위

답 사이 경우에서 $k=\frac{a-2s-1}{s}$ 는 a 에 대해 증가하고, $a=1$ 에서 $k=-2$, $a=s+1$ 에서 $k=-1$ 이다. 양 끝 경우(직선 $k=-1$, $k=-2$)와 합치면 비탈은 -2 부터 -1 까지 모든 값을 가진다.

$$\boxed{-2 \le k \le -1}$$



예시 작도 — $A(1,s)$, $B(s+1,0)$ 를 지나는 꺾인 선들 $(s=2)$. 비탈 k 는 직선$(k=-1)$부터 $k=-2$ 까지 연속적으로 변한다.

4-2. 둘러싸인 넓이의 최솟값

답 꺾인 선은 y 축을 $(0, s-k)$ 에서, x 축을 $B(s+1,0)$ 에서 만나고 그 사이에서 양수이다. 넓이는 $S=\int_0^{s+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ 이며, 두 사다리꼴의 합으로 계산해 비탈 k 에 대한 이차식으로 정리하면

$$S(k)=\frac{s^2}{2}k^2+\frac{3s^2-1}{2}k+\frac{3s^2+2s}{2},\quad k\in[-2,-1].$$

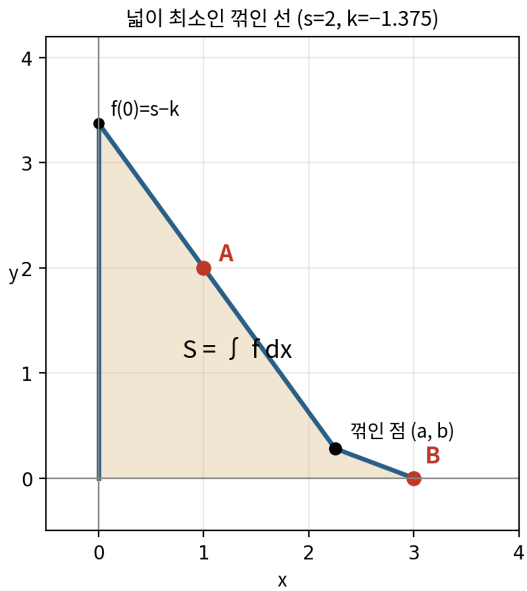
k 의 계수로 꼭짓점은 $k^*=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2s^2}$ 이다.

· $s\ge 1$ 이면 $k^*\in[-2,-1]$ 이므로 꼭짓점에서 최소:

$$S_{\min}=\frac{3s^2+2s}{2}-\frac{(3s^2-1)^2}{8s^2}=\frac{(s+1)^3(3s-1)}{8s^2}.$$

· $0<s\le 1$ 이면 $k^*>-1$ 로 구간 밖이므로 $k=-1$ (직선)에서 최소: $S_{\min}=(s+1)^2/2$. ($s=1$ 에서 두 식 모두 2 로 연속.)

$$\boxed{S_{\min}=\begin{cases}\frac{(s+1)^2}{2} & (0<s\le 1)\\ \frac{(s+1)^3(3s-1)}{8s^2} & (s\ge 1)\end{cases}}$$



예시 도해 — 꺾인 선·두 축으로 둘러싸인 영역(색칠). $s=2$ 에서 최소 넓이는 $k=-1.375$ 에서 얻어지며 $135/32\approx 4.22$ 이다.

4-3. $s=2$ 에서 활성도 최소가 2개인 m

답 $s=2$ (즉 $s+1=3$) 이므로 꺾인 점 (a,b) 와 활성도 $g(a)=ma^2+b$ 는 세 구간으로 나뉜다.

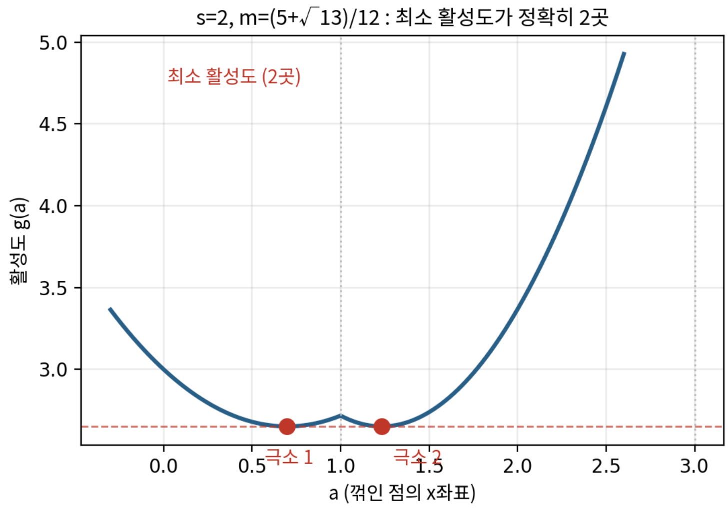
$$a \le 1 \text{ 또는 } a \ge 3 : b = 3-a, \quad g = ma^2 - a + 3; \qquad 1 \le a \le 3 : b = \frac{(3-a)^2}{2}, \quad g = ma^2 + \frac{(3-a)^2}{2}.$$

바깥 조각(ma^2-a+3)의 꼭짓점은 $a=\frac{1}{2m}$, 값 $V_{\text{out}} = 3 - \frac{1}{4m}$; 안쪽 조각의 꼭짓점은 $a=\frac{3}{2m+1}$, 값 $V_{\text{in}} = \frac{9}{2} - \frac{9}{4m+2}$. 중앙 꺾인 점 $a=1$ 은 극대라 최소가 될 수 없어, 두 조각의 두 극소가 같은 높이일 때 최소 활성도를 지닌 꺾인 선이 정확히 2 개가 된다.

$$3 - \frac{1}{4m} = \frac{9}{2} - \frac{9}{4m+2} \quad \Rightarrow \quad 12m^2 - 10m + 1 = 0.$$

두 근 모두 실제로 두 극소가 전역 최솟값이 됨을 확인할 수 있다 ($m=\frac{5-\sqrt{13}}{12} \approx 0.116$ 은 $a \approx 2.43, 4.30$; $m = \frac{5+\sqrt{13}}{12} \approx 0.717$ 은 $a \approx 0.70, 1.23$).

$$\boxed{m = \frac{5-\sqrt{13}}{12} \quad \text{또는} \quad m = \frac{5+\sqrt{13}}{12}}$$



예시 도해 — $m=\frac{5+\sqrt{13}}{12}$ 에서 활성도 $g(a)$. 두 극소의 높이가 같아 최소 활성도를 지닌 꺾인 선이 정확히 2 개이다.

핵심 — 꺾인 선은 비탈 k 로 매개되며 A, B 를 지나면 $k \in [-2,-1]$([4-1]). 둘러싸인 넓이는 k 의 이차식이라 s 의 크기에 따라 꼭짓점 또는 끝점에서 최소가 된다([4-2]). 활성도 ma^2+b 는 꺾인 점 위치 a 의 조각별 이차식이고, 바깥·안쪽 두 극소가 같은 높이가 되는 $m = \left(5 \pm \sqrt{13}\right)/12$ 에서 최소 활성도 꺾인 선이 두 개다([4-3]).