2024학년도 영재학교 모의고사
2회 - 통합형

- 1교시 [수학] -

※ 유의사항 ※

1. 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.
2. 반과 이름을 정확히 쓰시오.
3. 문제지 전체 면 수가 맞는지 확인하시오.
4. 문항 당 배점은 답안지에 표시되어 있습니다.
5. 문제를 꼭 잘 읽고, 실수하지 않길 바랍니다.
6. 객관식/단답형은 답만 제시하고, 서술형의 경우 풀이과정을 서술하시오.

2022학년도 영재학교 모의고사 문제지

창의 문제 해결력 평가 - 1교시 수학

제 1교시	수험번호										성명		120분 / 200점

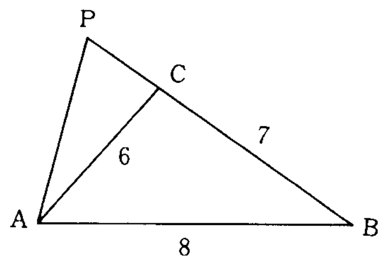
※ 단답형은 답안지에 답만 쓰고, 서술형은 아이디어 및 서술과정을 명확히 적어야 합니다.

<1번~15번은 단답형입니다.>

1. [1]세 밸브 A, B, C를 열면 물이 하나의 물탱크에 각각 일정한 비율로 채워진다고 한다. 이 물탱크에 물을 가득 채우는 데 걸린 시간은 세 밸브 모두 열었을 때 1시간, A, C의 밸브만 열었을 때 1.5시간, B, C 밸브만 열었을 때 2시간이었다고 한다. A, B 두 밸브만 열었을 때, 물탱크에 물을 가득 채우는 데 걸리는 시간은? [8점]

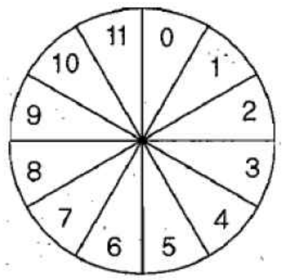
2. 2)동 순위(예: 공동 1위)가 없는 경마에서 X, Y, Z 세 마리의 말이 경주를 펼친다. X의 승률은 3 : 1, Y의 승률은 2 : 3 일 때, Z의 승률은? (단, H의 승률이 $p : q$라는 것은 경주에서 우승할 확률이 $\frac{q}{p+q}$ 라는 것이다.) [8점]

3. 3)그림과 같이 $AB=8, BC=7$, $CA=6$ 인 $\triangle ABC$가 있다. P는 변 BC의 연장선 위의 점이고, $\triangle PAB$과 $\triangle PCA$ 이 닮음이라고 할 때, PC의 길이는? [8점]



4. [4]어느 도시 인구의 여자 대 남자의 구성비가 13:12이고, 여자의 평균 연령은 34, 남자의 평균 연령은 32일 때, 이 도시 인구의 평균 연령을 계산했더니 대분수로 $33\frac{(\ )}{(\ )}$가 되었다. 괄호 안의 두 수는 서로소라고 할 때, 이 두 수의 합을 구하여라. [8점]

5. [5] 다음 규칙 (가), (나), (다)에 따라 수를 지운다. 예를 들면 a가 4일 때, 4, 9, 2, 7, 0, 5, 10, 3, 8, 1, 6, 11의 순서대로 결국 모든 수들이 지워진다. 이때, 1부터 11까지의 자연수 a 중에서 원판 위의 모든 수를 지우게 하는 것의 개수는? [8점]



<규칙>

(가) 1부터 11까지의 자연수 중에서 한 수 a를 택한다.

(나) a를 지우고 그 다음부터는 시계 방향으로 $(a+1)$칸만큼 건너 뛰어 만나는 수를 지워나간다.

(다) 이미 지운 수를 만나면 중지한다.

6. 6) 양의 정수를 일렬로 적은 $1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, \cdots$ 에서 각각의 수는 3의 거듭제곱이거나 몇 개의 서로 다른 3의 거듭제곱의 합으로 표시된다. 예를 들면

$1=3^0,\ 4=3+1,\ 10=9+1,\ 12=9+3,\ 13=9+3+1$과 같다. 100번째 적힌 정수를 구하여라.[9점]

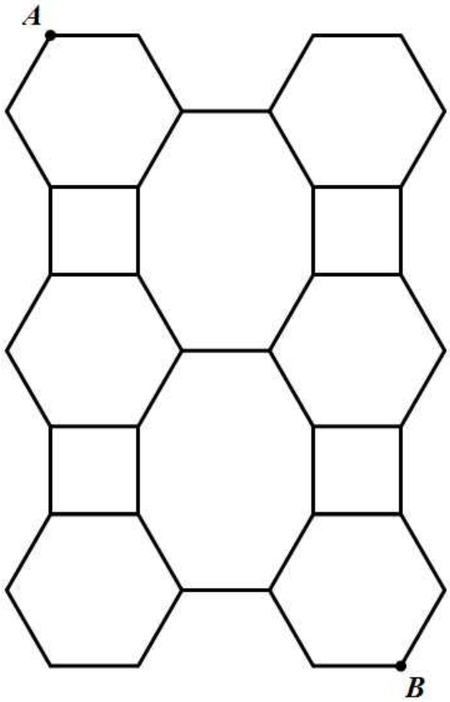
7. [7]A형 바퀴를 장착한 자동차로 45km를 달린 후, 그 지점에서 B형의 바퀴를 장착한 후 그대로 처음 위치까지 돌아 왔더니 거리계에 40km로 나타나 있었다. A형 바퀴의 반지름이 50cm일 때, B형 바퀴의 반지름은? (단, 단위는 cm이다.) [9점]

8. 8) 다음과 같이 모든 자리의 숫자가 1인 이진법의 수들을 $1_{(2)}$부터 자리수를 하나씩 늘려가며 $11111111\cdots\cdots111111111_{(2)}$ (1이30개)까지 더하여 이진법으로 나타내려고 한다.

$$\begin{array}{rr} & 1_{(2)} \\ & 11_{(2)} \\ & 111_{(2)} \\ & 1111_{(2)} \\ & \cdots \\ +\,) & \underline{111111\cdots111111_{(2)}} \ \text{(1이 30개)} \\ & ? \end{array}$$

답을 적기 위해 필요한 숫자 1의 개수를 구하시오. [9점]

9. 9) 다음 그림은 한 변의 길이가 1인 정육각형과 정사각형을 번갈아 붙여 일렬로 세로로 나열한 것을 두 개 수평하게 놓고 그 사이를 역시 길이가 1이고 정사각형의 가로와 평행한 선분으로 이어 만든 경로이다. 선분만을 따라 간다고 할 때, 점 A에서 B로 가는 최단 경로의 개수를 구하시오. [10점]



<11번~12번> n개의 LED 전구 $L_1, L_2, \cdots, L_n$이 일렬로 나열되어 있다. 초기에는 모두 꺼진 상태이다. 각 전구는 켜지거나 꺼지는 두 가지 상태만 존재하고, 전구를 터치하면 상태가 바뀌도록 되어 있다. 다음과 같은 규칙으로 한 번에 이 전구들 중 어느 하나의 상태를 바꾸는 “작업”을 할 수 있다고 한다.

(가) L_1은 마음대로 상태를 바꿀 수 있다.

(나) $L_k (2 \le k \le n)$는 $L_1, L_2, \cdots, L_{k-2}$까지 다 꺼져 있고 L_{k-1}가 켜져 있을 때에만 상태를 바꿀 수 있다. (단, L_2는 L_1이 켜져 있을 때에만 상태를 바꿀 수 있다.)

다음 물음에 답하시오.

10. 10) $n=3$일 때 5번 작업해서 만들어낼 수 있는 상태의 가짓수는? [7점]

11. 11) x_n은 모두 켜진 상태가 되기 위해 필요한 최소 작업 횟수, y_n은 마지막 전구만 켜지고 나머지는 모두 꺼진 상태가 되기 위해 필요한 최소 작업 횟수라 하자. 다음 중 옳은 것을 모두 고르시오. [10점]

ㄱ. $y_2=3$, $x_2=2$이다.

ㄴ. 최소 작업 횟수가 되려면 마지막 전구가 처음 켜진 후 다시 이 전구가 꺼지는 일이 없어야 한다.

ㄷ. $n \ge 2$일 때 $y_n = 2y_{n-1}+1$이다.

ㄹ. $x_5 = 20$이다.

ㅁ. $n \ge 3$일 때 $x_n = 2x_{n-1}+1$이다.

ㅂ. $n \ge 3$일 때 $x_n - x_{n-2} = y_{n-1}+1$이다.

12. 12) 1000개의 회전하는 스위치가 있다. 각 스위치는 A, B, C, D 네 개의 위치로 구성되어 있고, $A \to B \to C \to D \to A$ 방향으로만 회전한다고 한다. 현재 모든 스위치는 A위치에 맞추어져 있으며, 각 스위치에는 각각 다른 고유한 번호 $2^x 3^y 5^z$가 매겨져 있다. (x, y, $z = 0$, 1, 2, …, 9) 이제 1000번의 변환 단계를 진행하는데, 매 단계에서 선택되는 스위치의 번호는 가장 큰 번호 (예: 30)와 그 번호의 약수가 매겨진 스위치들 (예; 1,2,3,5,6,10,15)이고, 모두 한 위치씩만 회전시키기로 한다. 모든 변환 단계가 끝나고 나서 A위치에 있는 스위치는 모두 몇 개나 되겠는가? [12점]

13. 13) 세 개의 접시가 놓여 있다. 그 중 두 접시는 비어 있고 나머지 한 접시에는 $n\,(1 \le n \le 100)$개의 쿠키가 놓여 있다. 당신은 다음의 조작을 반복하여 n개의 쿠키를 모두 비어 있는 접시 중 하나에 모두 옮기려 한다.

"허용되는 조작: 한 접시(A라 하자.)에서 다른 한 접시(B라 하자.)로 2의 거듭제곱 개수(2개, 4개, 8개, …)의 쿠키를 집어 옮긴다. 단, 옮기는 쿠키의 개수는, 옮기기 전 B에 있던 쿠키 수보다 많고 옮긴 후 A에 남아있는 쿠키 수보다도 많아야 한다."

당신은 가장 적은 횟수의 조작으로 목표를 이루려고 한다.

그럼에도 불구하고 가장 많은 조작을 해야 하는 것은 n이 어떤 값일 때인가?[12점]

14. 14) x, y는 음이 아닌 정수이고, $x^2+y^2 \neq 0$인 순서쌍 (x, y)에 대한 함수

$$f(x, y)=\frac{(x+y-1)(x+y-2)}{2}+x$$

에 대해 다음 물음에 답하시오.

(1) $5 \leq x+y \leq 6$일 때 $f(x, y)$의 값으로 가능한 서로 다른 자연수는 모두 몇 개인가? [7점]

(2) $a+b<c+d$이고 $f(a, b)=f(c, d)$인 점 (c, d)가 존재하는 점 (a, b)의 개수는 $1 \leq a+b \leq 20$ 범위에서 모두 몇 개인가? [10점]

15. 15) 두 사람이 번갈아 가며 1, 2, 3, 4의 번호가 붙은 네 장의 카드 더미에서 임의로 한 장의 카드를 뽑았다가 다시 넣는다. 게임이 시작한 이후에 나온 숫자들의 합이 3으로 나누어떨어지면 바로 게임은 끝나고, 마지막 카드를 뽑은 사람이 승자이다. 먼저 시작한 사람이 이길 확률은 얼마인가? [13점]

<16, 17번은 서술형입니다.>

16. 16) 다음 물음에 답하시오.

(1) 평면 위의 한 점 O에서 뻗어 나가는 반직선 OX, OY, OZ 가 이 순서대로 주어져 있다. 즉 $\angle XOZ < 180°$ 인 영역에 반직선 OY가 있다. M이 AB의 중점이 되도록 이 세 반직선 위에 각각 점 A, M, B를 작도하시오. [7점]

(2) 평면 α 위에 볼록사각형 $ABCD$가 주어져 있고, α밖의 한 점 O가 주어져 있다. 네 점 A', B', C', D' 을 각각 직선 OA, OB, OC, OD 위에 잡으려고 하는데 $A'B'C'D'$이 평행사변형이 되게 하는 것이 목적이다. 이 네 점의 위치를 어떻게 잡으면 되는지 논리적으로 설명하라. [10점]

17. 17) $N(>1)$이 다음을 만족하면 이 N을 ‘친근한 수’라고 한다.

“$N=A+B$인 임의의 두 자연수 A, B에 대해, A 또는 B의 자리 수에 있는 한 자리 숫자(0 포함) 중에는 N의 자리 수에 있는 것이 반드시 있다.”

즉, 친근한 수 N은 자신의 자리 수의 숫자를 전혀 사용하지 않는 두 자연수의 합으로 표현될 수 없다. 예를 들어, 120은 1, 2, 0 외의 숫자들로만 이루어진 76과 44의 합으로 표현되므로 친근한 수가 아니다.

이때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 2006은 친근한 수가 아님을 보여라. [7점]

(2) $N>2006$인 친근한 수 N을 하나 찾아라. 이 수가 친근한 수임을 설명하여야 한다. [8점]

(3) N이 자신의 자리 수와 하나도 겹치지 않은 두 개의, 세 개의, $\cdots$, 둘 이상 어떤 개수의 자연수들의 합으로 표현되지 않으면 이 수 N은 ‘엄청 친근한 수’라고 하자. $1<N<100000$ 사이에서 엄청 친근한 수를 하나 찾고 그 이유를 설명하라. [10점]

- 수고하셨습니다. -

※ 영재학교 모의고사 2회 - 통합형
1교시 창의적 문제 해결력 수학 해설

1) [정답] 1.2시간(1시간 12분)
[영역] 대수
[난이도] 하
[해설]
x, y, z를 각각 1시간 동안 A, B, C의 밸브를 통해 탱크에 채워지는 물의 양이라 하자.

$x+y+z=1 \quad \cdots①,\ x+z=\dfrac{1}{1.5} \quad \cdots②,\ y+z=\dfrac{1}{2}\ \cdots③$

①×2−(②+③) 하면 $x+y=\dfrac{5}{6}=\dfrac{1}{1.2}$.

따라서 답은 1.2시간.

2) [정답] $17:3$
[영역] 조합
[난이도] 하
[해설]
X가 우승할 확률은 $\dfrac{1}{3+1}=\dfrac{1}{4}$

Y가 우승할 확률은 $\dfrac{3}{2+3}=\dfrac{3}{5}$

세 마리의 말이 각각 우승할 확률의 합은 1이므로

$1-\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{5}=\dfrac{3}{20}=\dfrac{3}{17+3}$

따라서 Z의 승률은 17:3.

3) [정답] 9
[영역] 기하
[난이도] 하
[해설]
$\triangle PAB \backsim \triangle PCA$이므로

$\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{PC}{PA}=\dfrac{CA}{AB},\ \dfrac{PA}{PC+7}=\dfrac{PC}{PA}=\dfrac{3}{4}$.

따라서 $PC=9$.

4) [정답] 26
[영역] 대수
[난이도] 하
[해설]
여자와 남자의 인원수를 각각 a, b라 하면
$a = 13k$, $b = 12k$라 둘 수 있다.
여자의 연령 총합은 $13k \cdot 34$, 남자의 연령 총합은 $12k \cdot 32$이므로
연령의 총 평균은 $\dfrac{826k}{25k} = \dfrac{826}{25} = 33\dfrac{1}{25}$.

5) [정답] 3
[영역] 정수
[난이도] 하
[해설]
$a+1$이 12와 서로소여야 한다.
따라서 a는 4, 6, 10만 가능.

6) [정답] 981
[영역] 정수
[난이도] 중
[해설]
각각의 수가 3의 거듭제곱이거나 몇 개의 서로 다른 거듭제곱의 합으로 이루어졌으므로 1, 3, 4, $\cdots$, 13, $\cdots$을 삼진법의 수로 나타내면 다음과 같다.

a	1	3	4	9	10	12	13	$\cdots$
$a_{(3)}$	1	10	11	100	101	110	111	$\cdots$

위의 표에서와 같이 주어진 수를 2진수로 나타내고 그것을 십진수로 고치면 연속인 자연수 1, 2, 3, $\cdots$이 얻어진다. 이 연속인 자연수는 주어진 수열의 항 수와 대응한다. 이런 규칙에 근거하여 100을 이진법의 수로 나타낸 다음 그것을 삼진법의 수로 간주하고 나중에 이 삼진법의 수를 십진법의 수로 고치면 된다.
$100_{(10)} = 64 + 32 + 4 = 2^6 + 2^5 + 2^2 = 1100100_{(2)}$
$1100100_{(3)} = 3^6 + 3^5 + 3^2 = 729 + 243 + 9 = 981$
$\therefore$ 구하는 수는 981이다.

7) [정답] $\dfrac{225}{4}\mathrm{cm}$
[영역] 대수
[난이도] 하
[해설] 거리계의 거리는 미리 입력되어 있는 ‘바퀴 1회전당 거리$= l$’을 이용해 다음과 같이 계산된다고 볼 수 있다.
‘바퀴의 회전수 $\times$ l $=$ 거리계의 거리’
따라서 회전수의 비는 거리계 거리의 비와 같은데,
회전수는 둘레의 길이에 반비례하므로 반지름에 반비례 한다.
따라서,

$\frac{1}{50}:\frac{1}{R}=45:40=9:8.$

따라서 $R=\frac{225}{4}cm$

8) [정답] 26개
[영역] 정수
[난이도] 중하
[해설]
각 행에 1을 더하여 합산 한 후 30을 이진수로 바꾸어 빼면 되겠다.

$$\begin{array}{r} 10_{(2)} \\ +100_{(2)} \\ +1000_{(2)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ +10000000000000000_{(2)} \end{array}$$

―――――――――――――――――――――

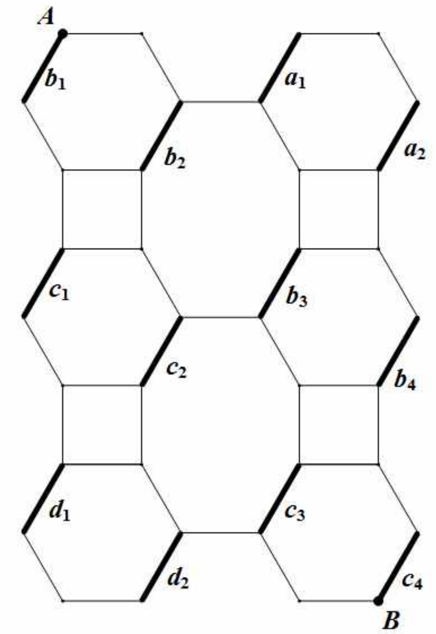
$11111111\cdots\cdots111110_{(2)}$ (1이 30개, 0이 1개)

이제 30을 이진수로 바꾸면 $30=11110_{(2)}$이므로

$1111111\cdots\cdots111110_{(2)}$ (1이 30개, 0이 1개) $-11110_{(2)}$

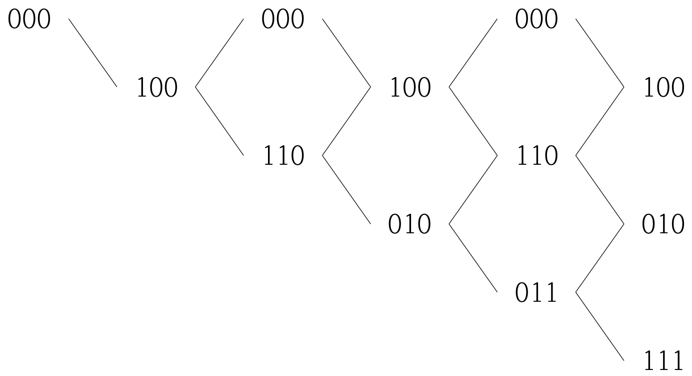
$=1111111\cdots\cdots1100000_{(2)}$ (1이 26개)

9) [정답] 19
[영역] 조합
[난이도] 중상
[해설]
A에서 B로 가는 최단 경로는 최단방향을 역행하는 것이 최소여야 하는데, 이는 그림의 굵은 선 방향을 두 번 지나가는 것이 최선이다.



왜냐하면 A에서 B로 가는 동안 필연적으로 b와 c는 통과해야 하기 때문이다.
따라서 a와 d는 지나가지 않고, b 한 번, c 한 번을 b의 첨자가 c의 첨자보다 크지 않게 선택하면 된다.
단, $b_1 \to c_1$, $b_1 \to c_2$, $b_1 \to c_3$, $b_2 \to c_4$, $b_3 \to c_4$, $b_4 \to c_4$는 직사각형을 지날 때 양방향 선택 가능한 경우가 1번씩 있으므로 2가지씩, $b_1 \to c_4$는 2번 있으므로 4가지, $b_2 \to c_2$, $b_2 \to c_3$, $b_3 \to c_3$는 0번 있으므로 1가지.
따라서 $6 \times 2 + 1 \times 4 + 3 \times 1 = 19$가지.

10) [정답] 3가지
[영역] 조합
[난이도] 중
[해설]
전구가 켜지면 1, 꺼지면 0이라 하고 왼쪽부터 $L_1, L_2, \cdots$의 상태를 0 또는 1로 나열한 숫자열을 하나의 상태라고 하자.
다음과 같이 100, 010, 111의 3가지.



11) [정답] ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅂ
[영역] 조합
[난이도] 중상
[해설]
일단 $x_1 = y_1 = 1$, $x_2 = 2$, $y_2 = 3$은 자명.
처음으로 마지막 자리가 1이 되는 과정은 00⋯010 → 00⋯011 이어야 한다.
그리고 이 이후에 마지막 자리를 바꾸는 것은 앞자리에 영향을 주지 않으므로 불필요하다.
00⋯011→00⋯001이 되는 것은 y_{n-1}번 작업이 필요하므로
$y_n = 2y_{n-1} + 1 \ (n \geq 2)$
이를 풀면 $y_n = 2^n - 1 \ (n \geq 1)$.
위와 비슷하게 00⋯010 → 00⋯011에서 마지막 자리가 처음 1이 되고,
나머지가 바뀌는 것은 x_{n-2}번 작업이 필요하므로
$x_n = x_{n-2} + y_{n-1} + 1 \ (n \geq 3)$.
앞 문제에서 $x_3 = 5$이므로
$x_n = \left[\dfrac{2^{n+1}}{3}\right]$ (단, $[z]$는 z를 넘지 않는 최대의 정수)
따라서 n이 홀수이면 $x_{n+1} = 2x_n$, 짝수이면 $x_{n+1} = 2x_n + 1$.

12) [정답] 650
[영역] 정수
[난이도] 중상
[해설]
1000개의 스위치 중 가장 큰 번호는 $2^9 3^9 5^9$.
스위치 번호 $2^x 3^y 5^z$의 배수의 개수는 $2^{9-x}3^{9-y}5^{9-z}$의 약수로 $(10-x)(10-y)(10-z)$개다.
A 위치에서 멈추려면 이 개수가 4의 배수여야 한다.
여사건의 개수를 구하자. 즉, 이 수가 4의 배수가 아니라면
$10-x, 10-y, 10-z$ 중에서
1) 어느 하나가 4로 나눈 나머지가 2이고 나머지는 홀수.
즉, x, y, z 중 어느 하나가 4의 배수이고 나머지는 홀수.
따라서 $3 \times 3 \times 5^2 = 225$개.
2) 모두 홀수
즉, x, y, z~ 모두 홀수.
따라서 $5^3 = 125$개.
따라서 $10^3 - 225 - 125 = 650$.

13) [정답] 95, 63
[영역] 조합
[난이도] 중상
[풀이]
n을 이진법으로 표현할 때 1인 각 자리 수 각각을 하노이 탑의 원반으로 생각하자.
단, 높은 자리일수록 하노이 탑에서 작은 원반으로 생각하면 이 문제와 하노이 탑 문제는 일대일 대응된다.
원반의 개수가 d개 일 때 하노이 탑의 횟수는 $2^d - 1$임을 알고 있다.
따라서, 원반의 개수가 제일 많으려면 n을 이진법으로 나타낼 때 1의 개수가 제일 많아야 한다.
$1111111_{(2)} = 127 > 100$이므로 많아야 6개의 1이 가능.
따라서 $100 = 1100100_{(2)}$이므로 $1011111_{(2)}$과 $111111_{(2)}$가 이를 만족한다.
각각 십진법으로 95와 63이다.

14) [정답] (1) 7, (2) 40
[영역] 대수
[난이도] 중상
[해설]
$a+b=1$이면 $0 \le a \le 1$이므로 $f(a, b) = 0, 1$.
$a+b=2$이면 $0 \le a \le 2$이므로 $f(a, b) = 0, 1, 2$.
$a+b=3$이면 $0 \le a \le 3$이므로 $f(a, b) = 1, 2, 3, 4$.
$a+b=4$이면 $0 \le a \le 4$이므로 $f(a, b) = 3, 4, 5, 6, 7$.
$\cdots$
이를 통해 $a+b=n$ $(n \ge 1)$일 때 항상 2개의 순서쌍 (a, b)가 조건을 만족하리라 추측할 수 있다.
$a+b=1$, 2일 때는 이 추측이 성립하므로, $a+b=n(n \ge 3)$일 때를 보자. 이때 $0 \le a \le n$.
$\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$는 $1+2+\cdots+(n-2)$를 의미하므로

$1+2+\cdots+(n-2) \le f(a,b) \le 1+2+\cdots+(n-2)+n.$

$f(a,b)=f(c,d)$이고 $a+b<c+d$이라는 조건을 만족하는 경우는

$c+d=n+1$일 때 $1+2+\cdots+(n-1) \le f(c,d) \le 1+2+\cdots+(n-1)+(n+1).$

즉, $(n-1,1)$, $(n,0)$일 때 각각 $1+2+\cdots+(n-1)$, $1+2+\cdots+(n-1)+1$의 두 가지 값이 겹친다.

$c+d \ge n+2$일 때는 $1+2+\cdots+n \le f(c,d)$이므로 $f(a,b) \ne f(c,d)$.

조건을 만족하는 (a,b)는 각 n 값에 따라 항상 2개씩 존재하므로

(1) $x+y=5$일 때 $0 \le x \le 5$이므로 6가지, $x+y=6$일 때 $0 \le x \le 6$이므로 7가지.

겹치는 값은 2가지이므로 $6+7-2=11$.

(2) $2\times 20=40$.

15) [정답] $\frac{13}{23}$

[영역] 조합

[난이도] 중상

[풀이]

a_1, a_2는 한 사람이 자기 차례에, 합이 각각 1이나 2 (mod 3)일 때 이길 확률이라고 하자. b_1, b_2는 한 사람이 상대방 차례에 합이 각각 1이나 2 (mod 3)일 때 이길 확률이라고 하자. 그러면

$P=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}b_1+\frac{1}{4}b_2$

에서 P를 구하면 된다. 이제, 다음 관계식을 얻을 수 있다.

$a_1=\frac{1+b_1+b_2}{4}, a_2=\frac{2+b_1+b_2}{4}$

$b_1=\frac{a_1+2a_2}{4}, b_2=\frac{a_1+a_2}{4}$

이 연립 방정식을 풀면,

$b_1=\frac{11}{23}, b_2=\frac{7}{23}$이므로, $P=\frac{13}{23}$

16) [정답] 풀이참조

[영역] 기하

[난이도] 중상

[해설]

(1) OY 위의 임의의 한 점 M, OC의 중점이 M이 되는 C 작도, C에서 OZ, OX에 평행한 직선을 그려 각각 만나는 점을 A, B라 할 때 AB를 그으면 된다.

증명:

(2) 두 평면 OAC와 OBD의 교선 위에 한 점 E를 잡자. E를 지나 OC, OA, OD, OB와 평행한 직선들을 그려, OA, OC, OB, OD와 만나는 점을 각각 A', B', C', D'라 하면 된다.

증명:

[채점기준]

기본 작도 즉, 수선, 중점, 평행선, 각 옮기기, 길이 옮기기 등 교과서에 실린 작도는 굳이 방법을 자세히 설명하지 않아도 된다. 교과서의 기본 작도를 도구로 해서 이들을 어떻게 이용하는지에 대한 설명만 있으면 OK. 단, 교과서에 실린 기본 작도 외의 작도를 할 때 방법을 생략하거나 따로 증명하지 않으면 절반의 점수를 받는다.

또 너무 많이 생략해서 그 답안만으로 학생이 방법을 알고 있다고 보기 어려운 경우는 0점.

17) [정답] 풀이참조
[영역] 정수
[난이도] 중상
[해설]
(1) 2006=1999+7 이므로 친근한 수가 아니다.
(2) 2007에서 2999까지 중에서 자리 수에 1이 포함된 것들은 모두 친근한 수이다. 예를 들어 2010이 그렇다. 왜냐하면, 이 수를 어느 두 자연수의 합으로 표현하면 둘 중 적어도 하나는 1000 이상이어야 하므로 이 수는 1 또는 2로 시작하게 된다. 따라서 이 수와 자리 수가 겹친 것이 있어서 친근한 수이다.
또 다른 예로는 1234567890과 같은 수이다.
(3) 예: 13579
100000 보다 작아야 하니까 (2)에서 찾은 1234567890은 쓸 수 없다.
대신에 자리 수가 모든 홀수인 수를 잡자. 즉, 13579가 엄청 친근한 수임을 보이자.
이 수는 모든 자리 수가 짝수인 수들의 합으로 표현될 수 없음은 자명하다. 따라서 이들 중 적어도 하나는 자리 수에 홀수가 있을 수밖에 없다.
[채점기준]
각 문제에서 예를 드는 것은 해설과 달라도 된다.
다만, (2), (3)에서 이유를 정확히 설명하지 못하거나 안 한 경우 각각 (2)는 2점, (3)은 3점으로 처리한다.
(1)은 예만 들어도 OK.