AMC 10

제 6 회

실전 모의고사

해설

정답표 • 출처 • 단계별 풀이

25문항 모두 AMC 10 기출(2000–2025)을 원문 그대로 사용했습니다. 심화 난이도: 각 문항은 원래 시험보다 두세 번호 앞에 배치되어 있으며, 21–25번은 원래 23–25번 문항입니다. 원문 © Mathematical Association of America.

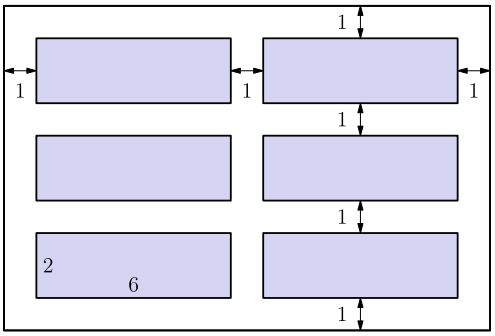
정답표와 출처

번호	정답	출처	영역
1	**B**	2017 AMC 10A 3번	대수
2	**D**	2017 AMC 10B 5번	대수
3	**E**	2021 가을 AMC 10A 5번	정수론
4	**D**	2007 AMC 10B 6번	대수
5	**A**	2020 AMC 10B 7번	정수론
6	**B**	2009 AMC 10A 9번	대수
7	**B**	2020 AMC 10A 10번	기하
8	**C**	2025 AMC 10A 10번	기하
9	**E**	2005 AMC 10B 12번	경우의 수와 확률
10	**C**	2025 AMC 10B 12번	기하
11	**C**	2012 AMC 10A 13번	대수
12	**B**	2013 AMC 10B 15번	기하
13	**E**	2016 AMC 10B 16번	대수
14	**B**	2009 AMC 10B 16번	기하
15	**B**	2013 AMC 10A 18번	기하
16	**E**	2023 AMC 10B 18번	정수론
17	**A**	2024 AMC 10B 20번	경우의 수와 확률
18	**D**	2015 AMC 10B 21번	정수론
19	**B**	2012 AMC 10B 22번	경우의 수와 확률
20	**C**	2018 AMC 10B 22번	경우의 수와 확률
21	**C**	2014 AMC 10A 23번	기하
22	**B**	2014 AMC 10B 24번	경우의 수와 확률
23	**B**	2022 AMC 10B 24번	대수
24	**B**	2010 AMC 10A 25번	정수론
25	**A**	2015 AMC 10A 25번	경우의 수와 확률

1 대수

출처: 2017 AMC 10A 3번

타마라의 정원에는 가로 6 피트, 세로 2 피트인 꽃밭이 한 줄에 두 개씩 세 줄로 있다. 그림과 같이 꽃밭들은 폭 1 피트인 통로로 서로 떨어져 있고, 통로가 꽃밭 전체를 둘러싸고 있다. 통로의 넓이의 합은 몇 제곱피트인가?



(A) 72 **(B)** 78 **(C)** 90 **(D)** 120 **(E)** 150

핵심 아이디어. 통로는 모양이 복잡하지만, 정원 전체는 단순한 직사각형입니다. 정원 전체의 넓이를 구한 뒤 꽃밭의 넓이를 빼 봅시다.

1단계. 가로 방향으로는 길이 6인 꽃밭 2개와 폭 1인 통로 3개(왼쪽, 가운데, 오른쪽)가 있으므로, 가로의 길이는 $2 \cdot 6 + 3 \cdot 1 = 15$ 피트입니다.

2단계. 세로 방향으로는 높이 2인 꽃밭 3개와 폭 1인 통로 4개(위, 사이의 두 개, 아래)가 있으므로, 세로의 길이는 $3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 10$ 피트입니다.

3단계. 정원의 넓이는 $15 \cdot 10 = 150$ 제곱피트입니다. 꽃밭 여섯 개의 넓이는 $6 \cdot (6 \cdot 2) = 72$ 제곱피트입니다. 나머지가 통로이므로 통로의 넓이는 $150 - 72 = 78$ 제곱피트입니다.

주의. 중간에 구한 두 수가 모두 선택지에 있습니다. 150(E)은 정원 전체, 72(A)는 꽃밭만의 넓이입니다. 문제는 그 나머지를 묻고 있습니다.

정답: (B) 78

2 대수

출처: 2017 AMC 10B 5번

> 카밀라는 블루베리 젤리빈을 체리 젤리빈의 두 배만큼 가지고 있었다. 각 종류를 10개씩 먹고 나니, 이제 블루베리 젤리빈이 체리 젤리빈의 세 배가 되었다. 카밀라가 처음에 가지고 있던 블루베리 젤리빈은 몇 개인가?
>
> **(A)** 10 **(B)** 20 **(C)** 30 **(D)** 40 **(E)** 50

핵심 아이디어. 모르는 개수를 문자로 놓고, 문장 하나하나를 식으로 바꾼 뒤 두 식을 연립해 봅시다.

처음에 가진 체리 젤리빈의 개수를 c, 블루베리 젤리빈의 개수를 b라 합시다.

"두 배"라는 조건에서 $b = 2c$입니다. 각각 10개씩 먹으면 블루베리는 $b - 10$개, 체리는 $c - 10$개가 남고, "세 배"라는 조건에서 $b - 10 = 3(c - 10)$입니다.

둘째 식에 $b = 2c$를 대입하면 $2c - 10 = 3c - 30$이므로 $c = 20$입니다. 따라서 $b = 2 \cdot 20 = 40$입니다.

확인해 봅시다. 처음에 40개와 20개가 있고, 먹은 뒤에는 30개와 10개가 남으며 $30 = 3 \cdot 10$입니다.

주의. 묻는 것은 **블루베리** 젤리빈의 개수입니다. $c = 20$에서 멈추면 (B)를 고르게 됩니다.

정답: (D) 40

---

3 정수론

출처: 2021 가을 AMC 10A 5번

> 여섯 자리 수 $\underline{2}\,\underline{0}\,\underline{2}\,\underline{1}\,\underline{0}\,\underline{A}$는 단 하나의 숫자 A에 대해서만 소수이다. A의 값은?
>
> **(A)** 1 **(B)** 3 **(C)** 5 **(D)** 7 **(E)** 9

핵심 아이디어. 문제에서 조건을 만족하는 선택지가 정확히 하나라고 보장하므로, $20210A$가 소수임을 직접 증명할 필요는 없습니다. 나머지 네 선택지가 합성수를 만든다는 것만 보이면 됩니다. 간단한 배수 판정법으로 충분합니다.

$A = 1$ 또는 $A = 7$. 각 자리 숫자의 합은 $2 + 0 + 2 + 1 + 0 + A = 5 + A$이고, 이는 6 또는 12입니다. 둘 다 3의 배수이므로 202101과 202107은 3으로 나누어떨어집니다.

$A = 5$. 일의 자리 숫자가 5이므로 202105는 5로 나누어떨어집니다.

$A = 3$. 11의 배수 판정법을 씁니다. 각 자리 숫자를 번갈아 더하고 빼는 것입니다. 202103에서는 $2 - 0 + 2 - 1 + 0 - 3 = 0$이고, 이는 11의 배수입니다. 실제로 $202103 = 11 \cdot 18373$입니다.

남은 선택지는 $A = 9$뿐입니다. (확인해 보면 202109는 실제로 소수입니다. 449 이하의 소인수가 없고, $450^2 = 202500 > 202109$이기 때문입니다.)

정답: (E) 9

4 대수

출처: 2007 AMC 10B 6번

> 2007 AMC 10은 정답 하나에 6점, 오답 하나에 0점, 답하지 않은 문제 하나에 1.5점을 주는 방식으로 채점된다. 25문제를 훑어본 뒤, 세라는 처음 22문제를 풀고 마지막 3문제만 답하지 않기로 했다. 100점 이상을 얻으려면 처음 22문제 중 몇 문제를 맞혀야 하는가?
>
> **(A)** 13 **(B)** 14 **(C)** 15 **(D)** 16 **(E)** 17

핵심 아이디어. 이미 확보된 점수(답하지 않은 문제)를 먼저 챙기고, 나머지를 6점짜리 정답 몇 개로 채울 수 있는지 생각해 봅시다.

1단계. 답하지 않은 3문제는 무슨 일이 있어도 $3 \cdot 1.5 = 4.5$점입니다. 처음 22문제 중 오답은 0점이므로, 점수를 더해 주는 것은 정답뿐입니다.

2단계. 세라에게는 아직 $100 - 4.5 = 95.5$점이 필요하고, 정답 하나는 6점입니다. 정답이 k개라면 $6k \geq 95.5$, 즉 $k \geq \dfrac{95.5}{6} \approx 15.9$이어야 합니다.

3단계. 이웃한 두 값을 확인해 봅시다. 15개를 맞히면 $6 \cdot 15 + 4.5 = 94.5$점으로 모자랍니다. 16개를 맞히면 $6 \cdot 16 + 4.5 = 100.5 \geq 100$이므로 충분합니다. 따라서 적어도 16개를 맞혀야 합니다.

주의. 답하지 않은 문제의 4.5점을 잊으면 $6k \geq 100$을 풀게 되어 $k \geq \frac{100}{6} \approx 16.7$, 즉 $k = 17$이 나옵니다. 선택지 (E)입니다.

정답: (D) 16

5 정수론

출처: 2020 AMC 10B 7번

> 2020보다 작은 3의 양의 짝수 배수 중에서 완전제곱수인 것은 몇 개인가?
>
> **(A)** 7 **(B)** 8 **(C)** 9 **(D)** 10 **(E)** 12

핵심 아이디어. "3의 짝수 배수"는 곧 "6의 배수"입니다. 완전제곱수가 2로도 3으로도 나누어떨어지려면, 그 제곱근이 이미 2와 3으로 나누어떨어져야 합니다.

1단계. m^2이 소수 2로 나누어떨어지면 m도 2로 나누어떨어집니다. 소수 3에 대해서도 마찬가지입니다. 따라서 m은 6의 배수이고, $m = 6k$라 하면 구하는 제곱수는 정확히 $(6k)^2 = 36k^2$ 꼴입니다. 거꾸로, 이런 수는 모두 3의 짝수 배수입니다.

2단계. $36k^2 < 2020$, 즉 $k^2 < \frac{2020}{36} \approx 56.1$이어야 합니다. $7^2 = 49 < 56.1 < 64 = 8^2$이므로 가능한 값은 $k = 1, 2, \ldots, 7$입니다.

확인. 가장 큰 것은 $42^2 = 1764 < 2020$이고, 그다음 수인 $48^2 = 2304$는 너무 큽니다.

따라서 이런 제곱수는 $36, 144, 324, 576, 900, 1296, 1764$의 7개입니다.

정답: (A) 7

---

6 대수

출처: 2009 AMC 10A 9번

> $a < b < 2009$인 양의 정수 a, b, 2009가 공비가 정수인 등비수열을 이룬다. a의 값은?
>
> **(A)** 7 **(B)** 41 **(C)** 49 **(D)** 287 **(E)** 2009

핵심 아이디어. 세 항을 a, ar, ar^2으로 씁니다. 그러면 $ar^2 = 2009$이므로 r^2은 2009의 약수여야 합니다. 2009를 소인수분해해 봅시다.

정수인 공비를 r이라 합시다. 세 항은 a, $b = ar$, $ar^2 = 2009$입니다. $a < b$이므로 공비는 $r > 1$을 만족합니다.

$2009 = 7 \times 287 = 7 \times 7 \times 41 = 7^2 \cdot 41$로 소인수분해되고, 41은 소수입니다. r^2이 $7^2 \cdot 41$의 약수이고 41은 한 번만 나타나므로, 2009의 약수 중 1보다 큰 완전제곱수는 $7^2 = 49$뿐입니다. 따라서 $r = 7$입니다.

그러면 $a = \dfrac{2009}{49} = 41$, $b = 41 \cdot 7 = 287$이고, 수열 $41,\ 287,\ 2009$는 실제로 $a < b < 2009$를 만족합니다.

주의. 문제는 **첫째** 항인 a를 묻습니다. 가운데 항 $b = 287$을 답하면 (D)를 고르게 됩니다.

정답: (B) 41

---

7 기하

출처: 2020 AMC 10A 10번

> 부피가 각각 $1, 8, 27, 64, 125, 216, 343$세제곱단위인 정육면체 일곱 개를 수직으로 쌓아, 아래에서 위로 갈수록 정육면체의 부피가 작아지는 탑을 만들었다. 맨 아래 정육면체를 제외한 각 정육면체의 밑면은 바로 아래 정육면체 위에 완전히 놓여 있다. 탑의 겉넓이(밑면 포함)는 몇 제곱단위인가?
>
> **(A)** 644 **(B)** 658 **(C)** 664 **(D)** 720 **(E)** 749

핵심 아이디어. 따로 떨어진 일곱 정육면체의 겉넓이를 모두 더한 다음, 두 정육면체가 맞닿는 곳에서 가려지는 넓이만 정확히 빼 봅시다.

1단계. 부피가 $1^3, 2^3, \ldots, 7^3$이므로 모서리의 길이는 $1, 2, \ldots, 7$입니다. 따로 떨어져 있을 때 정육면체들의 겉넓이의 합은 다음과 같습니다.

$$6\left(1^2 + 2^2 + \cdots + 7^2\right) = 6 \cdot 140 = 840.$$

2단계. 모서리의 길이가 k인 정육면체가 바로 아래의 더 큰 정육면체 위에 놓이면, 넓이가 k^2인 정사각형 두 개가 가려집니다. 작은 정육면체의 밑면, 그리고 그것이 덮는 큰 정육면체 윗면의 같은 크기 부분입니다. 맞닿는 곳은 $k = 1, 2, \ldots, 6$인 경우이므로, 가려지는 넓이는 다음과 같습니다.

$$2\left(1^2 + 2^2 + \cdots + 6^2\right) = 2 \cdot 91 = 182.$$

3단계. 탑의 겉넓이는 $840 - 182 = 658$입니다.

다른 풀이. 보이는 면을 직접 세어 봅시다. 모든 정육면체의 옆면 네 개는 완전히 드러나 있으므로 $4{\cdot}140 = 560$입니다. 위에서 똑바로 내려다보면 드러난 윗면들이 모여 7×7 정사각형을 채우므로 넓이가 49이고, 밑면이 또 49를 더합니다. 합계는 $560 + 49 + 49 = 658$입니다.

> **주의.** 맞닿는 넓이를 한 번씩만 빼면 $840 - 91 = 749$, 즉 선택지 (E)가 됩니다. 맞닿을 때마다 **두** 정육면체 모두에서 면이 가려집니다.

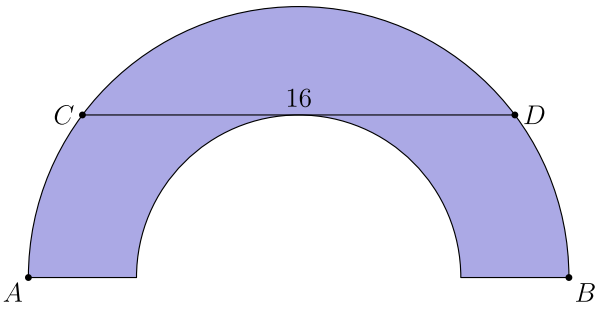
정답: (B) 658

---

8 기하

출처: 2025 AMC 10A 10번

지름이 AB인 반원에 길이가 16이고 AB와 평행한 현 CD가 있다. 지름이 AB 위에 있고 CD에 접하는 더 작은 반원을 아래 그림과 같이 큰 반원에서 잘라 낸다.



이렇게 만들어진 도형(색칠한 부분)의 넓이는?

(A) 16π **(B)** 24π **(C)** 32π **(D)** 48π **(E)** 64π

> **핵심 아이디어.** 두 반지름을 각각 구할 필요는 없습니다. 필요한 것은 두 반지름의 제곱의 차뿐입니다. 큰 반지름, 현의 절반, 작은 반지름으로 만든 직각삼각형이 정확히 그 값을 알려 줍니다.

1단계. 큰 반원의 중심(AB의 중점)을 O, 그 반지름을 R, 작은 반원의 반지름을 r이라 합시다. CD의 중점을 P라 하면 $PD = 8$이고 $OP \perp CD$입니다(중심에서 현에 내린 수선은 현을 이등분합니다).

2단계. 작은 반원은 중심이 AB 위에 있고, AB와 평행한 직선 CD에 접합니다. 따라서 그 반지름은 두 평행선 사이의 거리, 즉 $r = OP$입니다.

3단계. 직각삼각형 OPD에서 $OD = R$이므로 다음이 성립합니다.

$$R^2 = OP^2 + PD^2 = r^2 + 64, \qquad \text{즉} \qquad R^2 - r^2 = 64.$$

4단계. 색칠한 부분의 넓이는 큰 반원의 넓이에서 작은 반원의 넓이를 뺀 것입니다.

$$\tfrac{1}{2}\pi R^2 - \tfrac{1}{2}\pi r^2 = \tfrac{1}{2}\pi\left(R^2 - r^2\right) = \tfrac{1}{2}\pi \cdot 64 = 32\pi.$$

주의. 이것은 **반**원입니다. $\frac{1}{2}$을 빠뜨리면 $\pi(R^2 - r^2) = 64\pi$, 즉 (E)가 됩니다.

정답: (C) 32π

---

9 경우의 수와 확률

출처: 2005 AMC 10B 12번

공정한 주사위 열두 개를 던진다. 윗면에 나온 수들의 곱이 소수일 확률은?

(A) $\left(\frac{1}{12}\right)^{12}$ **(B)** $\left(\frac{1}{6}\right)^{12}$ **(C)** $2\left(\frac{1}{6}\right)^{11}$ **(D)** $\frac{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{11}$ **(E)** $\left(\frac{1}{6}\right)^{10}$

핵심 아이디어. 자연수들의 곱이 소수가 되려면 한 인수가 소수이고 나머지는 모두 1이어야 합니다. 따라서 정확히 한 주사위에서 $2, 3, 5$ 중 하나가 나오고, 나머지 열한 개에서는 1이 나와야 합니다.

1단계. 소수가 나올 주사위를 고르는 방법은 12가지입니다.

2단계. 그 주사위에서 $2, 3, 5$ 중 하나가 나올 확률은 $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$입니다. 나머지 열한 개의 주사위에서는 각각 확률 $\frac{1}{6}$로 1이 나옵니다.

3단계. 모두 곱합니다.

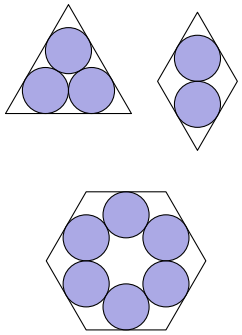
$$12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{11} = 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{11} = \left(\frac{1}{6}\right)^{10}.$$

주의. 소수인 눈을 하나만 세면(확률 $\frac{3}{6}$ 대신 $\frac{1}{6}$) $12 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{11} = 2\left(\frac{1}{6}\right)^{11}$, 즉 선택지 (C)가 나옵니다. 소수인 눈은 $2, 3, 5$의 세 가지임을 기억하세요.

정답: (E) $\left(\frac{1}{6}\right)^{10}$

10 기하

출처: 2025 AMC 10B 12번

> 아래 그림은 정삼각형, 한 각이 60°인 마름모, 정육각형을 나타낸 것이며, 각 도형 안에는 서로 접하는 합동인 원판 몇 개가 들어 있다. 각 경우에 원판 넓이의 합과 둘러싼 다각형의 넓이의 비를 각각 T, R, H라 하자.
>
> 
>
> 다음 중 옳은 것은?
>
> **(A)** $T = H = R$ **(B)** $H < R = T$ **(C)** $H = R < T$ **(D)** $H < R < T$ **(E)** $H < T < R$

핵심 아이디어. 비는 크기와 상관없으므로, 각 그림에서 원판의 반지름을 $r = 1$로 두고 접하는 조건으로 다각형의 한 변을 구한 뒤 세 수를 비교합시다. 60° 꼭짓점의 변에 접하는 조건은 모두 30-60-90 삼각형으로 바뀝니다.

1단계: 삼각형. 밑변과 한 옆변에 접하는 원판은 60° 꼭짓점 안에 놓입니다. 그 중심은 밑변에서 1만큼 위에 있고, 꼭짓점에서 $\frac{1}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}$만큼 안쪽에 있습니다. 아래의 두 원판은 서로 접하므로 중심 사이의 거리는 2입니다. 따라서 한 변은 $s = \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 2 + 2\sqrt{3}$입니다. (위의 원판은 대칭축 위, 꼭대기 꼭짓점에서 2만큼 아래에 중심이 있고, 아래 두 중심과의 거리가 각각 2이므로 딱 맞게 들어갑니다.) 그러면

$$T = \frac{3\pi}{\frac{\sqrt{3}}{4}(2+2\sqrt{3})^2} = \frac{3\pi}{\sqrt{3}\,(4+2\sqrt{3})} = \frac{(2\sqrt{3}-3)\pi}{2} \approx 0.729.$$

2단계: 마름모. 두 원판은 긴 대각선 위에 놓여 마름모의 중심에서 서로 접하고, 각각 60° 꼭짓점의 두 변에도 접합니다. 그 꼭짓점에서 거리 d인 중심은 두 변까지의 거리가 $d\sin 30^\circ = \frac{d}{2}$이므로 $d = 2$입니다. 대각선의 절반은 $d + 1 = 3$이므로 긴 대각선은 6입니다. 한 변이 a이면 긴 대각선은 $a\sqrt{3}$이므로 $a = 2\sqrt{3}$입니다. 넓이는 $a^2 \sin 60^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$이므로

$$R = \frac{2\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9} \approx 0.605.$$

3단계: 육각형. 각 원판은 한 변의 중점에서 그 변에 접하므로, 중심은 육각형의 중심에서 거리 c인 변심거리 위에 있습니다. 이웃한 두 중심은 60° 떨어져 있어 육각형의 중심과 함께 정삼각형을 이루므로 $c = 2$입니다. 변심거리는 $c+1 = 3$이므로 한 변이 a이면 $\frac{\sqrt{3}}{2}a = 3$, $a = 2\sqrt{3}$이고, 넓이는 $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = 18\sqrt{3}$입니다. 그러면

$$H = \frac{6\pi}{18\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9} \approx 0.605.$$

따라서 $H = R < T$ 입니다 (실제로 $0.605 < 0.729$).

정답: (C) $H = R < T$

---

11 대수

출처: 2012 AMC 10A 13번

> 수 $1, 2, 3, 4, 5$의 **반복 평균**은 다음과 같이 계산한다. 다섯 수를 어떤 순서로 나열한다. 처음 두 수의 평균을 구하고, 그 값과 세 번째 수의 평균을 구하고, 다시 그 값과 네 번째 수의 평균을 구한 다음, 마지막으로 그 값과 다섯 번째 수의 평균을 구한다. 이 과정으로 얻을 수 있는 값 중 가장 큰 값과 가장 작은 값의 차는?
>
> **(A)** $\frac{31}{16}$ **(B)** 2 **(C)** $\frac{17}{8}$ **(D)** 3 **(E)** $\frac{65}{16}$

핵심 아이디어. 전체 과정을 하나의 식으로 써 봅시다. 평균을 한 번 낼 때마다 그 전까지의 모든 수의 비중이 절반으로 줄어들므로, 뒤에 오는 수일수록 비중이 큽니다. 값을 최대로 하려면 큰 수를 뒤에, 최소로 하려면 큰 수를 앞에 놓습니다.

1단계. 순서를 a, b, c, d, e라 합시다. 차례로 구한 평균은 다음과 같습니다.

$$\frac{a+b}{2}, \qquad \frac{a+b+2c}{4}, \qquad \frac{a+b+2c+4d}{8}, \qquad \frac{a+b+2c+4d+8e}{16}.$$

따라서 최종 값은 $\frac{a+b+2c+4d+8e}{16}$이고, 가중치는 $1, 1, 2, 4, 8$입니다.

2단계. 값을 가장 크게 하려면 가장 큰 가중치를 가장 큰 수에 줍니다. $e = 5$, $d = 4$, $c = 3$, $\{a, b\} = \{1, 2\}$로 놓으면 다음을 얻습니다.

$$\frac{1+2+2\cdot 3+4\cdot 4+8\cdot 5}{16} = \frac{1+2+6+16+40}{16} = \frac{65}{16}.$$

3단계. 값을 가장 작게 하려면 순서를 뒤집어 $e = 1$, $d = 2$, $c = 3$, $\{a, b\} = \{4, 5\}$로 놓습니다.

$$\frac{5+4+2\cdot 3+4\cdot 2+8\cdot 1}{16} = \frac{5+4+6+8+8}{16} = \frac{31}{16}.$$

(가장 큰 가중치를 가장 큰 수와 짝짓는 것이 최선인 이유는, 순서가 어긋난 두 수를 맞바꾸면 합이 커지기만 하기 때문입니다. 120가지 순서를 모두 확인해도 이 최댓값과 최솟값이 맞습니다.)

4단계. 차는 $\frac{65}{16} - \frac{31}{16} = \frac{34}{16} = \frac{17}{8}$ 입니다.

주의. 두 극값 $\frac{31}{16}$과 $\frac{65}{16}$ 자체가 선택지 (A)와 (E)에 있습니다. 문제가 묻는 것은 두 값의 **차**입니다.

정답: (C) $\frac{17}{8}$

12 기하

출처: 2013 AMC 10B 15번

> 철사 하나를 두 조각으로 자르는데, 한 조각의 길이는 a이고 다른 조각의 길이는 b이다. 길이가 a인 조각을 구부려 정삼각형을 만들고, 길이가 b인 조각을 구부려 정육각형을 만든다. 정삼각형과 정육각형의 넓이가 같다. $\frac{a}{b}$의 값은?
>
> **(A)** 1 **(B)** $\frac{\sqrt{6}}{2}$ **(C)** $\sqrt{3}$ **(D)** 2 **(E)** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

핵심 아이디어. 정육각형은 정삼각형 여섯 개로 이루어집니다. 따라서 두 넓이 모두 한 변의 길이가 s인 정삼각형의 넓이 공식 $\frac{\sqrt{3}}{4}s^2$ 하나로 나타낼 수 있고, 두 넓이를 같게 놓으면 길이의 제곱의 비가 나옵니다.

1단계. 정삼각형의 둘레가 a이므로 한 변의 길이는 $\frac{a}{3}$이고, 넓이는 다음과 같습니다.

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a^2}{9}.$$

2단계. 정육각형의 둘레가 b이므로 한 변의 길이는 $\frac{b}{6}$입니다. 정육각형은 이 길이를 한 변으로 하는 정삼각형 6개로 나뉘므로, 넓이는 다음과 같습니다.

$$6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{b}{6}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{6b^2}{36} = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{b^2}{6}.$$

3단계. 두 넓이를 같게 놓고 $\frac{\sqrt{3}}{4}$을 약분하면 다음을 얻습니다.

$$\frac{a^2}{9} = \frac{b^2}{6} \quad\Longrightarrow\quad \frac{a^2}{b^2} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$

4단계. 양의 제곱근을 취하면 다음과 같습니다.

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \approx 1.22.$$

주의. 넓이는 길이의 **제곱**에 비례합니다. $\frac{a^2}{b^2} = \frac{3}{2}$에서 멈추고 $\frac{3}{2}$이라고 답하면 틀립니다. 실제로 $\frac{3}{2}$은 선택지에 없는데, 이것이 제곱근을 빠뜨렸다는 신호입니다.

다른 풀이. 닮음비로 생각해 봅시다. 정육각형의 한 변의 길이를 s라 하면 $b = 6s$이고, 정육각형의 넓이는 한 변의 길이가 s인 정삼각형의 넓이의 6배입니다. 넓이가 6배인 정삼각형은 한 변의 길이가 $\sqrt{6}$배이므로, 정삼각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{6}\,s$이고 $a = 3\sqrt{6}\,s$입니다. 따라서 $\frac{a}{b} = \frac{3\sqrt{6}\,s}{6s} = \frac{\sqrt{6}}{2}$입니다.

정답: (B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

13 대수

출처: 2016 AMC 10B 16번

> 무한등비급수의 합은 양수 S이고, 이 급수의 둘째 항은 1이다. S의 값이 될 수 있는 가장 작은 수는?
>
> **(A)** $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ **(B)** 2 **(C)** $\sqrt{5}$ **(D)** 3 **(E)** 4

핵심 아이디어. S를 공비 r만으로 나타내 봅시다. "둘째 항 $= 1$"이라는 조건으로 첫째 항을 없앨 수 있습니다. 그러면 S를 최소로 하는 문제가 이차식을 최대로 하는 문제가 되고, 완전제곱식으로 해결됩니다.

1단계. 첫째 항을 a, 공비를 r이라 하고, 급수가 수렴하도록 $|r|<1$이라 합시다. 둘째 항이 $ar=1$이므로 $r\neq 0$이고 $a=\dfrac{1}{r}$입니다. 따라서

$$S=\frac{a}{1-r}=\frac{1}{r(1-r)}.$$

2단계. S는 양수여야 하므로 $r(1-r)>0$이고, ($|r|<1$과 함께) 이는 $0<r<1$을 뜻합니다. 분모가 양수이므로 S는 $r(1-r)$이 가장 클 때 가장 작습니다.

3단계. 완전제곱식으로 바꾸면 다음과 같습니다.

$$r(1-r)=r-r^2=\tfrac{1}{4}-\left(r-\tfrac{1}{2}\right)^2\le\tfrac{1}{4},$$

등호는 $r=\frac{1}{2}$일 때만 성립합니다. 따라서 $S\ge\dfrac{1}{1/4}=4$입니다.

4단계: 실제로 가능합니다. $r=\frac{1}{2}$이면 $a=2$이고, 급수 $2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots$는 둘째 항이 1이고 합이 $\dfrac{2}{1-\frac{1}{2}}=4$입니다.

주의. **양수**라는 말을 잊지 마세요. $-1<r<0$이면 합 $\frac{1}{r(1-r)}$은 음수이고 얼마든지 작게 만들 수 있으므로, 최솟값이 존재하는 것은 $S>0$이라는 제한 덕분입니다.

정답: (E) 4

14 기하

출처: 2009 AMC 10B 16번

> 점 A와 C는 중심이 O인 원 위에 있고, $\overline{BA}$와 $\overline{BC}$는 각각 이 원에 접하며, $\triangle ABC$는 정삼각형이다. 원과 $\overline{BO}$가 만나는 점을 D라 할 때, $\frac{BD}{BO}$의 값은?
>
> **(A)** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **(D)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(E)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

핵심 아이디어. 접선은 접점에서 반지름과 수직입니다. 그래서 A와 C에서 직각삼각형이 생기고, B에서의 60° 각 때문에 이 삼각형들은 30-60-90 삼각형이 됩니다.

1단계. 반지름을 r이라 하면 $OA = OC = r$입니다. $\overline{BC}$는 C에서 원에 접하므로 $\angle OCB = 90^\circ$이고, 마찬가지로 $\angle OAB = 90^\circ$입니다.

2단계. 직각삼각형 BAO와 BCO는 빗변 $\overline{BO}$를 공유하고 $OA = OC$이므로 합동(RHS 합동)입니다. 따라서 $\overline{BO}$는 $\angle ABC = 60^\circ$를 이등분하고, $\angle OBC = 30^\circ$입니다.

3단계. 직각삼각형 BCO에서 30°인 각의 대변은 $OC = r$이고, 30-60-90 삼각형에서 빗변의 길이는 이 변의 두 배입니다. 따라서 $BO = 2r$입니다.

4단계. D는 원 위에 있으므로 $OD = r$이고, $BO = 2r > r$이므로 D는 B와 O 사이에 있습니다. 따라서 $BD = BO - OD = 2r - r = r$이므로 다음을 얻습니다.

$$\frac{BD}{BO} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}.$$

즉, D는 $\overline{BO}$의 중점입니다.

정답: (B) $\frac{1}{2}$

15 기하

출처: 2013 AMC 10A 18번

> 점 $A=(0,0), B=(1,2), C=(3,3), D=(4,0)$에 대하여, 사각형 $ABCD$가 A를 지나는 한 직선에 의해 넓이가 같은 조각들로 나뉜다. 이 직선은 $\overline{CD}$와 점 $\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right)$에서 만나며, 여기서 두 분수는 기약분수이다. $p+q+r+s$의 값은?
>
> **(A)** 54 **(B)** 58 **(C)** 62 **(D)** 70 **(E)** 75

핵심 아이디어. A에서 $\overline{CD}$ 위의 점 G까지 이은 직선은 삼각형 AGD를 잘라 냅니다. 이 삼각형의 밑변 AD는 x축 위에 있으므로, 넓이는 G의 **높이**에만 달려 있습니다. 그리고 그 넓이는 $ABCD$의 넓이의 절반이어야 합니다.

1단계. $ABCD$의 넓이를 구합시다. B와 C에서 x축에 수선을 내리면 수선의 발은 $(1,0)$과 $(3,0)$입니다. 그러면 $ABCD$는 삼각형, 사다리꼴, 삼각형으로 나뉩니다.

$$\tfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 + \tfrac{1}{2}(2+3)\cdot 2 + \tfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 3 = 1+5+\tfrac{3}{2} = \tfrac{15}{2}.$$

2단계. 직선이 $\overline{CD}$와 만나는 점을 G, 그 높이를 y_G라 합시다. 삼각형 AGD는 밑변이 $AD=4$이고, 넓이가 $\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{2}=\frac{15}{4}$가 되어야 합니다.

$$\tfrac{1}{2}\cdot 4\cdot y_G = \tfrac{15}{4} \quad\Longrightarrow\quad y_G = \tfrac{15}{8}.$$

그러면 나머지 조각 $ABCG$의 넓이도 남은 $\frac{15}{4}$입니다.

3단계. 직선 CD는 $(3,3)$과 $(4,0)$을 지나므로 기울기는 -3이고 방정식은 $y=-3x+12$입니다. $y=\frac{15}{8}$를 대입하면 다음과 같습니다.

$$3x = 12-\tfrac{15}{8} = \tfrac{81}{8}, \qquad x = \tfrac{27}{8}.$$

이 값은 3과 4 사이에 있으므로, $G=\left(\frac{27}{8}, \frac{15}{8}\right)$는 실제로 선분 $\overline{CD}$ 위에 있습니다.

4단계. 두 분수 모두 기약분수이므로 $p+q+r+s = 27+8+15+8 = 58$입니다.

정답: (B) 58

16 정수론

출처: 2023 AMC 10B 18번

양의 정수 a, b, c가 다음을 만족시킨다.

$$\frac{a}{14}+\frac{b}{15}=\frac{c}{210}.$$

다음 중 항상 참인 명제를 모두 고른 것은?

I. $\gcd(a,14)=1$ 또는 $\gcd(b,15)=1$ (또는 둘 다)이면, $\gcd(c,210)=1$이다.

II. $\gcd(c,210)=1$이면, $\gcd(a,14)=1$ 또는 $\gcd(b,15)=1$ (또는 둘 다)이다.

III. $\gcd(c,210)=1$일 필요충분조건은 $\gcd(a,14)=\gcd(b,15)=1$이다.

(A) I, II, III **(B)** I만 **(C)** I, II만 **(D)** III만 **(E)** II, III만

핵심 아이디어. 분모를 없애면 c를 a와 b의 결합으로 나타낼 수 있습니다. 그러면 "$\gcd(c,210)=1$"은 c가 네 소수 $2,3,5,7$ 중 어느 것으로도 나누어떨어지지 않는다는 뜻일 뿐이고, 각 소수는 따로따로 확인할 수 있습니다.

1단계: 분모 없애기. 양변에 $210=14\cdot 15$를 곱하면 다음을 얻습니다.

$$c=15a+14b.$$

2단계: 소수 하나씩. $210=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$이므로, $\gcd(c,210)=1$은 $2,3,5,7$ 중 어느 것도 c를 나누지 않는다는 뜻입니다.

- 2로 나눈 나머지: $15a\equiv a$이고 $14b\equiv 0$이므로 $2\mid c \iff 2\mid a$.
- 7로 나눈 나머지: $15a\equiv a$이고 $14b\equiv 0$이므로 $7\mid c \iff 7\mid a$.
- 3으로 나눈 나머지: $15a\equiv 0$이고 $14b\equiv 2b$이므로 $3\mid c \iff 3\mid b$.
- 5로 나눈 나머지: $15a\equiv 0$이고 $14b\equiv 4b$이므로 $5\mid c \iff 5\mid b$.

3단계: 종합하기. 따라서 $\gcd(c,210)=1$인 것은 정확히 a가 인수 2나 7을 갖지 않고 **동시에** b가 인수 3이나 5를 갖지 않을 때, 즉 $\gcd(a,14)=1$이고 $\gcd(b,15)=1$일 때입니다. 이것이 바로 명제 III이므로 III은 참입니다.

4단계: 나머지 두 명제. II: $\gcd(c,210)=1$이면 III에 의하여 두 최대공약수가 모두 1이므로, "둘 중 하나 또는 둘 다"는 당연히 성립합니다. II는 참입니다.

I은 거짓입니다. $a=1$, $b=3$으로 잡으면 $\gcd(a,14)=1$이지만 $c=15+42=57=3\cdot 19$이므로 $\gcd(c,210)=3$입니다. 서로소 조건 하나로는 부족하고, 둘 다 필요합니다.

따라서 항상 참인 것은 II와 III뿐입니다.

주의. I을 $a=b=1$($c=29$로 210과 서로소)처럼 다루기 쉬운 수로만 확인하면 참처럼 보이고, II, III과 함께 (A)를 고르게 됩니다. "항상 참"이라는 주장은 증명이 필요하며, 반례 하나면 무너집니다.

정답: (E) II, III만

17 경우의 수와 확률

출처: 2024 AMC 10B 20번

> 서로 다른 세 켤레의 신발을 한 줄로 놓는데, 어떤 왼쪽 신발도 다른 켤레의 오른쪽 신발과 이웃하지 않도록 한다. 이 여섯 짝의 신발을 한 줄로 늘어놓는 방법의 수는?
>
> **(A)** 60 **(B)** 72 **(C)** 90 **(D)** 108 **(E)** 120

핵심 아이디어. 먼저 줄을 따라 놓인 L(왼쪽 신발)과 R(오른쪽 신발)의 패턴만 봅시다. 규칙이 실제로 작용하는 곳은 L과 R이 만나는 곳뿐입니다. 이곳을 **전환점**이라 부르면, 전환점의 두 신발은 반드시 한 켤레여야 합니다. 그러니 가능한 패턴을 먼저 정한 뒤, 각 패턴을 채우는 방법의 수를 세어 봅시다.

1단계: 전환점이 강제하는 것. 모든 전환점에서 두 신발은 한 켤레를 이룹니다. 같은 글자가 이어진 덩어리를 묶음이라 할 때, 줄 한가운데에 한 글자짜리 묶음이 있다고 해 봅시다. 예를 들어 L R L의 R이 그렇습니다. 이 신발은 양쪽에 모두 전환점이 있으므로 두 이웃 모두의 짝이어야 하는데, 짝은 하나뿐이므로 불가능합니다. 따라서 **안쪽 묶음의 길이는 1일 수 없습니다**(양 끝의 묶음은 괜찮습니다). 같은 글자끼리 이웃하는 경우(LL 또는 RR)는 전혀 문제가 되지 않습니다. 또한 두 전환점은 신발을 공유하지 않고 한 켤레에는 신발이 두 짝뿐이므로, 서로 다른 전환점에는 서로 다른 켤레가 놓입니다.

2단계: 가능한 패턴. L 세 개와 R 세 개가 필요합니다. L로 시작하면 묶음은 L, R, L, ... 순으로 번갈아 나옵니다.

- 묶음 2개: LLLRRR.
- 묶음 3개 (L, R, L): R 묶음은 RRR이고, L은 $1+2$ 또는 $2+1$로 나뉩니다. 즉 LRRRLL, LLRRRL입니다.
- 묶음 4개 (L, R, L, R): 가운데 두 묶음은 길이가 ≥ 2여야 하므로 그 길이는 2와 2이고, 양 끝에는 1과 1이 남습니다. 즉 LRRLLR입니다.
- 묶음 5개 이상: L 세 개로 L 묶음 세 개를 만들면 가운데 L 묶음의 길이가 1이 되므로 불가능합니다.

L과 R을 바꾸면 패턴이 네 개 더 생기므로 모두 8개입니다.

3단계: 각 패턴 채우기. 전환점이 하나인 경우(LLLRRR, RRRLLL): 전환점에 놓을 켤레를 고르고(3가지, 그 켤레의 어느 신발이 어느 쪽에 오는지는 패턴이 정해 줍니다), 나머지 왼쪽 신발 두 짝의 순서(2가지)와 나머지 오른쪽 신발 두 짝의 순서(2가지)를 정하면 각각 12가지입니다. 전환점이 둘인 경우: 두 전환점에 켤레를 배정하는 방법이 $3 \cdot 2 = 6$가지이고, 남은 켤레의 왼쪽 신발과 오른쪽 신발은 각각 들어갈 빈자리가 정확히 하나씩 남으므로 6가지입니다. 전환점이 셋인 경우(LRRLLR, RLLRRL): 모든 신발이 전환점에 있고, 켤레를 배정하는 방법은 $3! = 6$가지입니다.

4단계. 합계는 $2 \cdot 12 + 4 \cdot 6 + 2 \cdot 6 = 24 + 24 + 12 = 60$입니다.

정답: (A) 60

18 정수론

출처: 2015 AMC 10B 21번

> 고양이 코지와 개 대시가 일정한 개수의 칸으로 이루어진 계단을 오르고 있다. 그런데 코지와 대시는 모두 계단을 한 칸씩 걸어 오르는 대신 점프를 한다.
>
> 코지는 한 번 점프할 때마다 두 칸씩 올라간다(단, 필요하면 마지막에는 한 칸만 점프한다).
>
> 대시는 한 번 점프할 때마다 다섯 칸씩 올라간다(단, 남은 칸이 5칸보다 적으면, 필요한 경우 마지막에는 남은 칸만큼만 점프한다).
>
> 대시가 계단 꼭대기에 도달할 때까지 점프하는 횟수가 코지보다 19번 적다고 하자. 이 계단의 칸 수로 가능한 모든 값의 합을 s라 할 때, s의 각 자리 숫자의 합은?
>
> **(A)** 9 **(B)** 11 **(C)** 12 **(D)** 13 **(E)** 15

핵심 아이디어. 계단이 t칸이면 코지는 $\lceil t/2 \rceil$번, 대시는 $\lceil t/5 \rceil$번 점프합니다(마지막의 짧은 점프 때문에 올림을 합니다). 대략 그 차이는 $\frac{t}{2} - \frac{t}{5} = \frac{3t}{10}$이므로 t는 $\frac{190}{3} \approx 63$ 근처입니다. 올림으로 생기는 오차의 범위를 잡아 후보를 몇 개로 줄인 뒤, 각각을 확인합시다.

1단계: t의 범위 좁히기. 올림은 1보다 작은 양만큼만 더하므로 $\frac{t}{2} \le \lceil \frac{t}{2} \rceil \le \frac{t+1}{2}$이고 $\frac{t}{5} \le \lceil \frac{t}{5} \rceil \le \frac{t+4}{5}$입니다. 따라서 차이 $D = \lceil \frac{t}{2} \rceil - \lceil \frac{t}{5} \rceil$에 대해 다음이 성립합니다.

$$\frac{t}{2} - \frac{t+4}{5} \le D \le \frac{t+1}{2} - \frac{t}{5}, \quad \text{즉} \quad \frac{3t-8}{10} \le D \le \frac{3t+5}{10}.$$

$D = 19$로 두면 $3t - 8 \le 190$에서 $t \le 66$이고, $3t + 5 \ge 190$에서 $t \ge 61\frac{2}{3}$입니다. 따라서 $t \in \{62, 63, 64, 65, 66\}$입니다.

2단계: 하나씩 확인하기.

t	62	63	64	65	66
코지 $\lceil t/2 \rceil$	31	32	32	33	33
대시 $\lceil t/5 \rceil$	13	13	13	13	14
차이	18	19	19	20	19

가능한 계단의 칸 수는 63, 64, 66입니다.

3단계. $s = 63 + 64 + 66 = 193$이고, 각 자리 숫자의 합은 $1 + 9 + 3 = 13$입니다.

주의. 해를 일부만 찾고 멈추는 실수. 예를 들어 $t = 64$를 빠뜨리면 $s = 129$이고 각 자리 숫자의 합은 12가 되어 (C)를 고르게 됩니다. 차이는 꾸준히 증가하지 않으므로 모든 후보를 확인해야 합니다.

다른 풀이. 대시가 $d + 1$번 점프한다고 하면 $t \in \{5d + 1, \ldots, 5d + 5\}$입니다. 코지는 $d + 20$번 점프하므로 $t = 2d + 39$ 또는 $2d + 40$입니다. 이 중 자연수 해를 갖는 방정식은 $5d + 3 = 2d + 39$ ($d = 12$, $t = 63$), $5d + 4 = 2d + 40$ ($d = 12$, $t = 64$), $5d + 1 = 2d + 40$ ($d = 13$, $t = 66$)입니다.

정답: (D) 13

19 경우의 수와 확률

출처: 2012 AMC 10B 22번

> 처음 10개의 양의 정수를 나열한 목록 $(a_1, a_2, \ldots, a_{10})$에서, 각 $2 \le i \le 10$에 대하여 $a_i + 1$ 또는 $a_i - 1$ 또는 둘 다가 목록에서 a_i보다 앞의 어딘가에 나타난다. 이러한 목록은 모두 몇 개인가?
>
> **(A)** 120 **(B)** 512 **(C)** 1024 **(D)** 181,440 **(E)** 362,880

핵심 아이디어. 조건을 만족하는 목록을 몇 개 써 보고, 지금까지 쓴 수들을 살펴봅시다. 그 수들은 항상 빈틈없이 연속된 정수의 덩어리를 이룹니다. 새로 쓰는 수는 덩어리의 이웃이어야 하므로 덩어리를 왼쪽이나 오른쪽으로 한 칸 늘립니다. 그러면 목록을 세는 일은 왼쪽/오른쪽 선택을 세는 일이 됩니다.

1단계 (쓴 수들은 덩어리를 이룬다). 첫 항 하나만으로도 덩어리입니다. $a_1, \ldots, a_{i-1}$이 정확히 정수 $\ell, \ell+1, \ldots, h$라고 합시다. 새 항 a_i는 이 중에 없지만, $a_i + 1$이나 $a_i - 1$은 이 중에 있습니다. 덩어리 밖에 있으면서 덩어리 안에 이웃을 가진 수는 $\ell - 1$과 $h + 1$뿐이므로, a_i는 이 둘 중 하나이고 덩어리는 한쪽 끝에서 하나 늘어납니다. 귀납적으로, 목록의 모든 앞부분은 덩어리입니다.

2단계 (목록이란 무엇인가). 따라서 조건을 만족하는 목록은 시작하는 수 a_1과 그 뒤의 9번의 이동으로 이루어집니다. 각 이동은 "왼쪽으로 늘리기"(덩어리 바로 아래의 수를 쓰기) 또는 "오른쪽으로 늘리기"(덩어리 바로 위의 수를 쓰기)입니다. 거꾸로, 이런 이동을 어떻게 이어 가도 규칙을 지킵니다. 새로 쓰는 수가 항상 덩어리의 한쪽 끝 바로 옆에 있기 때문입니다. 목록은 덩어리 $1, 2, \ldots, 10$으로 끝나야 합니다.

3단계 (세기). $a_1 = k$이면 덩어리는 (1에 이르기 위해) 왼쪽으로 $k - 1$번, (10에 이르기 위해) 오른쪽으로 $10 - k$번 늘어나야 합니다. 9번의 이동 중 어느 것이 왼쪽인지 고르면 $\binom{9}{k-1}$가지 목록이 나옵니다. $k = 1, \ldots, 10$에 대해 모두 더하면 다음과 같습니다.

$$\binom{9}{0} + \binom{9}{1} + \cdots + \binom{9}{9} = 2^9 = 512.$$

예를 들어 $a_1 = 1$이면 목록은 $1, 2, \ldots, 10$ 하나뿐이고, 이는 $\binom{9}{0} = 1$과 일치합니다.

다른 풀이. 목록을 거꾸로 읽어 봅시다. 마지막 항 a_{10}은 1 또는 10이어야 합니다. 안쪽 값 v가 마지막에 나온다면 $v - 1$과 $v + 1$이 이미 모두 쓰였을 것이므로, 그 앞의 수들은 덩어리가 될 수 없습니다. 마지막 항을 지우면 다시 덩어리가 남으므로, $a_{10}, a_9, \ldots, a_2$는 각각 남은 수 중 가장 작은 수 또는 가장 큰 수이고 (각각 2가지), a_1은 그때 저절로 정해집니다. 따라서 $2^9 = 512$입니다.

주의. 첫 항을 포함한 10개의 자리 모두에 두 가지 선택을 허용하면 $2^{10} = 1024$로 선택지 (C)를 고르게 됩니다. $a_2, \ldots, a_{10}$이 정해지면 a_1은 남은 한 수이므로 자유롭게 고를 수 있는 것이 아닙니다.

정답: (B) 512

20 경우의 수와 확률

출처: 2018 AMC 10B 22번

> 실수 x와 y를 구간 $[0,1]$에서 독립적이고 균등하게 무작위로 고른다. x, y, 1이 둔각삼각형의 세 변의 길이가 될 확률에 가장 가까운 수는 다음 중 어느 것인가?
>
> **(A)** 0.21 **(B)** 0.25 **(C)** 0.29 **(D)** 0.50 **(E)** 0.79

핵심 아이디어. $[0,1]$에서 고른 두 수는 단위정사각형 안의 무작위 점이므로, 확률은 **넓이**입니다. "삼각형"과 "둔각"이라는 조건을 x와 y에 대한 부등식으로 바꾸어 영역을 칠해 봅시다.

1단계. 삼각형 조건. $x, y \le 1$이므로 길이가 1인 변이 가장 깁니다. 부등식 $x+1>y$와 $y+1>x$는 (넓이를 무시할 수 있는 집합을 제외하면) 자동으로 성립하므로, 실제 조건은 $x+y>1$ 하나뿐입니다. 즉 점이 $(1,0)$과 $(0,1)$을 잇는 직선보다 위에 있어야 합니다.

2단계. 둔각 조건. 둔각은 가장 긴 변, 즉 길이가 1인 변의 맞은편에 있어야 합니다. 코사인법칙에 의해 그 각이 둔각일 필요충분조건은 $x^2+y^2<1^2$입니다. 즉 점이 원점을 중심으로 하는 반지름 1인 사분원 안에 있어야 합니다.

3단계. 넓이. 사분원 안에 있으면서 직선 $x+y=1$보다 위에 있는 영역은, 사분원(넓이 $\frac{\pi}{4}$)에서 꼭짓점이 $(0,0),(1,0),(0,1)$인 직각삼각형(넓이 $\frac{1}{2}$)을 뺀 것입니다. 이 직각삼각형은 사분원 안에 완전히 들어 있습니다. 따라서 확률은 다음과 같습니다.

$$\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\approx 0.7854-0.5=0.2854.$$

가장 가까운 선택지는 0.29입니다.

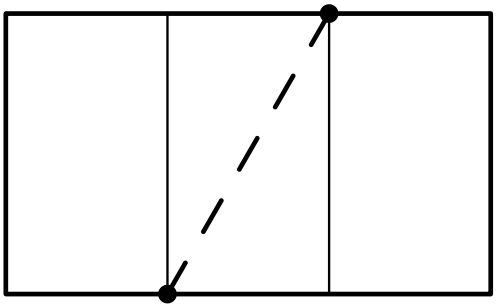
주의. 삼각형 조건을 잊으면 사분원 전체인 $\frac{\pi}{4}\approx 0.79$, 즉 (E)가 됩니다. 반대로 **예각**삼각형의 영역(사분원 밖)을 칠하면 $1-\frac{\pi}{4}\approx 0.21$, 즉 (A)가 됩니다.

정답: (C) 0.29

21 기하

출처: 2014 AMC 10A 23번

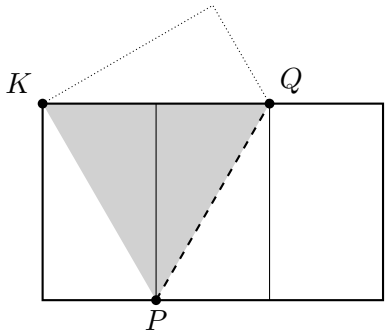
길이가 너비의 $\sqrt{3}$배인 직사각형 모양의 종이의 넓이가 A이다. 이 종이를 마주 보는 두 긴 변을 따라 세 개의 같은 부분으로 나눈 다음, 그림과 같이 한쪽 변의 첫 번째 구분선에서 반대쪽 변의 두 번째 구분선까지 점선을 긋는다. 이 점선을 따라 종이를 평평하게 접어서 넓이가 B인 새로운 도형을 만든다. 비 $B : A$는?



(A) $1 : 2$ **(B)** $3 : 5$ **(C)** $2 : 3$ **(D)** $3 : 4$ **(E)** $4 : 5$

핵심 아이디어. 종이를 접어도 종이의 넓이는 변하지 않습니다. 일부 종이가 다른 종이 위에 겹쳐질 뿐입니다. 따라서 $B = A -$ (겹친 부분)이고, 문제는 겹친 부분의 넓이를 구하는 것으로 바뀝니다. 문제에 나온 $\sqrt{3}$은 60° 각과 정삼각형이 등장할 것임을 암시합니다.

1단계: 좌표. 비는 크기와 상관없으므로 너비를 1, 길이를 $\sqrt{3}$으로 잡으면 $A = \sqrt{3}$입니다. 마주 보는 두 꼭짓점이 $(0,0)$과 $(\sqrt{3},1)$이 되도록 직사각형을 놓습니다. 구분선은 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$과 $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$에 있으므로, 접는 선은 $P = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$에서 $Q = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 1\right)$까지 이어집니다. 왼쪽 위 꼭짓점을 $K = (0,1)$이라 합시다. 오른쪽 부분을 왼쪽으로 접어 넘깁니다.



2단계: 접는 선의 각. 접는 선은 수평 거리 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 동안 1만큼 올라가므로 기울기가 $\sqrt{3}$이고, 밑변과 60°의 각을 이룹니다. 그 길이는 $PQ = \sqrt{\frac{1}{3} + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$입니다.

3단계: 밑변이 놓이는 곳. P의 오른쪽에 있는 밑변 부분의 길이는 $\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$이고, PQ와 60°의 각을 이룹니다. 접으면 이 부분은 PQ에 대하여 반대쪽으로 대칭이동하고 여전히 PQ와 60°를 이루므로, 이제 P에서 밑변과 $60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$를 이루는 방향, 즉 정확히 K 쪽을 향합니다. 또 $PK = \sqrt{\frac{1}{3} + 1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$이므로, 오른쪽 아래 꼭짓점은 정확히 K 위에 놓입니다.

4단계: 겹친 부분. 접혀 넘어간 부분은 꼭짓점이 P, K, Q와 종이 바깥 위쪽에 있는 꼭짓점 하나(점선)로 이루어진 사각형입니다. 선분 KQ는 윗변 위에 있으므로, 접혀 넘어간 부분 중 종이 위에 놓인 부분은 정확히 $\triangle PKQ$(색칠한 부분)입니다. 세 변이 $PK = PQ = KQ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$이므로 이 삼각형은 정삼각형이고, 넓이는 다음과 같습니다.

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{4}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

5단계. 접은 도형의 넓이는 $B = A - \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$이므로

$$B : A = \frac{2\sqrt{3}}{3} : \sqrt{3} = 2 : 3.$$

정답: (C) $2 : 3$

---

22 경우의 수와 확률

출처: 2014 AMC 10B 24번

> 수 $1, 2, 3, 4, 5$를 원 위에 배열하려고 한다. 1부터 15까지의 모든 n에 대하여 원 위에 연속으로 놓인 수들로 이루어진 부분집합 중 합이 n인 것을 찾을 수 있다는 것이 성립하지 않으면, 그 배열을 **나쁜** 배열이라 한다. 회전이나 반사만으로 차이가 나는 배열은 같은 것으로 본다. 서로 다른 나쁜 배열은 몇 개인가?
>
> **(A)** 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5.

핵심 아이디어. 여집합을 이용합니다. 원 위에서 연속한 수들의 묶음에 **들어 있지 않은** 수들도 연속한 묶음을 이루고, 두 묶음의 합을 더하면 15입니다. 따라서 합 n을 만들 수 있는 것과 $15 - n$을 만들 수 있는 것은 같고, 15개의 목표 중 거의 전부가 저절로 해결됩니다. 실제로 확인해야 할 것은 6과 7 뿐입니다.

1단계. 6과 7로 줄이기. 수 하나로 1부터 5까지, 다섯 수 전체로 15를 만들 수 있습니다. 여집합을 생각하면 10부터 14까지도 만들 수 있고, $8, 9$는 각각 $7, 6$을 만들 수 있을 때, 그리고 그때에만 만들 수 있습니다. 따라서 배열이 나쁜 것은 합이 6인 묶음이 **없거나** 합이 7인 묶음이 **없을** 때와 정확히 같습니다.

2단계. 합이 6인 묶음이 없는 경우. $\{1, \ldots, 5\}$의 서로 다른 수로 6을 만드는 방법은 $1+5$, $2+4$, $1+2+3$입니다. 묶음 $\{1, 2, 3\}$이 있는 것은 그 여집합 $\{4, 5\}$가 묶음일 때, 즉 4와 5가 이웃할 때와 같습니다. 따라서 조건은 다음과 같습니다. 5는 1 옆에 있지 않고, 2는 4 옆에 있지 않으며, 5는 4 옆에 있지 않습니다.

그러면 5의 양옆은 모두 $\{2, 3\}$에서 와야 하므로 $2, 5, 3$이 차례로 놓입니다. 4의 양옆은 2나 5일 수 없으므로 3과 1이고, 원은 $2, 5, 3, 4, 1$입니다. 이 원에는 실제로 합이 6인 묶음이 없고, 이런 원은 이것 하나뿐입니다.

3단계. 합이 7인 묶음이 없는 경우. 이제 $7 = 2+5 = 3+4 = 1+2+4$이고, $\{1, 2, 4\}$가 묶음인 것은 3과 5가 이웃할 때와 같습니다. 따라서 5는 2와도 3과도 이웃하지 않고, 3은 4와 이웃하지 않습니다. 5의 양옆은 1과 4이고, 3의 양옆은 $\{1, 2\}$에서 와야 하므로 원은 $4, 5, 1, 3, 2$가 됩니다. 이번에도 원은 정확히 하나이고, 합이 7인 묶음이 없습니다.

4단계. 두 원은 서로 다릅니다(첫 번째 원에서는 5가 2와 3 사이에, 두 번째 원에서는 1과 4 사이에 있습니다). 따라서 나쁜 배열은 정확히 2개입니다. 12가지 배열을 모두 컴퓨터로 확인해도 같은 결과가 나옵니다.

주의. 반사한 배열을 같은 것으로 본다는 조건을 잊으면 나쁜 원 하나하나가 (시계 방향과 반시계 방향으로 읽어) 두 번씩 세어져 4, 즉 선택지 (D)가 됩니다.

정답: (B) 2

---

23 대수

출처: 2022 AMC 10B 24번

모든 실수 x, y에 대하여 다음 부등식을 만족시키는 함수 f를 생각하자.

$$|f(x) - f(y)| \le \frac{1}{2}|x - y|$$

이러한 함수 중에서 등식 $f(300) = f(900)$도 만족시키는 함수에 대하여, 다음 식의 최댓값은

$$f(f(800)) - f(f(400))?$$

(A) 25 **(B)** 50 **(C)** 100 **(D)** 150 **(E)** 200

핵심 아이디어. 주어진 조건은 f가 모든 거리를 적어도 절반으로 줄인다는 뜻입니다. 따라서 f를 두 번 적용하면 거리가 4분의 1로 줄어듭니다. 주어진 등식 $f(300) = f(900)$이 공통의 "만나는 점"을 주므로, $f(f(800))$과 $f(f(400))$을 이 점을 거쳐 비교하고, 마지막으로 그 상한을 실제로 달성하는 f를 만들어 봅시다.

1단계: 두 번 줄이기. 400과 300에 조건을 쓰고, 다시 $f(400)$과 $f(300)$에 조건을 쓰면 다음을 얻습니다.

$$|f(f(400)) - f(f(300))| \le \tfrac{1}{2}|f(400) - f(300)| \le \tfrac{1}{4}|400 - 300| = 25.$$

같은 방법으로 $|f(f(800)) - f(f(900))| \le \frac{1}{4}|800 - 900| = 25$입니다.

2단계: 만나는 점. $f(300) = f(900)$이므로 $f(f(300)) = f(f(900))$입니다. 이 수를 M이라 합시다. 그러면 다음이 성립합니다.

$$f(f(800)) - f(f(400)) = \big(f(f(800)) - M\big) + \big(M - f(f(400))\big) \le 25 + 25 = 50.$$

3단계: 상한의 달성. 등호가 성립하려면 위의 부등식이 모두 등호로 성립해야 합니다. 그렇게 만드는 한 가지 방법은 $f(400)$과 $f(800)$을 각각 $f(300)$보다 50만큼 작게, 50만큼 크게 잡고, 그 두 값 사이에서 f가 최대 비율 $\frac{1}{2}$로 증가하게 하는 것입니다. 이런 함수의 예로, 다음 점들을 차례로 잇는 꺾은선을 f로 잡습니다.

$$(300, 600),\ (400, 550),\ (550, 575),\ (650, 625),\ (800, 650),\ (900, 600),$$

그리고 $x \le 300$, $x \ge 900$에서는 $f(x) = 600$으로 둡니다. 각 선분의 기울기는 $-\frac{1}{2},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{6},\ -\frac{1}{2}$이고 (바깥에서는 0), 모두 절댓값이 $\frac{1}{2}$ 이하이므로 모든 x, y에 대하여 $|f(x) - f(y)| \le \frac{1}{2}|x - y|$가 성립합니다. 또한 $f(300) = f(900) = 600$입니다.

이제 $f(400) = 550$, $f(800) = 650$이므로 다음과 같습니다.

$$f(f(800)) - f(f(400)) = f(650) - f(550) = 625 - 575 = 50.$$

두 가지가 모두 확인되었습니다. 값은 결코 50을 넘지 않고, 50은 실제로 달성됩니다.

주의. 만나는 점을 쓰지 않고 줄이는 성질만 쓰면 $|f(f(800)) - f(f(400))| \le \frac{1}{4} \cdot 400 = 100$을 얻습니다. 이 상한은 참이지만 $f(300) = f(900)$이면 달성될 수 없습니다. 100, 즉 선택지 (C)를 고르는 것이 흔한 실수입니다.

정답: (B) 50

---

24 정수론

출처: 2010 AMC 10A 25번

짐은 양의 정수 n에서 시작하여 수열을 만든다. 다음 수는 현재 수에서 현재 수 이하인 가장 큰 정수의 제곱수를 빼서 얻으며, 이를 0이 될 때까지 계속한다. 예를 들어 짐이 $n = 55$에서 시작하면 그의 수열은 다음과 같이 5개의 수로 이루어진다.

$$\begin{array}{rcrcr} & & & & 55 \\ 55 & - & 7^2 & = & 6 \\ 6 & - & 2^2 & = & 2 \\ 2 & - & 1^2 & = & 1 \\ 1 & - & 1^2 & = & 0 \end{array}$$

짐의 수열이 8개의 수로 이루어지게 하는 가장 작은 수를 N이라 하자. N의 일의 자리 숫자는?

(A) 1 **(B)** 3 **(C)** 5 **(D)** 7 **(E)** 9

핵심 아이디어. n에서 시작하는 수열은 n 뒤에 다음 수에서 시작하는 수열을 이어 붙인 것일 뿐입니다. 따라서 수가 8개인 가장 작은 시작 수는 수가 7개인 가장 작은 시작 수로부터 만들어지고, 그 앞도 마찬가지입니다. 즉 0에서부터 **거꾸로** 올라가면 됩니다. 한 단계씩 거꾸로 밟을 때의 열쇠는, 가장 큰 제곱수를 뺀 뒤 남는 수가 얼마나 클 수 있느냐입니다.

1단계 (다음 수는 얼마나 클 수 있을까?). $s^2 \le n$인 가장 큰 제곱수를 s^2이라 하면 $n < (s+1)^2 = s^2 + 2s + 1$입니다. 다음 수는 $n - s^2$이고, $n - s^2 \le 2s$를 만족합니다.

2단계 (점화식). 수열의 수가 (n과 마지막 0을 포함하여) k개인 가장 작은 시작 수를 m_k라 합시다. 1에서 시작하면 $1, 0$이므로 $m_2 = 1$입니다.

하한. n의 수열의 수가 $k+1$개이면 다음 수 $n' = n - s^2$의 수열의 수는 k개이므로 $n' \ge m_k$입니다. 1단계에 의해 $2s \ge n' \ge m_k$이므로 $s \ge \lceil \frac{m_k}{2} \rceil$입니다. 따라서 $n = s^2 + n' \ge \lceil \frac{m_k}{2} \rceil^2 + m_k$입니다.

등호의 성립. $t = \lceil \frac{m_k}{2} \rceil$, $n = t^2 + m_k$라 합시다. $m_k \le 2t < 2t + 1$이므로 $n < (t+1)^2$이고, 따라서 n 이하인 가장 큰 제곱수는 실제로 t^2이며 다음 수는 m_k입니다. 그러므로 다음이 성립합니다.

$$m_{k+1} = \left\lceil \frac{m_k}{2} \right\rceil^2 + m_k.$$

3단계 (계산).

$$m_3 = 1^2 + 1 = 2, \quad m_4 = 1^2 + 2 = 3, \quad m_5 = 2^2 + 3 = 7,$$
$$m_6 = 4^2 + 7 = 23, \quad m_7 = 12^2 + 23 = 167, \quad m_8 = 84^2 + 167 = 7223.$$

여기서 $84 = \lceil \frac{167}{2} \rceil$ 이고 $84^2 = 7056$ 입니다.

4단계 (확인). 7223에서 시작하면 $7223 - 84^2 = 167$, $167 - 12^2 = 23$, $23 - 4^2 = 7$, $7 - 2^2 = 3$, $3 - 1^2 = 2$, $2 - 1^2 = 1$, $1 - 1^2 = 0$ 입니다. 수가 8개이므로 $N = 7223$이고, 일의 자리 숫자는 3입니다.

> **주의.** 내림이 아니라 **올림**을 해야 합니다. $83 = \lfloor \frac{167}{2} \rfloor$로 계산하면 $83^2 + 167 = 7056 = 84^2$이 되는데, 이것은 완전제곱수이므로 수열이 $7056, 0$뿐입니다. 개수도 조심해서 세어야 합니다. 어느 쪽으로든 하나를 잘못 세어 수가 7개$(N = 167)$이거나 9개$(N = 13{,}053{,}767)$인 경우를 구하면 일의 자리 숫자가 7이 되어 선택지 (D)를 고르게 됩니다.

정답: (B) 3

---

25 경우의 수와 확률

출처: 2015 AMC 10A 25번

> 한 변의 길이가 1인 정사각형을 S라 하자. S의 변 위에서 두 점을 서로 독립적으로 임의로 고른다. 두 점 사이의 직선거리가 $\frac{1}{2}$ 이상일 확률은 $\frac{a - b\pi}{c}$이고, a, b, c는 $\gcd(a, b, c) = 1$인 양의 정수이다. $a + b + c$의 값은?
>
> **(A)** 59 **(B)** 60 **(C)** 61 **(D)** 62 **(E)** 63

> **핵심 아이디어.** 정사각형의 둘레 위의 두 점은 같은 변, 이웃한 변, 마주 보는 변 위에 있을 수 있습니다. 어느 경우인지로 나누면 각 경우가 단위정사각형에서의 간단한 넓이 문제가 됩니다. 답에 있는 π는 어느 한 경우에 원이 등장한다는 힌트입니다.

1단계. 어느 변인가? 첫 번째 점이 어느 변 위에 있든, 두 번째 점이 네 변 각각의 위에 있을 가능성은 모두 같습니다. 따라서 두 점이 같은 변 위에 있을 확률은 $\frac{1}{4}$, 이웃한 변 위에 있을 확률은 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, 마주 보는 변 위에 있을 확률은 $\frac{1}{4}$입니다. 각 점은 자기 변 위에서 균등하게 놓입니다.

2단계. 같은 변. 변 위의 위치를 u, v라 하면, 두 수는 서로 독립이고 $[0, 1]$에서 균등하게 분포합니다. 거리는 $|u - v|$이고, $|u - v| \geq \frac{1}{2}$은 단위정사각형에서 꼭짓점 $(1, 0)$과 $(0, 1)$ 근처의 영역, 즉 직각을 낀 두 변의 길이가 $\frac{1}{2}$인 직각삼각형 두 개이므로 넓이의 합은 $2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$입니다. 확률은 $\frac{1}{4}$입니다.

3단계. 이웃한 변. 각 점의 위치를 공통 꼭짓점으로부터의 거리 u와 v로 나타내면, 두 수는 서로 독립이고 $[0, 1]$에서 균등하게 분포합니다. 두 변은 수직이므로 거리는 $\sqrt{u^2 + v^2}$입니다. 이 거리가 $\frac{1}{2}$보다 작은 것은 사분원 $u^2 + v^2 < \frac{1}{4}$의 내부일 때이고, 이 사분원은 단위정사각형 안에 들어가며 넓이는 $\frac{1}{4} \cdot \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{16}$입니다. 확률은 $1 - \frac{\pi}{16}$입니다.

4단계. 마주 보는 변. 두 변은 평행하고 1만큼 떨어져 있으므로 두 점 사이의 거리는 항상 1 이상입니다. $1 > \frac{1}{2}$이므로 확률은 1입니다.

5단계. 종합.

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{16}\right)+\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{2}{32}+\frac{16}{32}-\frac{\pi}{32}+\frac{8}{32}=\frac{26-\pi}{32}.$$

따라서 $a=26$, $b=1$, $c=32$이고, $b=1$이므로 $\gcd(26,1,32)=1$입니다. 그러므로 $a+b+c=26+1+32=59$입니다.

정답: (A) 59