2024학년도 영재학교 모의고사
1회 - 진단 평가

- 1교시 : 수학 -

※ 유의사항 ※

1. 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.
2. 반과 이름을 정확히 쓰시오.
3. 문제지 전체 면 수가 맞는지 확인하시오.
4. 문항 당 배점은 답안지에 표시되어 있습니다.
5. 문제를 꼭 잘 읽고, 실수하지 않길 바랍니다.
6. 단답형은 답만 제시하시오.

2024학년도 영재학교 모의고사 문제지

창의적 문제 해결력 수학

제 1교시	수험번호									성명		120분 / 200점

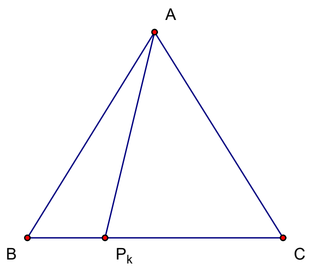
※ 다음 문제를 풀고, 답안을 답안지에 쓰시오.

1. 일정한 다음 연립방정식의 해를 (x, y)라 할 때, $10x+y$ 의 최댓값을 구하여라.(6점)[1]

$$x+\cfrac{5}{x+\cfrac{5}{x+\cfrac{5}{\ddots}}}=y \quad , \quad y+\cfrac{20}{y+\cfrac{20}{y+\cfrac{20}{\ddots}}}=x$$

2. 1부터 101까지 번호가 1장씩 적힌 101장의 카드가 상자 안에 있다. 5장의 카드를 꺼내서 그 합이 131의 배수이면 버리고, 아니면 다시 상자 안에 넣는다. 마지막에 한 장의 카드가 남았다면, 그 카드의 숫자는?(6점)[2]

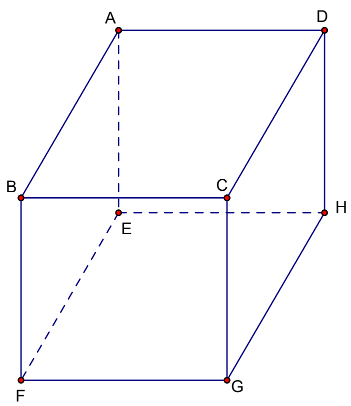
3. $AB = AC = 6$ 인 이등변삼각형 ABC에서 변 BC위에 100개의 점 $P_1, P_2, \cdots, P_{100}$ 이 있다. $k_i = AP_i^2 + BP_i \times CP_i$ ($i = 1, 2, \cdots, 100$)라고 놓자. 이 때, $k_1 + k_2 + \cdots + k_{100}$ 을 구하여라. (6점)[3)]



4. 300의 양의 약수의 역수를 모두 더한 값을 $\frac{y}{x}$라 할 때, $x + y$의 값을 구하여라. (단, $\frac{y}{x}$는 기약분수이다.)(6점)[4)]

5. $xyz=1,\ x+\frac{1}{x}=a,\ y+\frac{1}{y}=b,\ z+\frac{1}{z}=c$ 라고 하자. $a^2+b^2+c^2-abc$ 의 값을 구하여라.(6점)5)

6. 다음 그림은 한 모서리의 길이가 $6cm$인 정육면체이다. 이 정육면체에 내접하는 2개의 정사면체 $ACFH$ 와 $BDEG$ 가 있을 때, 두 정사면체가 겹쳐지는 부분의 입체도형의 부피를 구하여라. (6점)6)



7. 평면 위의 점 O를 중심으로 하는 한 변의 길이가 6인 정육각형 ABCDEF에서 처음에 삼각형 OAB의 위치에 있는 삼각형 XYZ를 다음과 같이 움직인다. “항상 $\triangle XYZ \equiv \triangle OAB$이고, 꼭지점 X는 정육각형의 내부를, 꼭지점 Y, Z는 정육각형의 둘레를 동시에 움직인다.” 점Y, Z가 동시에 정육각형의 둘레를 한 바퀴 돌 때, 점 X가 움직인 거리를 구하여라.(7점)[7]

8. 세 아이돌 BTS, 샤이니, 워너원 에 대한 팬까페 회원 20명의 선호도를 조사하였다. 각 회원이 BTS, 샤이니, 워너원 세 그룹에 대하여 좋아하는 순위를 응답한 결과가 다음과 같았을 때, 샤이니를 제일 좋아한다고 응답한 회원의 수를 구하시오. (단, BTS, 샤이니, 워너원의 선호도 순서에서 한 사람도 응답하지 않는 경우는 없었다.)(7점)[8]

. 11명의 회원은 샤이니보다 BTS를 좋아한다.
. 12명의 회원은 BTS보다 워너원을 좋아한다.
. 14명의 회원은 워너원보다 샤이니를 좋아한다.

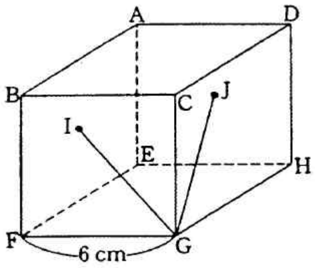
9. 방정식 $x^2+y^2+xy+ax+y=0$ 을 만족시키는 점들로 이루어진 도형이 직선 $x-y+1=0$ 에 대하여 대칭이 되도록 a의 값을 정하여라. (7점)[9)]

10. 삼각형 ABC 에서 $\angle ABC=2\angle ACB$ 이고 점 A에서 변 BC 에 내린 수선의 발을 H, 점 C에서 변 AB 에 내린 수선의 발을 I 라고 하자. 또, AH 와 CI 의 교점을 P 라 하면, $CP=12$, $AP=5$ 이다. 이 때, PH 의 길이를 구하여라.(7점)[10)]

11. 보검이 생일 파티에 10명의 사진사가 몇 장의 사진을 찍었다. 임의의 두 사람의 쌍에 대해, 두 사람이 같이 등장하는 사진은 정확히 1장씩이었고, 각 사진은 두 명 혹은 세 명의 사진들이었다. 사진의 개수의 최솟값을 결정하고, 예를 들어라. (7점)[11]

12. $\triangle ABC$ 의 외심이 O, 변BC 위의 점 D, E 는 B, D, E 의 순서이며 $AD = DB = 6, AE = EC = 8$ 을 만족하는 점이 있다. 점 I가 $\triangle ADE$ 의 내심이며 $AI = 5$일 때, IO 의 길이를 구하여라. (7점)[12]

13. 아래 그림은 한 변의 길이가 $6cm$인 정육면체이다. 정육면체를 평면 GIJ (I는 정사각형ABFE, J는 정사각형 AEHD의 대각선의 교점) 으로 절단할 때의 절단면의 면적을 구하여라.(7점)[13)]



14. 1이상 n이하의 자연수 중에서 2의배수, 5의 배수,9의 배수를 모두 제거하고 남은 수의 합을 n번째 행복수 라고 하자. 예를 들어 11번째 행복수는 $1+3+7+11=22$ 이다. 다음 물음에 답하여라.[14)]

(1) 90번째 행복수를 구하여라.(7점)

(2) 270번째 행복수는 90 번째 행복수의 몇 배인지 구하여라.(8점)

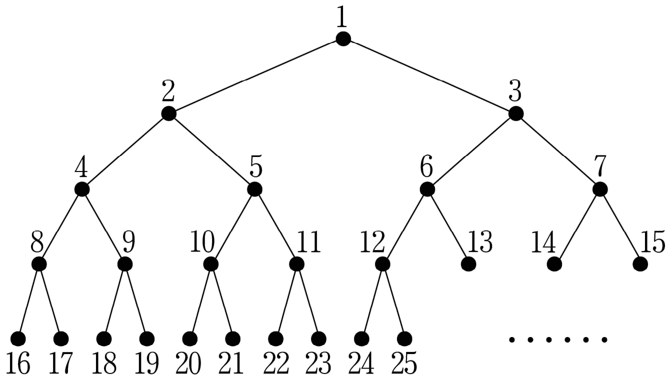
(3) 365번째 행복수를 구하여라.(10점)

15. 자료 x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_{100}에 대하여 다음 과정을 순서대로 시행하였다.

(가) 처음 두 수 x_1과 x_2의 평균을 구한다. (나) x_3을 추가하여 x_1, x_2, x_3의 평균을 구한다. (다) x_4를 추가하여 x_1, x_2, x_3, x_4의 평균을 구한다. $\vdots$ x_{100}을 추가하여 x_1, x_2, $\cdots$, x_{100}의 평균을 구한다.

위의 과정을 시행한 결과, x_1과 x_2의 평균이 5이고, 자료 하나가 추가될 때마다 평균이 1씩 증가하였다. 이때, x_{100}의 값을 구하여라.(10점)[15]

16. 그림과 같이 각각의 점에 1부터 연속된 자연수를 규칙적으로 대응시키고 이 점들을 선분으로 연결한다.



서로 다른 두 자연수 a와 b에 대응되는 두 점을 연결하는 선분들의 최소 개수를 N(a,b)라 하자. 예를 들면 N(4,6)=4 이고, N(12,27)=3 이다. N(32,33)+N(32,34)++N(32,35)+...+N(32,63) 의 값을 구하여라.(10점)[16)]

17. **아래 그림과 같이 번호가 적힌 땅이 있다. 한 사람이 1이라 적힌 영역에서 시작하여 변으로 인접해있는 영역을 통해서만 다른 곳으로 이동한다. 예를 들어,** $1 \to 2 \to 3 \to 2 \to 1$**로 움직인다면 움직인 횟수는** 4**회이고, 움직인 영역의 번호의 합은** $2+3+2+1=8$**이 된다. 아래 물음에 답하여라.**[17]

1	2
4	3

(1) 이 사람이 움직인 영역의 번호의 합이 16일 때, 움직인 횟수의 최댓값과 최솟값을 구하여라. (7점)

(2) (1)의 경우에 가능한 경우의 수를 구하여라. (8점)

(3) 이 사람이 움직인 영역의 번호의 합이 23일 때, 가능한 경우의 수를 구하여라. (10점)

18. **1번에서 12번까지의 번호가 매겨진 카드를 일렬로 놓았다. 이 중 몇 개의 카드를 뽑아 제일 뒤쪽에 다시 배열 조작하여 배치 할 수 있다. 단, 한 번의 조작에 여러 장을 뒤로 보낼 수 있으나, 뒤로 보내어지는 카드의 번호순서는 바뀔 수 없다. 최소한의 조작으로 처음에 카드가 어떻게 배치되어 있더라도 카드번호를 1부터 순서대로 하려고 한다. 다음 물음에 답하여라.**[18)]

(1) 12개의 카드번호 초기배치가 (2,5,6,3,12,4,9,1,8,7,10,11) 과 같을 때, 최소 조작 횟수를 구하여라.(7점)

(2) 가장 많은 조작을 해야 하는 카드번호의 초기배치와 조작 횟수를 구하여라.(8점)

(3) 1회 조작만으로 가능한 카드 번호의 초기배치의 개수를 구하여라.(10점)

19. **다음을 읽고 물음에 답하여라.**[19)]

세포 내의 유전자는 안정적인 상태가 아니다. DNA는 얼마든지 유전자 정보가 바뀔 수 있다. 유전자 정보는 A,T,G,C 4개의 염기들로 구성된다. 유전자는 DNA 복제가 일어날 때 돌연변이에 해서 하나의 염기가 다른 염기로 치환될 가능성이 있으며, A는 T와(A가 T로 또는, T가 A로), C는 G와(C가 G로 또는 G가 C로) 짝을 이루어 $p(0 \le p \le 1)$의 확률로 서로 바뀔 수 있다. 6개의 염기 {ATG TTA} 로 이루어진 유전자가 있다 하자. 이 유전자가 {ATC TTA} 또는 {ATG TTT}로 바뀌면 질병이 발생하고 위 두 경우와 다르게 바뀐다면 질병이 발생하지 않는다 하자. 또한, 이 유전자는 하루에 한 번 세포분열을 통하여 돌연변이를 하고, 한 번에 한 염기만이 바뀔 수 있으며, 한 번 바뀐 염기도 다시 바뀔 수 있다.

(1) {ATG TTA} 유전자를 가지고 있는 사람이 3일 후에 유전자 검사를 해서 질병 상태로 판정될 가능성을 구하라.(10점)

(2) 어느 제약회사가 DNA 복제가 일어날 때 염기 T가 바뀌지 않도록 하는 약을 개발했다 한다. 이 사람이 약을 3일간 복용한 후 질병상태로 판정될 가능성을 구하고, (1)의 결과와 비교하라.(10점)

- 수고하셨습니다. -

※ 영재학교 모의고사 1회 - 진단 평가
1교시 창의적 문제 해결력 수학 해설

1) 39
[출제 영역 :대수]
[난이도 :하]
[배점 : 6점 - 부분점수 없음]

[풀이] $x+\dfrac{5}{y}=y\ \cdots(i),\ y+\dfrac{20}{x}=x\cdots(ii)$
즉, $x=y-\dfrac{5}{y},\ y=x-\dfrac{20}{x}=\dfrac{x^2-20}{x}$이므로 $x=\dfrac{x^2-20}{x}-\dfrac{5x}{x^2-20}$에서
$25x^2=400$이므로 $x=\pm4,\ y=\mp1$(복부호동순)
따라서 구하는 연립방정식의 해는 $(4,-1),(-4,1)$이므로
$10x+y=39,-39$ 이다.
즉, 구하는 최댓값은 39이다.

2) 42
[출제 영역 :정수]
[난이도 :하]
[배점 : 6점 - 부분점수 없음]

[풀이] 1부터 101까지의 합은 5151이다. 꺼낸 5장의 카드가 131의 배수이면 5장의 카드를 버리므로 5151에서 131의 배수를 지워나가면 마지막에 남는 카드의 숫자는 5151을 131로 나눈 나머지가 된다. $5151=131\times39+42$ 이므로 마지막에 남는 카드의 숫자는 42이다.

3) 3600
[출제 영역 :기하]
[난이도 :하]
[배점 : 6점 - 부분점수 없음]

[풀이] BC위의 임의의 점 P_k에 대해 A에서 BC에 내린 수선의 발을 H 라 하면 피타고라스 정리로 $AB^2-AP_k^2=BP_k\times CP_k$ 이다. $AB^2=AP_k^2+BP_k\times CP_k$ 이다. 따라서 $k_1+k_2+\cdots+k_{100}=AB^2\times100=3600$ 이다.

4) 292
[출제 영역 :정수]
[난이도 :중]
[배점 : 6점 - 부분점수 없음]

[풀이] 300의 약수를 작은 것부터 차례로 $a_1=1,a_2=2,a_3=3,\ \ldots,a_{n-1}=150,a_n=300$ 이라 하자.
그러면 300의 약수의 역수의 합 S와 $300S$는 다음과 같다.
$S=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\ ,\ 300S=\dfrac{300}{a_1}+\dfrac{300}{a_2}+\cdots+\dfrac{300}{a_n}$
그런데 자연수 a,b에 대하여 $ab=300$이면 $b=\dfrac{300}{a}$이므로 다음이 성립한다.
$\dfrac{300}{a_1}=a_n,\ \dfrac{300}{a_2}=a_{n-1},\ \cdots,\ \dfrac{300}{a_n}=a_1$
따라서 $300S=(1+2+2^2)(1+3)(1+5+5^2)=868$ 이므로 $S=\dfrac{868}{300}=\dfrac{217}{75}$
$x+y=217+75=292$

5) 4
[출제 영역 :대수]
[난이도 :하]
[배점 : 6점 - 부분점수 없음]

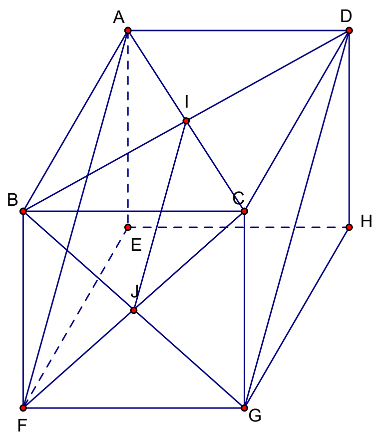
[풀이] $a^2+b^2+c^2=(x+\frac{1}{x})^2+(y+\frac{1}{y})^2+(z+\frac{1}{z})^2=x^2+y^2+z^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+6$

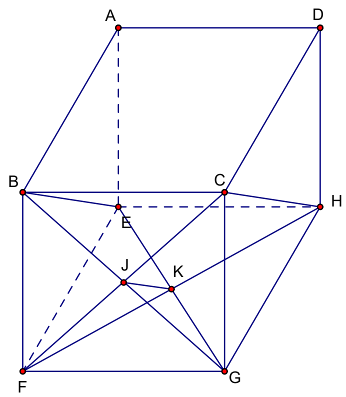
$$abc=(x+\frac{1}{x})(y+\frac{1}{y})(z+\frac{1}{z})$$
$$=xyz+\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}+\frac{xy}{z}+\frac{x}{yz}+\frac{y}{xz}+\frac{z}{xy}+\frac{1}{xyz}$$
$$=1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+x^2+y^2+z^2+1\ (\because xyz=1)$$

$$\therefore a^2+b^2+c^2-3abc=6-2=4$$

6) 36
[출제 영역 :기하]
[난이도 :중]
[배점 : 6점 - 부분점수 없음]

[풀이]





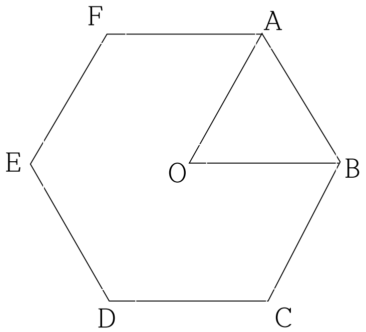
면 ACF와 면 BDG에서 AC와 BD의 교점을 I, CF와 BG의 교점을 J라 할 때, IJ가 두 면의 교선이다. 면 CFH와 면 BEG에서 CF와 BG의 교점은 J이고, FH와 EG의 교점을 K라 할 때, JK가 두 면의 교선이다. 이와 같은 방법으로 구해진 교서에 의해 생기는 입체도형은 정육면체의 각 면의 대각선의 교점을 연결하여 만들어지는 도형으로 정팔면체가 된다.

$$\therefore \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\cdot 3\cdot 2=36$$

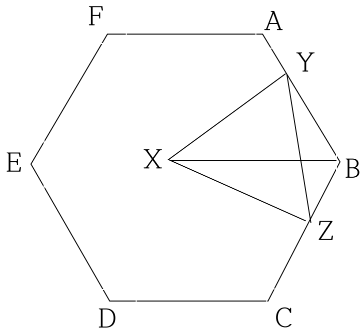
7) $48\sqrt{3}-72$
[출제 영역 :기하]
[난이도 :상]
[배점 : 7점 - 부분점수 없음]

[풀이] 아래 그림에서 맨 처음의 위치와 이동한 후를 생각해 보자. [그림2]에서 $\angle YXZ+\angle YBZ=180^\circ$ 이므로 사각형 YXZB 는 내접사각형이다. 또한 원주각의 관계에 의하여 XB가 $\angle YBZ$의 이등분선임을 알 수가 있다. 즉, 점 X는 Y,Z의 위치에 관계없이 언제나 $\angle B$의 이등분선 위에 있게 된다. 즉, B,X,O 는 일직선이다. 이제 X가 외접원의 중심 O에서 가장 멀리 떨어진 경우를 생각해 보자. BX는 원 안의 한 현이므로 최대의 경우는 지름인 경우이다. 따라서 $\angle XYB=90^\circ$, $\angle YXB=30^\circ$ 일때이다. 즉, $BX\le\frac{r}{\cos30^\circ}=\frac{2}{\sqrt{3}}r$이다. 즉, $XO\le(\frac{2}{\sqrt{3}}-1)r$이다. 이제

X의 자취의 합은 $12\times$XO의 최대값이다. 즉, 구하는 답은 $12\times(\frac{2}{\sqrt{3}}-1)\times 6=(8\sqrt{3}-12)\times 6=48\sqrt{3}-72$ 이다.



[그림1]



[그림2]

8) 8
[출제 영역 :대수]
[난이도 :중]
[배점 : 7점 - 부분점수 없음]

[풀이] BTS, 샤이니,워너원을 각각 A, B, C라고 하자.
선호도는 ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA의 6가지 경우가 있다.
각각에 대하여 회원들이 투표한 결과의 수를 $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$ 라 하면
$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\geq 1$
$a+b+e=11\cdots\cdots$㉠
$d+e+f=12\cdots\cdots$㉡
$a+c+d=14\cdots\cdots$㉢
20명의 회원이 응답했으므로
$c+d+f=9\cdots\cdots$㉣
$a+b+c=8\cdots\cdots$㉤
$b+e+f=6\cdots\cdots$㉥
㉢, ㉣에서 $a=5+f\cdots\cdots$㉦
㉠, ㉤에서 $e=c+3\cdots\cdots$㉧
㉦, ㉧을 ㉠에 대입하면 $f+b+c=3$
$\therefore b=c=f=1$
$\therefore a=6,\ e=4,\ d=7$
따라서 샤이니를 제일 좋아한다고 응답한 수는 $c+d=1+7=8$

9) 2
[출제 영역 :대수]
[난이도 :중]
[배점 : 7점 - 부분점수 없음]

[풀이]
점 (x,y)를 직선 $x-y+1=0$에 대하여 대칭이동시킨 점의 좌표는 $(y-1,x+1)$이므로
$f(x,y)=x^2+y^2+xy+ax+y$라고 두면 두 방정식 $f(x,y)=0$과 $f(y-1,x+1)=0$은 같은 방정식을 나타낸다.
즉, $f(x,y)=f(y-1,x+1)$이다.
이 식을 정리하면 $(2-a)(x-y+1)=0$이다.
$\therefore a=2$이다.

10) $PH=\frac{7}{2}$
[출제 영역 :기하]
[난이도 :중]

[배점 : 7점 - 부분점수 없음]

[풀이]
A를 BC에 대해 대칭시킨 점을 A'라 하고 $\angle B$의 이등분선이 IC와 만나는 점을 E라고 하면

$\triangle PA'C$ 와 $\triangle PDE$ 는 모두 이등변삼각형이고 $PH=\frac{7}{2}$이다.

11) 19
[출제 영역 :정수]
[난이도 :상]
[배점 : 7점 - 부분점수 없음]

[풀이] 3명짜리 사진의 개수를 x, 2명짜리 사진의 개수를 y라 하면
$3x+y=45$.
각 사람은 다른 9명과 같이 등장하는데 9가 홀수이므로 각 사람은 적어도 한 장의 2명짜리 사진에 등장해야 한다.
따라서 $y \geq 5$.
따라서 $x \leq 13$.
이때 $x+y=45-2x \geq 45-2 \cdot 13=19$.
이제 19가 가능함을 보이자.
사람들을 0,1,2,$\cdots$,9로 번호 매기고, 원탁에 둘러 앉은 것처럼 생각하자.
3명 쌍을 먼저 만들면, 123, 345, 567, 781.
이제 0을 포함하고 나머지 사람들이 두 사람 차이나도록 구성하면, 014, 085, 027, 036.
9를 포함하는 쌍을 두 사람 차이나는 다른 4가지 경우로 구성하면, 916, 925, 938, 947.
이제 마지막으로 246을 추가하자.
이제 위의 13개의 3명쌍으로부터 서로 다른 39개의 2명쌍이 생겼다.
남은 6개의 2명쌍은 6개의 2명짜리 사진으로 구성하면 된다.

12) $\frac{23}{5}$
[출제 영역 :기하]
[난이도 :중]
[배점 : 7점 - 부분점수 없음]

[풀이]
O는 삼각형 ADE의 방심이다. $\triangle ADI \backsim \triangle AOE$ 이므로 $6\times 8=5\times AO$
$\therefore IO=\frac{23}{5}$

13) $12\sqrt{11}$
[출제 영역 :기하]
[난이도 :상]
[배점 : 7점 - 부분점수 없음]

[풀이]
G를 지나고 IJ에 평행한 선분을 그린 후 EF, EH 의 연장선과의 교점을 각각 X, Y라 한다. IX와 BF의 교점을 P, JY 와 DH의 교점을 Q, IX 와 JY의 교점을 R 이라 할 때, 사각형$RPGQ$ 가 절단면이 된다. $\therefore 12\sqrt{11}$

14) (1) 1440 (2) 9배 (3) 23764
[출제 영역 :정수]
[난이도 :중]
[배점 : 25점 - (1)은 7점, (2)는 8점, (3)은 10점, 부분점수 없음]

[풀이] (1) 1이상 90이하의 자연수 중에서 2의 배수는 45개, 5의 배수는 18개, 9의 배수는 10개, 10의 배수는 9개, 18의 배수는 5개, 45의 배수는 2개, 90의 배수는 1개 이므로, 1이상 90이하의 자연수 중에서 2의 배수, 5의, 배수, 9의 배수를 모두 제거하고 남은 수는 $90-(45+18+10-9-5-2+1)=32$ 개다. 이수들을 차례대로 나열하면 $1,3,7,\cdots,83,87,89$

90번째 행복수는 $(1+89)+(3+87)+\cdots=90\times\frac{32}{2}=1440$

(2) 181이상 270이하의 자연수 중에서 2의배수, 5의 배수,9의 배수를 모두 제거하고 남은 수는 32개이다.

270번째 행복수는 $270\times\frac{96}{2}=90\times\frac{32}{2}\times9$ 이므로 9배 이다 .

(3) 271 이상 360 이하의 자연수 중에서 2의 배수, 5의 배수,9의 배수를 모두 제거하고 남은 수는 32개이다.

360번째 행복수는 $360\times\frac{128}{2}=90\times\frac{32}{2}\times16$

361이상 365 이하의 자연수 중에서 2의 배수, 5의 배수, 9의 배수를 모두 제거하고 남은 수는 361과 363 이다.

$\therefore$ 365번째 행복수는 $1440\times16+361+363=23764$

15) 202

[출제 영역 :대수]

[난이도 :중]

[배점 : 10점 - 부분점수 없음]

[풀이] x_2 까지의 평균이 5, x_3 까지의 평균이 6, x_4 까지의 평균이 7이므로 x_n 까지의 평균은 $n+3$ 으로 추정할 수 있다.

$\therefore\ \frac{x_1+x_2+\ ...\ +x_n}{n}=n+3$

$\therefore\ x_1+x_2+\ ...\ +x_n=S_n=n^2+3n$

$\therefore\ x_n=S_n-S_{n-1}=(n^2+3n)-\{(n-1)^2+3(n-1)\}\quad=2n+2$

$\therefore\ x_{100}=2\times100+2=202$

16) 258

[출제 영역 :대수]

[난이도 : 중]

[배점 : 10점 - 부분점수 없음]

[풀이] 32는 제6행의 첫째항이다. 33은 제5행의 16에 바로 연결되므로 N(32,33)=2 , 34와 35는 제4행의 8과 제5행의 17에 연결되므로 N(32,34)+N(32,35)=4+4=8,

36~39는 제3행의 4와 제4행의 9에 연결되므로 N(32,36)+N(32,37)+N(32,38)+N(32,39)=6+6+6+6=24,

40~47은 제2행의 2에 연결되므로 N(32,40)+N(32,41)+...+N(32,47)=8×8=64,

마지막 48~63은 제1행의 1에 연결되므로 N(32,48)+N(32,49)+...+N(32,63)=10×16=160 이다.

따라서 2+8+24+64+160=258

17) (1) 최댓값은 9, 최솟값은 5 (2) 42 (3) 397

[출제 영역 :조합]

[난이도 : 상]

[배점 : 25점 - (1)은 7점, (2)는 8점, (3)은 10점, 부분점수 없음]

[풀이]

(1) 1에서 시작하므로 처음으로 움직일 수 있는 자리는 2나 4이다. 그리고 2나 4에서 다음 자리가 될 수 있는 자리는 1이나 3이다. 즉, 처음 자리는 짝수이고, 다음 자리는 홀수가 된다. 그러면 자리 번호의 합은 짝, 홀, 홀, 짝의 반복의 형태가 됨을 확인할 수 있으므로 움직인 영역의 번호의 합이 짝수인 경우는 $4k$, $4k+1$인 경우만 가능하다. 4번 이동할 때 합의 최대는 $2\times(4+3)=14$이고, 12번 이동할 때 합의 최소는 $6\times(2+1)=18$이므로 가능한 횟수는 5, 8, 9회가 가능하다.

(2) 앞에 있던 수에 관계없이 짝수인 경우 2, 4 중 하나를, 홀수인 경우 1, 3중 하나를 결정하면 되므로 모든 짝수는 2, 모든 홀수는 1이라 생각하고, 각각의 수에 2를 더해주면 4, 3이 된다.

(1)에서 정리한대로 5, 8, 9의 경우를 살펴보자.

5회의 경우 $2+1+2+1+2=8$이므로 8을 추가해주면 된다. 즉, ${}_5C_4=5$가지

8회의 경우 $4\times(2+1)=12$이므로 4을 추가해주면 된다. 즉, ${}_8C_2=28$가지

9회의 경우 $4\times(2+1)+2=14$이므로 2를 추가해주면 된다. 즉, ${}_9C_1=9$가지

즉, 모든 경우의 합은 42가지가 된다.

(3) 그리고 (1)과는 기우성이 달라졌으므로 가능한 횟수는 $4k+2$, $4k+3$의 경우를 살펴보면 된다. 6번 이동할 때의 합

의 최대는 $3\times(4+3)=21$이고, 15번 이동할 때의 합의 최소는 $7\times(2+1)+2=23$ 이므로 가능한 이동횟수는 7, 10, 11, 14, 15 회의 경우가 가능하다.

(2)와 같은 방법으로 정리해주면 ${}_7C_6+{}_{10}C_4+{}_{11}C_3+{}_{14}C_1+{}_{15}C_0=397$ 가지가 된다.

18) (1) 3회 (2) 4회(12,11,10,9,8,7,6,5,4,3,2,1) (3) 4083

[출제 영역 :조합]

[난이도 :상]

[배점 : 25점 - (1)은 7점, (2)는 8점, (3)은 10점, 부분점수 없음]

[풀이] 일렬로 배열되어 있는 카드 상태에서 “사이클”을 다음과 같이 정의하자. 카드의 배열상태에서 $k+1$이 k의 뒤쪽에 나타나면 k와 $k+1$은 같은 사이클에 들어가고, $k+1$이 k의 앞쪽에 나타나면 k와 $k+1$은 다른 사이클에 들어간다. 또한 한 사이클은 연속한 수로만 이루어져 있다. 위와 같은 방식으로 하면 1부터 시작해서 차례대로 몇 개의 사이클을 만들 수가 있다. 예를 들면 다음과 같다.

(카드의 배열상태) (1,4,3,2.5,7,6,8)

(사이클) (1,2) (3) (4,5,6) (7,8)

우리가 마지막으로 원하는 배열상태는 사이클이 1개인 상태이다. 따라서 우리는 이 사이클의 개수를 줄여나가야 한다. 이제 어떻게 조작하면 사이클의 개수를 최대로 줄일 수 있는지 알아보자.

조작을 해서 뒤로 보내어지는 수들로 연속한 수끼리 묶어보자. 예를 들어, 2,3,5,7을 뒤로 보낸다면 다음과 같이 묶는다.

(2,3) (5) (7)

어떤 묶음이 i부터 $i+k$까지의 수로 이루어져 있다고 하자. 이 묶음이 뒤로 보내어질 때 i부터 $i+k$까지의 상대적 배열상태는 바뀌지 않으므로 사이클의 상태에 변화를 줄 수 있는 부분은 $i-1$과 i사이, $i+k$와 $i+k+1$사이이다. 이 묶음이 뒤로 보내어지고 나면 반드시 i는 $i-1$의 뒤로 가고, $i+k$는 $i+k+1$의 뒤로 간다. 따라서 $i-1$과 i가 다른 사이클에 들어 있었다면 조작 후 두 사이클은 연결되어 사이클의 개수가 하나 줄고, 그렇지 않았다면 사이클의 개수는 변함이 없다. 또한 $i+k$와 $i+k+1$이 같은 사이클에 들어있었다면 조작 후 그 사이클은 두 개의 사이클로 갈라져 사이클의 개수가 하나 늘고, 그렇지 않았다면 사이클의 개수는 변함이 없다. 그러므로 한 묶음이 뒤로 이동하면서 줄일 수 있는 최대의 사이클의 개수는 1개이다. 그리고 이렇게 되기 위해서는 묶음의 첫 수가 어떤 사이클의 첫수이고 묶음의 끝수가 어떤 사이클의 끝수가 되어야 한다.(단, 묶음의 첫수가 1인 경우는 안된다.)

이제 사이클의 개수를 최대로 줄이는 방법을 생각해 보자. 사이클의 개수는 위의 조건을 만족시키는 묶음의 개수만큼 줄어들기 때문에, 위의 조건을 만족시키는 묶음을 최대로 만드는 방법은 당연히 짝수 번째 사이클을 모두 묶으므로 만드는 방법이다.

예를 들면, 주어진 배열의 사이클이 (1,2) (3) (4,5,6) (7,8)이라면 2번재와 4번째 사이클인 (3) (7,8)을 묶음으로 만들어 뒤로 보내는 것이다. 그러면 사이클은 (1,2,3) (4,5,6,7,8)이 되어 2개가 줄어든다. 따라서 사이클이 k개인 배열이 주어지면 조작을 하여 사이클이 $\left[\dfrac{k+1}{2}\right]$개인 배열상태로 만들 수 있다.

(1) 정답 : 3회

1회 :2,3,4,7,9,10,11을 뒤로 보낸다.

2회 : 5,6,7,12를 보낸다.

3회 : 8,9,10,11,12를 보낸다.

(2) 4회(12,11,10,9,8,7,6,5,4,3,2,1)

(12,11,10,9,8,6,5,4,3,2,1)의 배열이 가장 많이 옮겨야 하는 배열이고, 4회이다.

(3) $(1,2,\cdots,k)(k+1,\cdots,12)$ 로 나누어야 하므로 순서가 정해진 순열로 생각하면 된다.

$\dfrac{12!}{k!(12-k)!}$ $(1\le k\le 11)$인데 여기서 k가 $k+1$의 왼쪽에 있는 경우도 포함되어 있으므로 이 경우 1가지를 제외해줘야 한다. 따라서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{11}\left\{\binom{12}{k}-1\right\}=2^{12}-2-11=4083$ 이다.

19) (1) $\dfrac{4}{27}p^3$ (2) 염기 T가 바뀌지 않는 약을 복용하면 질병 상태로 판정될 가능성이 줄어든다.

[출제 영역 :조합]

[난이도 :상]

[배점 : 20점 - 각 소문항 당 10점, 부분점수 없음]

[풀이] (1) 3일후에 질병이 되는 경우는 3가지 경우 존재.

① TTG TTA -> ATG TTA -> ATC TTA 와 같이 XXG XXA에서 X 중 하나가 두 번 바뀌고 G,A 중 하나가 한 번 바뀌는 경우. 이 때 확률은 $\frac{4}{6}p\times\frac{1}{6}p\times\frac{2}{6}p\times\frac{3!}{2!}=\frac{24}{216}p^3$

② ATC TTA -> ATG TTA -> ATC TTA 와 같이 ATX TTX에서 X 중 하나가 연속으로 세 번 바뀌는 경우이다. 이 때 확률은 $\frac{2}{6}p\times\frac{1}{6}p\times\frac{1}{6}p=\frac{2}{216}p^3$이다.

③ ATC TTA -> ATG TTA -> ATG TTT 와 같이 ATX TTY에서 X와 Y 중 하나는 두 번 나머지 하나는 한 번 바뀌는 경우이다. 이 때 확률은 $\frac{1}{6}p\times\frac{1}{6}p\times\frac{1}{p}\times\frac{3!}{2!}\times 2=\frac{6}{216}p^3$

따라서 구하는 확률은 $\frac{32}{216}p^3=\frac{4}{27}p^3$

(2) T가 바뀌지 않는 약을 3일간 복용하면 {ATG TTA}에서 A가 T로 바뀔 수는 있으나 T가 다시 A로 바뀌지는 않으므로 이 경우 뒤의 염기의 배열에 관계없이 질병 상태가 되지 않는다. 그러므로 질병 상태가 되는 경우는 ATX TTY에서 X가 연속하여 세 번 바뀌는 경우와 X가 두 번, Y가 한 번 바뀌는 경우이다. 이 때의 확률은 $(\frac{1}{6}p)^3+(\frac{1}{6}p)^3\times\frac{3!}{2!}=\frac{4}{216}p^3=\frac{1}{54}p^3$ 이다. 이 값은 (1)에서 구한 확률보다 작으므로 염기 T가 바뀌지 않는 약을 복용하면 질병 상태로 판정될 가능성이 줄어든다.