# AMC 10

## 제 7 회

실전 모의고사

# 해설

정답표 • 출처 • 단계별 풀이

25문항 모두 AMC 10 기출(2000–2025)을 원문 그대로 사용했습니다. 심화 난이도: 각 문항은 원래 시험보다 두세 번호 앞에 배치되어 있으며, 21–25번은 원래 23–25번 문항입니다. 원문 © Mathematical Association of America.

## 정답표와 출처

| 번호 | 정답 | 출처 | 영역 |
|---|---|---|---|
| 1 | **D** | 2004 AMC 10A 4번 | 대수 |
| 2 | **E** | 2011 AMC 10B 5번 | 정수론 |
| 3 | **B** | 2007 AMC 10A 5번 | 대수 |
| 4 | **C** | 2013 AMC 10A 7번 | 경우의 수와 확률 |
| 5 | **B** | 2006 AMC 10B 8번 | 기하 |
| 6 | **E** | 2010 AMC 10A 9번 | 정수론 |
| 7 | **C** | 2023 AMC 10B 10번 | 경우의 수와 확률 |
| 8 | **E** | 2005 AMC 10B 11번 | 대수 |
| 9 | **C** | 2015 AMC 10A 11번 | 기하 |
| 10 | **E** | 2005 AMC 10A 13번 | 대수 |
| 11 | **D** | 2009 AMC 10B 14번 | 대수 |
| 12 | **E** | 2023 AMC 10A 15번 | 기하 |
| 13 | **E** | 2024 AMC 10A 15번 | 정수론 |
| 14 | **D** | 2021 가을 AMC 10A 17번 | 기하 |
| 15 | **B** | 2024 AMC 10B 18번 | 정수론 |
| 16 | **B** | 2022 AMC 10B 18번 | 경우의 수와 확률 |
| 17 | **E** | 2022 AMC 10A 20번 | 대수 |
| 18 | **E** | 2010 AMC 10B 21번 | 경우의 수와 확률 |
| 19 | **D** | 2015 AMC 10B 22번 | 기하 |
| 20 | **B** | 2019 AMC 10B 22번 | 경우의 수와 확률 |
| 21 | **B** | 2008 AMC 10A 23번 | 경우의 수와 확률 |
| 22 | **C** | 2008 AMC 10B 24번 | 기하 |
| 23 | **C** | 2017 AMC 10B 24번 | 기하 |
| 24 | **C** | 2018 AMC 10B 25번 | 대수 |
| 25 | **A** | 2020 AMC 10A 25번 | 경우의 수와 확률 |

## 1 대수

출처: 2004 AMC 10A 4번

> $|x-1| = |x-2|$일 때, $x$의 값은?
>
> **(A)** $-\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $1$ **(D)** $\frac{3}{2}$ **(E)** $2$

**핵심 아이디어.** $|x-a|$를 "수직선 위에서 $x$와 $a$ 사이의 거리"로 읽어 봅시다. 그러면 주어진 식은 $x$가 $1$과 $2$로부터 같은 거리에 있다는 뜻이 됩니다.

수직선 위에서 $1$과 $2$로부터 같은 거리에 있는 점은 두 점을 잇는 선분의 중점 하나뿐입니다.

$$x = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}.$$

확인해 보면 $\left|\frac{3}{2}-1\right| = \frac{1}{2}$이고 $\left|\frac{3}{2}-2\right| = \frac{1}{2}$입니다. 양변의 값이 같습니다.

**다른 풀이.** 양변이 모두 음이 아니므로, 제곱해도 동치인 식이 됩니다. $(x-1)^2 = (x-2)^2$, 즉 $x^2-2x+1 = x^2-4x+4$입니다. $x^2$ 항이 소거되어 $2x = 3$이 남으므로 $x = \frac{3}{2}$입니다.

**주의.** 절댓값 기호를 그냥 떼고 $x-1 = x-2$로 쓰면 $-1 = -2$가 되어 해가 없습니다. 절댓값이 있으면 두 경우로 나누어야 하며, 성립하는 쪽은 $x-1 = -(x-2)$인 경우입니다.

**정답: (D)** $\frac{3}{2}$

## 2 정수론

출처: 2011 AMC 10B 5번

> 두 양의 정수 $a$와 $b$를 곱할 때, 론은 두 자리 수 $a$의 두 숫자의 순서를 뒤바꾸어 계산하였다. 그가 잘못 구한 곱은 $161$이었다. $a$와 $b$의 곱의 올바른 값은?
>
> **(A)** $116$ **(B)** $161$ **(C)** $204$ **(D)** $214$ **(E)** $224$

**핵심 아이디어.** 론이 잘못 구한 곱은 (뒤집은 $a$) $\times\, b = 161$이므로, 뒤집은 수는 $161$의 약수여야 합니다. $161$을 소인수분해하여 두 자리 약수를 찾아봅시다.

**1단계.** 소인수분해하면 $161 = 7 \cdot 23$입니다. $7$과 $23$은 모두 소수이므로 $161$의 약수는 $1, 7, 23, 161$입니다.

**2단계.** 뒤집은 수는 두 자리 수이고, 두 자리 약수는 $23$뿐입니다. 따라서 론은 $a$ 대신 $23$을 사용했고, $b = 161 \div 23 = 7$입니다.

**3단계.** 실제 $a$는 $23$의 두 숫자를 뒤바꾼 수이므로 $a = 32$입니다. 올바른 곱은 다음과 같습니다.

$$32 \cdot 7 = 224.$$

(만약 $a$의 일의 자리 숫자가 $0$이라면, 뒤집은 수는 $1$이나 $7$ 같은 한 자리 수가 되어 $a = 10$ 또는 $a = 70$이고, 올바른 곱은 $1610$이 됩니다. 이것은 선택지에 없습니다.)

> **주의.** 161 (B)로 답하는 실수. 이것은 론이 구한 **잘못된** 곱이지, 문제에서 묻는 곱이 아닙니다.

**정답: (E)** 224

---

## 3 대수

출처: 2007 AMC 10A 5번

> 어느 학교 매점에서 연필 $7$자루와 공책 $8$권을 \$4.15에 판다. 또 연필 $5$자루와 공책 $3$권을 \$1.77에 판다. 연필 $16$자루와 공책 $10$권의 가격은 얼마인가?
>
> **(A)** \$4.76 **(B)** \$5.84 **(C)** \$6.00 **(D)** \$6.16 **(E)** \$6.32

> **핵심 아이디어.** 모르는 가격이 두 개이고 구매 내역도 두 개입니다. 일차방정식 두 개로 연립방정식을 세워 풀고, 새 주문의 가격을 계산합시다. 센트 단위로 계산하면 모든 수가 정수로 유지됩니다.

연필 한 자루의 가격을 $p$센트, 공책 한 권의 가격을 $n$센트라 하면

$$7p + 8n = 415, \qquad 5p + 3n = 177.$$

**1단계.** $n$을 소거합니다. 첫째 식에 $3$을, 둘째 식에 $8$을 곱하면 $21p + 24n = 1245$, $40p + 24n = 1416$입니다. 두 식을 빼면 $19p = 171$이므로 $p = 9$입니다.

**2단계.** $5p + 3n = 177$에 대입하면 $45 + 3n = 177$이므로 $3n = 132$, $n = 44$입니다. 검산: $7(9) + 8(44) = 63 + 352 = 415$. ✓

**3단계.** 새 주문의 가격은 $16(9) + 10(44) = 144 + 440 = 584$센트, 즉 \$5.84입니다.

**정답: (B)** \$5.84

## 4 경우의 수와 확률

출처: 2013 AMC 10A 7번

> 한 학생이 영어, 대수, 기하, 역사, 미술, 라틴어로 이루어진 과목 목록에서 네 과목으로 된 수강 계획을 골라야 한다. 이 수강 계획에는 영어와 적어도 하나의 수학 과목이 반드시 들어 있어야 한다. 이 수강 계획을 고르는 방법은 모두 몇 가지인가?
>
> **(A)** 6 **(B)** 8 **(C)** 9 **(D)** 12 **(E)** 16

**핵심 아이디어.** 영어는 반드시 들어가므로 세 과목만 더 고르면 됩니다. "적어도 하나"는 여사건으로 세는 것이 가장 쉽습니다. 전체를 센 다음, 수학이 **하나도 없는** 경우를 빼면 됩니다.

**1단계.** 영어를 고정하고, 남은 5과목(대수, 기하, 역사, 미술, 라틴어) 중에서 나머지 3과목을 고릅니다. 그러면 $\binom{5}{3} = 10$가지 계획이 나옵니다.

**2단계.** 수학 과목은 대수와 기하입니다. 수학이 없는 계획은 추가로 고르는 3과목을 모두 역사, 미술, 라틴어에서 골라야 하므로, 이런 계획은 정확히 $\binom{3}{3} = 1$가지입니다.

**3단계.** 따라서 조건을 만족하는 계획의 수는 $10 - 1 = 9$입니다.

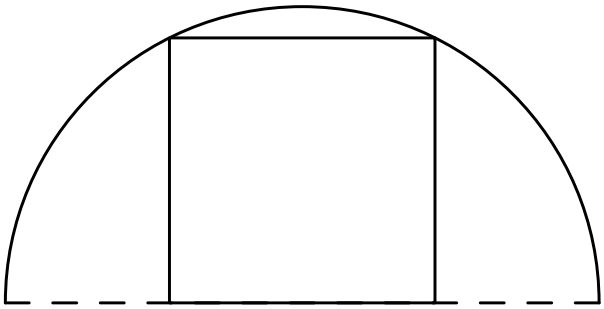
**주의.** "수학 과목 하나를 고르고(2가지), 나머지 4과목 중 아무거나 2과목을 고른다($\binom{4}{2} = 6$가지)"라고 세면 $2 \cdot 6 = 12$로 (D)가 됩니다. 이렇게 세면 대수와 기하를 **둘 다** 포함하는 계획을 모두 두 번씩 세게 됩니다. 그런 계획은 3개이고, $12 - 3 = 9$입니다.

**정답: (C)** 9

## 5 기하

출처: 2006 AMC 10B 8번

넓이가 $40$인 정사각형이 그림과 같이 반원에 내접해 있다. 반원의 넓이는?



**(A)** $20\pi$ **(B)** $25\pi$ **(C)** $30\pi$ **(D)** $40\pi$ **(E)** $50\pi$

**핵심 아이디어.** 반원의 중심과 정사각형의 위쪽 꼭짓점 하나를 이어 봅시다. 이 선분은 반지름이고, 나머지 두 변의 길이를 아는 직각삼각형의 빗변입니다.

정사각형의 한 변의 길이를 $s$라 하면 $s^2 = 40$입니다. 반원의 중심(지름의 중점)을 $O$라 합시다.

정사각형의 위쪽 두 꼭짓점은 호 위에 있으므로 둘 다 $O$로부터의 거리가 $r$입니다. 또 두 꼭짓점은 높이가 같으므로 $O$로부터의 수평 거리도 같습니다. 따라서 $O$는 정사각형의 아랫변의 중점이고, 위쪽 각 꼭짓점은 $O$에서 옆으로 $\frac{s}{2}$, 위로 $s$만큼 떨어져 있습니다.

피타고라스 정리에 의해 다음이 성립합니다.

$$r^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + s^2 = \frac{40}{4} + 40 = 10 + 40 = 50.$$

반원의 넓이는 원 전체 넓이의 절반이므로 $\frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi \cdot 50 = 25\pi$입니다.

**주의.** $\pi r^2 = 50\pi$에서 멈추면 (E)를 고르게 됩니다. 이것은 원 전체의 넓이입니다. 문제는 반원의 넓이를 묻고 있으므로 절반으로 나누어야 합니다.

**정답: (B)** $25\pi$

## 6 정수론

출처: 2010 AMC 10A 9번

> $83438$과 같이 숫자를 거꾸로 배열해도 처음과 같은 수를 **회문수**라 한다. 수 $x$와 $x+32$는 각각 세 자리 회문수와 네 자리 회문수이다. $x$의 각 자리 숫자의 합은?
>
> **(A)** $20$ **(B)** $21$ **(C)** $22$ **(D)** $23$ **(E)** $24$

**핵심 아이디어.** $32$만 더했는데 세 자리 수가 네 자리 수가 되므로, $x+32$는 $1000$ 바로 위의 아주 좁은 범위에 들어가야 합니다.

$x$는 세 자리 수이므로 $x \le 999$이고, 따라서 $x+32 \le 1031$입니다. $x+32$는 네 자리 수이므로 $x+32 \ge 1000$입니다. 따라서

$$1000 \le x+32 \le 1031.$$

$1$로 시작하는 네 자리 회문수는 $1$로 끝나야 하므로 $1aa1$ 꼴입니다. 가장 작은 것은 $1001$, 그다음은 $1111$이고, 이 범위에 들어가는 것은 $1001$뿐입니다. 따라서 $x+32=1001$이므로 $x=969$입니다.

확인: $969$는 거꾸로 읽어도 같으므로 실제로 세 자리 회문수입니다. 각 자리 숫자의 합은 $9+6+9=24$입니다.

**정답: (E)** $24$

---

## 7 경우의 수와 확률

출처: 2023 AMC 10B 10번

> 당신은 게임을 하고 있다. $2\times1$ 직사각형 하나가 (가로 또는 세로 방향으로 놓여) 정사각형 칸으로 이루어진 $3\times3$ 격자의 서로 이웃한 두 칸을 덮고 있지만, 어느 두 칸이 덮여 있는지는 알려 주지 않는다. 목표는 직사각형에 덮인 칸을 적어도 하나 찾는 것이다. 한 번의 "차례"는 당신이 칸 하나를 추측하는 것으로 이루어지며, 그 후 그 칸이 숨겨진 직사각형에 덮여 있는지 여부를 듣게 된다. 추측한 칸 중 적어도 하나가 직사각형에 덮여 있음을 보장하기 위해 필요한 차례의 최소 횟수는?
>
> **(A)** $3$ **(B)** $5$ **(C)** $4$ **(D)** $8$ **(E)** $6$

**핵심 아이디어.** 대답이 매번 "아니요"인 가장 운 나쁜 경우를 생각해 봅시다. 그러면 추측은 미리 정해진 목록이 되고, 이 목록은 직사각형이 놓일 수 있는 모든 위치가 추측한 칸을 적어도 하나 포함할 때에만 성공합니다. 따라서 하한(적은 수의 목록으로는 막을 수 없는 위치들)과 구성(모든 위치를 막는 목록)이 필요합니다.

**1단계: 적어도 $4$번.** 서로 칸을 공유하지 않는 직사각형 위치 네 개가 있습니다. 맨 윗줄의 왼쪽 두 칸, 오른쪽 열의 위쪽 두 칸, 맨 아랫줄의 오른쪽 두 칸, 왼쪽 열의 아래쪽 두 칸입니다(가운데를 둘러싼 바람개비 모양). 직사각형은 이 중 어디에나 있을 수 있으므로, 각 위치마다 따로 추측한 칸이 하나씩 필요합니다. 따라서 $3$번의 추측으로는 결코 충분하지 않습니다.

**2단계: 4번이면 충분.** 격자를 체스판처럼 칠하되 네 모퉁이를 검은색으로 합니다. 흰 칸 네 개는 각 변의 가운데 칸입니다. $2 \times 1$ 직사각형은 서로 이웃한 두 칸을 덮고, 이웃한 두 칸은 항상 색이 다르므로, 직사각형은 흰 칸을 정확히 하나 덮습니다. 네 변의 가운데 칸을 추측하면 그중 하나는 반드시 덮여 있습니다.

따라서 최솟값은 4입니다.

**주의.** 가운데 줄 전체(3번)를 추측하면 세로로 놓인 직사각형은 모두 잡지만, 맨 윗줄에 가로로 놓인 직사각형은 피해 갑니다. 따라서 (A) 3은 틀립니다.

**정답: (C)** 4

---

## 8 대수

출처: 2005 AMC 10B 11번

어떤 수열의 첫째항은 2005이다. 둘째항부터 각 항은 바로 앞 항의 각 자릿수의 세제곱의 합이다. 이 수열의 제2005항은?

**(A)** 29 **(B)** 55 **(C)** 85 **(D)** 133 **(E)** 250

**핵심 아이디어.** 2005개의 항을 모두 계산할 수는 없으니, 수열이 어딘가에서 반복되어야 합니다. 몇 항을 계산해서 반복되는 주기를 찾아봅시다.

**1단계.** 처음 몇 항을 계산합니다.

$$2^3 + 0^3 + 0^3 + 5^3 = 133, \quad 1^3 + 3^3 + 3^3 = 55, \quad 5^3 + 5^3 = 250, \quad 2^3 + 5^3 + 0^3 = 133.$$

따라서 수열은 $2005,\ 133,\ 55,\ 250,\ 133,\ 55,\ 250,\ \ldots$ 이고, 제2항부터 길이 3인 주기 $133,\ 55,\ 250$이 반복됩니다.

**2단계.** 제2항, 제5항, 제8항, ...은 133입니다. 이들은 항의 번호를 3으로 나눈 나머지가 2인 항입니다. 마찬가지로 나머지가 0인 번호의 항은 55이고, 나머지가 1인 번호의 항은 (제4항부터) 250입니다.

**3단계.** $2005 = 3 \cdot 668 + 1$이므로 나머지는 1이고, 제2005항은 250입니다.

**주의.** 첫째항 2005는 주기에 들어가지 않습니다. 주기가 제1항부터 시작한다고 착각하면(제1항이 133, 제2항이 55, 제3항이 250, ...), 나머지 1은 133을 가리키게 되어 선택지 (D)를 고르게 됩니다.

**정답: (E)** 250

## 9 기하

출처: 2015 AMC 10A 11번

> 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이의 비가 $4:3$이다. 이 직사각형의 대각선의 길이가 $d$이면, 넓이는 어떤 상수 $k$에 대하여 $kd^2$으로 나타낼 수 있다. $k$의 값은?
>
> **(A)** $\frac{2}{7}$ **(B)** $\frac{3}{7}$ **(C)** $\frac{12}{25}$ **(D)** $\frac{16}{25}$ **(E)** $\frac{3}{4}$

**핵심 아이디어.** 비가 $4:3$이라는 것은 두 변의 길이가 하나의 미지수 $x$에 대하여 $4x$와 $3x$라는 뜻입니다. 넓이와 $d$를 **모두** $x$로 나타내면 $x$가 약분되는데, 바로 이 때문에 문제에서 $k$가 상수라고 약속할 수 있는 것입니다.

**1단계.** $x>0$에 대하여 가로의 길이를 $4x$, 세로의 길이를 $3x$라 합시다.

**2단계.** 대각선은 두 변의 길이가 $4x$와 $3x$인 직각삼각형의 빗변입니다. 피타고라스 정리에 의하여

$$d^2=(4x)^2+(3x)^2=16x^2+9x^2=25x^2,$$

이므로 $d=5x$입니다. (익숙한 3–4–5 직각삼각형을 $x$배 한 것입니다.)

**3단계.** 넓이는 $4x\cdot 3x=12x^2$입니다.

**4단계.** $12x^2=kd^2=k\cdot 25x^2$이어야 합니다. 양변을 $25x^2$($0$이 아닌 값)으로 나누면

$$k=\frac{12x^2}{25x^2}=\frac{12}{25}.$$

**다른 풀이.** 편리한 크기를 골라 봅시다. 두 변의 길이가 $4$와 $3$인 직사각형은 대각선의 길이가 $5$, 넓이가 $12$이므로 $k=\frac{12}{5^2}=\frac{12}{25}$입니다. 비가 $4:3$인 직사각형은 모두 이 직사각형을 확대하거나 축소한 것이고, 넓이와 $d^2$이 같은 비율로 변하므로 $k$는 모든 경우에 같습니다.

**정답: (C)** $\frac{12}{25}$

## 10 대수

출처: 2005 AMC 10A 13번

> 다음 조건을 만족시키는 양의 정수 $n$은 몇 개인가
>
> $$(130n)^{50} > n^{100} > 2^{200}?$$
>
> **(A)** 0 **(B)** 7 **(C)** 12 **(D)** 65 **(E)** 125

**핵심 아이디어.** 모든 지수가 50의 배수이므로 부등식 전체에 50제곱근을 취해 봅시다. 거대한 거듭제곱이 간단한 이차부등식으로 줄어듭니다.

**1단계.** 세 값은 모두 양수이고, 양수에 대해서는 $a > b$인 것과 $a^{50} > b^{50}$인 것이 정확히 같은 조건입니다. $n^{100} = (n^2)^{50}$이고 $2^{200} = (2^4)^{50} = 16^{50}$이므로, 주어진 조건은 다음과 같습니다.

$$130n > n^2 > 16.$$

**2단계.** 오른쪽 부분: $n$이 양수일 때 $n^2 > 16$이면 $n > 4$이므로 $n \geq 5$입니다.

**3단계.** 왼쪽 부분: $130n > n^2$입니다. 양변을 양수 $n$으로 나누면 $130 > n$이므로 $n \leq 129$입니다.

**4단계.** 정수 $n = 5, 6, \ldots, 129$는 모두 조건을 만족시키고, 그 개수는 $129 - 5 + 1 = 125$입니다.

**주의.** 5부터 129까지의 개수를 $129 - 5 = 124$로 세는 것은 전형적인 울타리 기둥 실수입니다. 양 끝을 모두 셀 때는 1을 더해야 합니다.

**정답: (E)** 125

## 11 대수

출처: 2009 AMC 10B 14번

> 월요일에 밀리는 씨앗 한 쿼트를 모이통에 넣는데, 그중 25%는 기장이다. 그다음 날부터 매일 그녀는 남아 있는 씨앗을 치우지 않고 같은 비율로 섞인 씨앗을 한 쿼트씩 더 넣는다. 새들은 매일 모이통에 있는 기장의 25%만 먹지만, 다른 씨앗은 모두 먹는다. 밀리가 씨앗을 넣은 직후에 새들이 모이통 속 씨앗의 절반보다 많은 양이 기장이라는 것을 알게 되는 날은 무슨 요일인가?
>
> **(A)** 화요일 **(B)** 수요일 **(C)** 목요일 **(D)** 금요일 **(E)** 토요일

**핵심 아이디어.** 기장만 추적해 봅시다. 다른 씨앗은 새들이 모두 먹어 버리므로 쌓이지 않습니다. 따라서 씨앗을 넣은 직후에는 기장이 아닌 씨앗이 정확히 $\frac{3}{4}$쿼트 있고, "기장이 절반보다 많다"는 것은 "기장이 $\frac{3}{4}$쿼트보다 많다"는 뜻입니다.

**1단계.** 씨앗 한 쿼트에는 기장 $\frac{1}{4}$쿼트와 다른 씨앗 $\frac{3}{4}$쿼트가 들어 있습니다. 다음번에 씨앗을 넣기 전에 새들이 기장의 25%를 먹으므로, 다음 날에는 기장의 $\frac{3}{4}$가 남아 있습니다.

**2단계.** 씨앗을 넣은 직후의 기장의 양(쿼트)은 다음과 같습니다.

$$\text{월: } \tfrac{1}{4}, \quad \text{화: } \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}=\tfrac{7}{16}, \quad \text{수: } \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{7}{16}+\tfrac{1}{4}=\tfrac{37}{64},$$

$$\text{목: } \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{37}{64}+\tfrac{1}{4}=\tfrac{175}{256}, \quad \text{금: } \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{175}{256}+\tfrac{1}{4}=\tfrac{781}{1024}.$$

일반적으로 $n$번째 날(월요일이 $n=1$)의 기장의 양은 $\tfrac{1}{4}\bigl(1+\tfrac{3}{4}+\cdots+(\tfrac{3}{4})^{n-1}\bigr)=1-(\tfrac{3}{4})^n$입니다.

**3단계.** (기장의 양)$>\tfrac{3}{4}$, 즉 $(\tfrac{3}{4})^n<\tfrac{1}{4}$이어야 합니다. 목요일$(n=4)$에는 $(\tfrac{3}{4})^4=\tfrac{81}{256}>\tfrac{64}{256}=\tfrac{1}{4}$이므로 기장은 $\tfrac{175}{256}\approx 0.68$로 부족합니다. 금요일$(n=5)$에는 $(\tfrac{3}{4})^5=\tfrac{243}{1024}<\tfrac{256}{1024}=\tfrac{1}{4}$이므로 기장은 $\tfrac{781}{1024}\approx 0.76>0.75$입니다.

따라서 처음으로 조건을 만족하는 날은 다섯 번째 날인 금요일입니다.

> **주의.** 월요일은 1번째 날이지 0번째 날이 아닙니다. 월요일로부터 다섯 날 **뒤**를 세면 토요일, 즉 선택지 (E)가 됩니다.

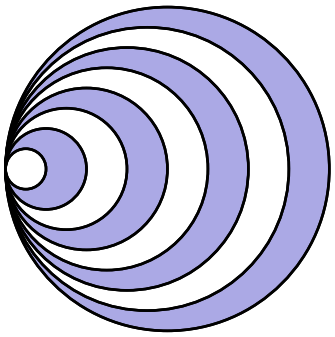
**정답: (D) 금요일**

---

## 12 기하

출처: 2023 AMC 10A 15번

짝수 개의 원이 겹겹이 들어 있다. 원의 반지름은 1에서 시작하여 1씩 커지며, 모든 원은 한 점을 공유한다. 반지름이 2인 원의 내부이면서 반지름이 1인 원의 외부인 영역부터 시작하여, 한 원 건너 하나씩 원 사이의 영역이 색칠되어 있다. 아래는 원이 8개인 예이다. 색칠된 부분의 넓이의 합이 $2023\pi$ 이상이 되도록 하는 원의 개수의 최솟값은?



**(A)** 46 **(B)** 48 **(C)** 56 **(D)** 60 **(E)** 64

> **핵심 아이디어.** 공통점은 주의를 흐트러뜨리는 장치입니다. 각 원은 다음 원의 안쪽에 있으므로, 중심이 어디에 있든 고리 하나의 넓이는 두 원의 넓이의 차일 뿐입니다. 고리 하나의 넓이를 제곱의 차로 쓰면 전체 합이 $1+2+3+\cdots$로 정리됩니다.

**1단계: 고리 하나.** 반지름이 $r$인 원의 넓이는 $\pi r^2$입니다. 반지름이 $2k-1$과 $2k$인 원 사이의 색칠된 고리의 넓이는 다음과 같습니다.

$$\pi\bigl((2k)^2-(2k-1)^2\bigr)=\pi\bigl(2k+(2k-1)\bigr)\cdot\bigl(2k-(2k-1)\bigr)=\pi\bigl(2k+(2k-1)\bigr).$$

예를 들어 첫 번째 고리의 넓이는 $(2+1)\pi = 3\pi$, 두 번째 고리의 넓이는 $(4+3)\pi = 7\pi$입니다.

**2단계: 모든 고리.** 원이 $N$개($N$은 짝수)일 때, 색칠된 고리는 반지름 1과 2, 3과 4, ..., $N-1$과 $N$ 사이에 있습니다. 1단계의 넓이를 모두 더하면 다음과 같습니다.

$$\text{색칠된 넓이} = \pi(1+2+3+4+\cdots+N) = \pi \cdot \frac{N(N+1)}{2}.$$

그림으로 확인해 봅시다. 원이 8개이면 $\pi \cdot \frac{8\cdot 9}{2} = 36\pi$이고, 실제로 $3+7+11+15 = 36$입니다.

**3단계: 부등식.** $\frac{N(N+1)}{2} \geq 2023$, 즉 $N(N+1) \geq 4046$이어야 합니다. $63\cdot 64 = 4032$가 이 값에 가까우므로, 그 근처의 짝수를 시험해 봅시다.

$$N = 62: \ \frac{62\cdot 63}{2} = 1953 < 2023, \qquad N = 64: \ \frac{64\cdot 65}{2} = 2080 \geq 2023.$$

넓이는 $N$이 커질수록 커지므로 $N \leq 62$인 짝수는 모두 부족합니다. 따라서 원의 개수의 최솟값은 64입니다.

> **주의.** 원이 $N = 2n$개이면 넓이는 $(2n^2+n)\pi$이고, $2n^2+n \geq 2023$은 $n = 32$에서 처음 성립합니다. 그런데 이 32는 색칠된 **고리**의 개수입니다. 문제는 원의 개수를 묻고 있으므로 그 두 배가 답입니다.

**정답: (E)** 64

---

## 13 정수론

출처: 2024 AMC 10A 15번

> $M+1213$과 $M+3773$이 모두 완전제곱수가 되는 가장 큰 정수를 $M$이라 하자. $M$의 일의 자리 숫자는?
>
> **(A)** 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 6 **(E)** 8

> **핵심 아이디어.** 차가 일정한 두 완전제곱수는 $x^2$과 $y^2$으로 놓고 그 차를 $x^2-y^2 = (x-y)(x+y)$로 인수분해합니다. 곱이 일정할 때 답을 크게 하려면 두 인수가 되도록 멀리 떨어져 있어야 합니다.

**1단계.** $M+3773 = x^2$, $M+1213 = y^2$ $(x > y \geq 0)$이라 합시다. 두 식을 빼면 다음과 같습니다.

$$x^2 - y^2 = 3773 - 1213 = 2560, \qquad \text{이므로} \qquad (x-y)(x+y) = 2560.$$

**2단계.** 두 인수 $x-y$와 $x+y$의 차는 짝수인 $2y$이므로, 둘 다 짝수이거나 둘 다 홀수입니다. 곱 2560이 짝수이므로 둘 다 짝수입니다. $x-y = 2s$, $x+y = 2t$로 놓으면 $4st = 2560$이므로 $st = 640$이고, $y = t-s$입니다.

**3단계.** $M = y^2 - 1213$은 $y = t-s$가 가장 클 때 가장 큽니다. $st = 640$, $1 \leq s < t$에서 이는 $s$가 가장 작을 때, 즉 $s = 1$, $t = 640$일 때이고, 이때 $y = 639$, $x = 641$입니다. (다른 인수 쌍은 모두 $s \geq 2$, $t \leq 320$이므로 $y \leq 318$입니다.)

**4단계.** 따라서 $M = 639^2 - 1213 = 408321 - 1213 = 407108$입니다. 확인하면 $M+3773 = 410881 = 641^2$입니다. $M$의 일의 자리 숫자는 8입니다.

일의 자리만 필요하다면 곱을 끝까지 계산할 필요가 없습니다. $639^2$의 일의 자리는 $1$이고($9^2 = 81$이므로), $\ldots 1 - \ldots 3$의 일의 자리는 $8$입니다.

**주의.** 인수 쌍 $1 \cdot 2560$을 택하면 $x$와 $y$가 멀리 떨어질 것 같지만, $x - y = 1$, $x + y = 2560$이면 $y = \frac{2559}{2}$로 정수가 아닙니다. 2단계의 홀짝 판별이 이 경우를 걸러 냅니다.

**정답: (E)** $8$

---

## 14 기하

출처: 2021 가을 AMC 10A 17번

> 한 건축가가 지면 위에 수평으로 놓인 정육각형 $ABCDEF$의 꼭짓점에 수직 기둥을 세우는 구조물을 짓고 있다. 여섯 기둥은 지면과 평행하지 않은 평평한 태양광 패널을 떠받치게 된다. $A$, $B$, $C$에 있는 기둥의 높이는 각각 $12$, $9$, $10$미터이다. $E$에 있는 기둥의 높이는 몇 미터인가?
>
> **(A)** $9$ **(B)** $6\sqrt{3}$ **(C)** $8\sqrt{3}$ **(D)** $17$ **(E)** $12\sqrt{3}$

**핵심 아이디어.** 패널이 평평하므로 높이는 위치에 대한 **일차**함수입니다. 따라서 어떤 선분의 중점 위의 높이는 양 끝 높이의 평균입니다. 정육각형에는 중점을 공유하는 선분이 많으므로, 이를 이용해 $A, B, C$에서 중심으로, 다시 $E$로 건너갈 수 있습니다.

**1단계.** 평평한 면의 높이는 지면 좌표 $(x, y)$에 대해 $h = ux + vy + w$ 꼴입니다. 두 점의 중점을 대입하면 정확히 두 점 높이의 평균이 나옵니다. 따라서 두 선분의 중점이 같으면 각 선분의 양 끝 높이의 합도 같습니다.

**2단계.** 정육각형의 중심을 $O$라 합시다. 삼각형 $OAB$와 $OBC$는 정삼각형이므로 $ABCO$는 마름모입니다. 마름모의 대각선 $\overline{AC}$와 $\overline{BO}$는 서로를 이등분하므로 중점이 같습니다. 따라서 다음이 성립합니다.

$$h(A) + h(C) = h(B) + h(O) \quad \Longrightarrow \quad 12 + 10 = 9 + h(O) \quad \Longrightarrow \quad h(O) = 13.$$

**3단계.** $B$와 $E$는 서로 마주 보는 꼭짓점이므로 $O$는 $\overline{BE}$의 중점입니다. 따라서 $h(O)$는 $h(B)$와 $h(E)$의 평균입니다.

$$13 = \frac{9 + h(E)}{2} \quad \Longrightarrow \quad h(E) = 26 - 9 = 17.$$

**다른 풀이.** 좌표를 이용해도 됩니다. $A = (-1, 0)$, $B = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $C = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $E = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$로 놓습니다. $h(C) - h(B) = u = 1$과 $h(A) = -u + w = 12$에서 $w = 13$을 얻습니다. 그러면 $h(B) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}v + 13 = 9$에서 $\frac{\sqrt{3}}{2}v = -\frac{7}{2}$입니다. 따라서 $h(E) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}v + 13 = \frac{1}{2} + \frac{7}{2} + 13 = 17$입니다.

**정답: (D)** $17$

## 15 정수론

출처: 2024 AMC 10B 18번

> 어떤 정수의 100제곱을 125로 나눌 때 나올 수 있는 서로 다른 나머지는 모두 몇 개인가?
>
> **(A)** 1 **(B)** 2 **(C)** 5 **(D)** 25 **(E)** 125

**핵심 아이디어.** 지수 100은 우연이 아닙니다. $1, 2, \ldots, 125$ 중 5의 배수가 아닌 수가 정확히 100개이기 때문입니다. 이것은 오일러 정리를 떠올리게 하고, 정수를 5의 배수와 나머지 두 경우로 나누게 합니다.

**경우 1: $5 \mid n$.** 이때 $n^{100}$은 $5^{100}$의 배수이고, 이는 당연히 $125 = 5^3$의 배수입니다. 따라서 나머지는 0입니다.

**경우 2: $5 \nmid n$.** 오일러 정리는 $n$과 $m$이 1보다 큰 공약수를 갖지 않으면 $n^{\varphi(m)}$을 $m$으로 나눈 나머지가 1이라는 정리입니다. 여기서 $\varphi(m)$은 1부터 $m$까지의 수 중 $m$과 1보다 큰 공약수를 갖지 않는 수의 개수입니다. $m = 125$일 때 1부터 125까지에는 5의 배수가 25개 있으므로 $\varphi(125) = 125 - 25 = 100$입니다. 따라서 $n^{100}$의 나머지는 1입니다.

**세기.** 두 나머지 모두 실제로 나옵니다. $5^{100}$은 나머지 0을, $1^{100} = 1$은 나머지 1을 남깁니다. 따라서 가능한 서로 다른 나머지는 정확히 2개입니다.

**주의.** 오일러 정리는 5로 나누어떨어지지 않는 $n$에만 적용됩니다. 모든 정수에 적용하면 나머지가 1 하나뿐이라고 생각하게 되어 선택지 (A)를 고르게 됩니다.

**다른 풀이.** 오일러 정리 없이, 다섯제곱을 두 번 해서도 보일 수 있습니다. $5 \nmid n$이면 페르마의 소정리에 의해 어떤 정수 $k$에 대해 $n^4 = 1 + 5k$입니다. 이항정리에 의해 다음과 같이 전개됩니다.

$$n^{20} = (1 + 5k)^5 = 1 + 25k + 250k^2 + \cdots,$$

여기서 1 뒤의 모든 항은 25의 배수이므로 $n^{20} = 1 + 25j$입니다. 다시 한 번 전개하면

$$n^{100} = (1 + 25j)^5 = 1 + 125j + \cdots,$$

이번에는 1 뒤의 모든 항이 125의 배수입니다. 따라서 $n^{100}$을 125로 나눈 나머지는 1입니다.

**정답: (B) 2**

## 16 경우의 수와 확률

출처: 2022 AMC 10B 18번

미지수 $x$, $y$, $z$에 관한 세 일차방정식으로 이루어진 연립방정식

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 0 \end{cases}$$

을 생각하자. 여기서 각 계수는 $0$ 또는 $1$이고, 이 연립방정식은 $x = y = z = 0$ 이외의 해를 갖는다. 예를 들어 다음 연립방정식

$$\begin{cases} 1x + 1y + 0z &= 0 \\ 0x + 1y + 1z &= 0 \\ 0x + 0y + 0z &= 0 \end{cases}$$

은 $0$이 아닌 해 $(x, y, z) = (1, -1, 1)$을 갖는, 이러한 연립방정식 중 하나이다. 이러한 연립방정식은 모두 몇 개인가? (한 연립방정식 안의 방정식들이 서로 다를 필요는 없고, 같은 방정식들을 다른 순서로 포함하는 두 연립방정식은 서로 다른 것으로 본다.)

**(A)** 302 **(B)** 338 **(C)** 340 **(D)** 343 **(E)** 344

**핵심 아이디어.** 계수의 배열은 $2^9 = 512$가지뿐이므로 여사건을 셉시다. 즉 해가 $x = y = z = 0$ **하나뿐인** 연립방정식을 셉니다. 이런 연립방정식은 세 행 $(a_i, b_i, c_i)$가 독립인 경우, 즉 어느 행도 다른 행들로 만들어지지 않는 경우이고, 확인할 목록이 짧습니다.

**1단계: 전체.** $9$개의 계수가 각각 $0$ 또는 $1$이므로, 방정식의 순서까지 구별하면 연립방정식은 $2^9 = 512$개입니다.

**2단계: 해가 $0$뿐인 경우는?** 각 방정식을 행 $(a_i, b_i, c_i)$로 생각합시다. 행이 $0$이 아닌 방정식 하나의 해는 원점을 지나는 평면을 이룹니다. 어떤 행이 $(0, 0, 0)$이거나 두 행이 같으면, 실제로 서로 다른 $0$이 아닌 행은 많아야 두 개입니다. 원점을 지나는 두 평면은 항상 한 직선을 공유하므로, $0$이 아닌 해가 존재합니다. 따라서 해가 $0$뿐인 연립방정식은 **서로 다르고 $0$이 아닌** 세 행을 가져야 합니다. $0$이 아닌 행은 $7$개이므로, 순서를 고려한 선택은 $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$가지입니다.

**3단계: 종속인 세 행.** 서로 다르고 $0$이 아닌 세 행이라도, 한 행이 나머지 두 행의 합이면 $0$이 아닌 해가 생깁니다. 예를 들어 $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$로 이루어진 연립방정식은 실제로는 $z = 0$, $y = 0$일 뿐이고 $x$는 자유롭습니다. $0$이 아닌 $7$개의 행에서 순서 없이 고른 $\binom{7}{3} = 35$개의 세 행을 모두 확인하면, 종속인 것은 한 행이 다른 두 행의 합인 다음 $6$개뿐입니다(행 $(1, 0, 0)$을 $100$으로 쓰는 식으로 표기합니다).

- 합에 $1$이 두 개: $\{100, 010, 110\}$, $\{100, 001, 101\}$, $\{010, 001, 011\}$;
- 합이 $111$: $\{100, 011, 111\}$, $\{010, 101, 111\}$, $\{001, 110, 111\}$.

각각 $3! = 6$가지 순서로 배열할 수 있으므로, 순서를 고려한 종속인 선택은 $36$가지입니다.

**4단계.** 해가 $0$뿐인 연립방정식은 $210 - 36 = 174$개입니다. $0$이 아닌 해를 갖는 연립방정식은 $512 - 174 = 338$개입니다.

**주의.** 영행이 있거나 같은 행이 반복되는 "뻔한" 연립방정식만 세면 $512 - 210 = 302$가 되어 선택지 (A)를 고르게 됩니다. 3단계의 36개 연립방정식은 서로 다른 0이 아닌 세 행을 가지지만 여전히 0이 아닌 해를 갖습니다.

**정답: (B)** 338

---

## 17 대수

출처: 2022 AMC 10A 20번

양의 정수로 이루어진 네 항의 등차수열의 각 항을 양의 정수로 이루어진 네 항의 등비수열의 대응하는 항에 더하여 네 항의 수열을 만든다. 이렇게 만든 네 항의 수열의 처음 세 항은 57, 60, 91이다. 이 수열의 네 번째 항은?

**(A)** 190 **(B)** 194 **(C)** 198 **(D)** 202 **(E)** 206

**핵심 아이디어.** 차를 두 번 구해 봅시다. 등차수열은 차가 일정하므로 **두 번째** 차(차의 차)는 0입니다. 따라서 합한 수열에 나타나는 두 번째 차는 모두 등비수열에서 온 것입니다. 그다음 모든 항이 양의 정수라는 사실을 이용합니다.

**1단계. 식 세우기.** 등차수열을 $a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d$, 등비수열을 $b,\ br,\ br^2,\ br^3$이라 하면 다음이 성립합니다.

$$a+b=57, \qquad a+d+br=60, \qquad a+2d+br^2=91.$$

**2단계. 차 구하기.** 이웃한 식끼리 빼면 다음과 같습니다.

$$d+b(r-1)=3, \qquad d+br(r-1)=31.$$

한 번 더 빼면 $d$가 사라집니다. 즉 $br(r-1)-b(r-1)=b(r-1)^2=28$입니다.

**3단계. 정수 조건.** $t=b(r-1)=br-b$라 하면, $b$와 $br$이 정수이므로 이 값도 정수입니다. $b(r-1)^2=28$의 양변에 $b$를 곱하면 $t^2=28b$입니다. $7\mid t^2$이므로 $7\mid t$이고, $t^2$이 짝수이므로 $t$도 짝수입니다. 따라서 영이 아닌 정수 $u$에 대해 $t=14u$입니다. 이제 $196u^2=28b$에서 $b=7u^2$이고, $r-1=\frac{t}{b}=\frac{2}{u}$입니다.

**4단계. 경우 나누기.** $a=57-b>0$이므로 $7u^2<57$이고, 따라서 $u\in\{\pm1,\pm2\}$입니다.

- $u=-1$ 또는 $u=-2$: $r=-1$ 또는 $r=0$이 되어, 항이 모두 양수일 수 없습니다.
- $u=2$: $b=28$, $r=2$, $a=29$, $d=3-t=3-28=-25$이므로 $a+2d=-21<0$입니다. 탈락입니다.
- $u=1$: $b=7$, $r=3$, $a=50$, $d=3-14=-11$입니다.

두 수열은 $50, 39, 28, 17$과 $7, 21, 63, 189$이고, 두 수열의 합은 $57, 60, 91, 206$으로 주어진 항과 일치합니다.

네 번째 항은 $17+189=206$입니다.

**주의.** $a$와 $b$가 양수인지만 확인하면 $u = 2$가 걸러지지 않습니다. 등차수열의 **모든** 항이 양수인지 반드시 확인해야 합니다. 여기서는 $29, 4, -21, \ldots$ 이므로 조건을 만족하지 않습니다.

**정답: (E)** 206

---

## 18 경우의 수와 확률

출처: 2010 AMC 10B 21번

$1000$과 $10{,}000$ 사이의 회문수 중 하나를 임의로 고른다. 이 수가 $7$로 나누어떨어질 확률은?

**(A)** $\frac{1}{10}$ **(B)** $\frac{1}{9}$ **(C)** $\frac{1}{7}$ **(D)** $\frac{1}{6}$ **(E)** $\frac{1}{5}$

**핵심 아이디어.** 네 자리 회문수는 앞의 두 자리로 정해지므로 $\overline{abba}$로 쓰고 자릿값대로 전개해 봅시다. 이때 나오는 계수 $1001$은 유명한 $7 \cdot 11 \cdot 13$입니다. 문제의 나누는 수 $7$이 다루기 쉬운 이유가 바로 이것입니다.

**1단계: 회문수 세기.** $1000$과 $10{,}000$ 사이의 회문수는 모두 네 자리이고 $\overline{abba}$ 꼴입니다. 여기서 $a$는 천의 자리 숫자, $b$는 백의 자리 숫자입니다. 첫 자리 $a$는 $1$부터 $9$까지($9$가지), $b$는 $0$부터 $9$까지($10$가지) 가능합니다. 나머지 두 자리는 자동으로 정해지므로 회문수는 $9 \cdot 10 = 90$개입니다.

**2단계: 전개하기.** 자릿값에 따라 다음과 같습니다.

$$\overline{abba} = 1000a + 100b + 10b + a = 1001a + 110b.$$

**3단계: $7$로 나누어떨어지는지 확인하기.** $1001 = 7 \cdot 143$이므로 $1001a$는 항상 $7$의 배수입니다. 따라서 $\overline{abba}$가 $7$로 나누어떨어지는 것은 $110b$가 $7$로 나누어떨어질 때이고, 그때뿐입니다. 그런데 $110 = 7 \cdot 15 + 5$는 $7$의 배수가 아니고 $7$은 소수이므로, $7$이 $110b$를 나누는 것은 $7$이 $b$를 나눌 때뿐입니다. $0$–$9$의 숫자 중에서는 $b = 0$ 또는 $b = 7$입니다.

**4단계: 세고 나누기.** $1$부터 $9$까지의 어떤 $a$도 두 $b$ 중 어느 것과도 짝지을 수 있으므로, $7$로 나누어떨어지는 회문수는 $9 \cdot 2 = 18$개입니다(예: $1001 = 7 \cdot 143$, $1771 = 7 \cdot 253$). 따라서 확률은

$$\frac{18}{90} = \frac{1}{5}.$$

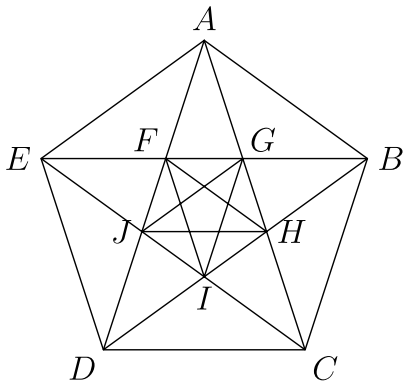
**주의.** "대략 일곱 수 중 하나는 $7$로 나누어떨어진다"고 짐작하면 $\frac{1}{7}$, 즉 선택지 (C)를 고르게 됩니다. 회문수는 보통의 정수처럼 고르게 퍼져 있지 않습니다. 모든 회문수는 $1001a + 110b$ 꼴이고 $7$로 나누어떨어지는지는 숫자 $b$만이 결정하므로, 그 비율은 숫자 $10$개 중 $2$개입니다.

**정답: (E)** $\frac{1}{5}$

## 19 기하

출처: 2015 AMC 10B 22번

아래 그림에서 $ABCDE$는 정오각형이고 $AG = 1$이다. $FG + JH + CD$의 값은?




**(A)** $3$ **(B)** $12 - 4\sqrt{5}$ **(C)** $\frac{5+2\sqrt{5}}{3}$ **(D)** $1+\sqrt{5}$ **(E)** $\frac{11+11\sqrt{5}}{10}$

**핵심 아이디어.** 대각선을 모두 그은 정오각형에는 $36°$–$72°$–$72°$ 이등변삼각형이 가득하고, 이런 삼각형은 모두 서로 닮음입니다. 미지의 길이 하나를 $b = FG$라 하고, 변에 $b$가 들어가는 두 삼각형을 찾으면 그 닮음에서 $b$에 대한 방정식을 얻습니다.

**1단계: 각.** 정오각형의 한 내각의 크기는 $108°$입니다. 삼각형 $ABC$는 $AB = BC$인 이등변삼각형이고 꼭지각이 $108°$이므로 $\angle BAC = \angle BCA = 36°$입니다. 같은 방법으로, 한 꼭짓점에서 그은 두 대각선은 그 꼭짓점의 $108°$인 각을 $36°$인 세 각으로 나눕니다. 예를 들어 $\angle ABE = \angle EBD = \angle DBC = 36°$이므로 $\angle ABD = 72°$입니다.

**2단계: $AC$ 위의 길이.** 그림은 $A$와 $\overline{CD}$의 중점을 지나는 직선에 대하여 대칭이고, 안쪽 오각형 $FGHIJ$는 정오각형입니다. 따라서 $GH = FG = b$이고, ($B$를 지나는 대칭축에 대한 대칭에 의해) $HC = AG = 1$입니다. 그러므로 $AH = 1 + b$입니다.

$\triangle ABG$에서 $\angle GAB = \angle GBA = 36°$이므로 $GB = GA = 1$입니다.

**3단계: 닮은 두 삼각형.** $\triangle ABH$에서 $\angle BAH = 36°$, $\angle ABH = \angle ABD = 72°$이므로 $\angle AHB = 72°$입니다. 따라서 이 삼각형은 $AB = AH = 1 + b$인 이등변삼각형이고, 밑변은 $BH$입니다.

$\triangle BGH$에서 $\angle GBH = \angle EBD = 36°$이고 $\angle BHG = \angle BHA = 72°$이므로 $\angle BGH = 72°$입니다. 이 삼각형은 $BH = BG = 1$인 이등변삼각형이고, 밑변은 $GH = b$입니다.

두 삼각형 모두 $36°$–$72°$–$72°$ 삼각형이므로 (밑변)/(등변)의 값이 같습니다.

$$\frac{b}{1} = \frac{1}{1+b} \quad \Longrightarrow \quad b^2 + b - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad b = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

여기서 $b$는 길이이므로 이차방정식의 양의 근을 택했습니다.

**4단계: 세 길이.** $FG = b$이고, 변의 길이는 $CD = AB = 1 + b$입니다. 이제 $JH$를 구해 봅시다. 대칭에

의해 $AJ = AH$, $AF = AG$이므로 $\overline{FG} \parallel \overline{JH}$이고 $\triangle AFG \sim \triangle AJH$이며, 닮음비는 $\frac{AH}{AG} = 1 + b$입니다. 따라서 $JH = b(1+b) = b^2 + b = 1$입니다.

**5단계.** 모두 더하면 다음과 같습니다.

$$FG + JH + CD = b + 1 + (1+b) = 2 + 2b = 2 + (\sqrt{5} - 1) = 1 + \sqrt{5}.$$

**정답: (D)** $1 + \sqrt{5}$

---

## 20 경우의 수와 확률

출처: 2019 AMC 10B 22번

> 라샨, 실비아, 테드가 다음과 같은 게임을 한다. 세 사람은 각각 \$1을 가지고 시작한다. 종이 15초마다 울리고, 종이 울릴 때마다 그 순간 돈을 가지고 있는 각 사람은 동시에, 서로 독립적으로, 나머지 두 사람 중 한 명을 임의로 골라 그 사람에게 \$1을 준다. 종이 2019번 울린 후 세 사람이 각각 \$1을 가지고 있을 확률은?
>
> (예를 들어, 라샨과 테드가 각각 실비아에게 \$1을 주기로 하고, 실비아는 자신의 1달러를 테드에게 주기로 할 수 있다. 그러면 라샨은 \$0, 실비아는 \$2, 테드는 \$1을 가지게 되고, 이것으로 첫 번째 라운드가 끝난다. 두 번째 라운드에서 라샨은 줄 돈이 없지만, 실비아와 테드가 서로를 골라 각자의 \$1을 줄 수 있고, 그러면 두 번째 라운드가 끝났을 때 가진 돈은 그대로이다.)
>
> **(A)** $\frac{1}{7}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{1}{2}$ **(E)** $\frac{2}{3}$

**핵심 아이디어.** 2019번의 라운드는 추적하기에 너무 많습니다. 그러니 이 수는 신호입니다. 답이 지금까지의 과정에 의존하지 않을 가능성이 큽니다. 나올 수 있는 몇 가지 돈의 분배 상태를 나열하고, **각각의** 상태에서 다음 종이 울렸을 때 $(\$1, \$1, \$1)$이 될 확률을 구해 봅시다. 그 확률이 모든 상태에서 같다면, 그것이 답입니다.

**1단계. 어떤 상태가 나올 수 있을까?** 돈은 항상 모두 \$3이고, 누구도 한 라운드를 \$3을 모두 가진 채로 끝낼 수 없습니다. 어떤 사람 $P$가 그렇게 되었다고 가정해 봅시다. 종이 울릴 때 $P$에게 돈이 있었다면 $P$는 다른 사람에게 1달러를 주었고, 그 사람은 \$0이 아닙니다(그 사람이 1달러를 주었더라도 $P$에게서 받은 1달러가 그것을 메워 줍니다). $P$에게 \$0이 있었다면 나머지 두 사람이 \$3을 모두 가지고 있었지만 각자 \$1만 주었으므로, 적어도 \$1은 그들에게 남습니다. 따라서 매번 종이 울린 후 가진 돈은 $(1,1,1)$이거나 $(2,1,0)$을 어떤 순서로 배열한 것입니다.

**2단계. $(1,1,1)$에서 시작하는 경우.** 세 사람 모두 돈을 주고, 각자 두 사람 중 한 명을 고르므로 같은 확률의 경우가 $2^3 = 8$가지입니다. 모두가 \$1로 끝나는 것은 모두가 정확히 1달러씩 **받을** 때이고, 이는 돈이 원을 그리며 돈다는 뜻입니다. 즉 라샨$\to$실비아$\to$테드$\to$라샨이거나 그 반대 방향입니다. 8가지 중 2가지이므로 확률은 $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$입니다.

**3단계. $(2,1,0)$에서 시작하는 경우.** \$2을 가진 사람을 $X$, \$1을 가진 사람을 $Y$, \$0을 가진 사람을 $Z$라 합시다. $X$와 $Y$만 돈을 주므로 같은 확률의 경우가 $2 \cdot 2 = 4$가지입니다.

- $X \to Y$, $Y \to X$: 그대로 $X$=2, $Y$=1, $Z$=0;

- $X \to Y$, $Y \to Z$: 이제 $X{=}1$, $Y{=}1$, $Z{=}1$;
- $X \to Z$, $Y \to X$: 이제 $X{=}2$, $Y{=}0$, $Z{=}1$;
- $X \to Z$, $Y \to Z$: 이제 $X{=}1$, $Y{=}0$, $Z{=}2$.

네 가지 중 정확히 한 가지가 $(1,1,1)$이 되므로 확률은 역시 $\frac{1}{4}$입니다.

**4단계. 결론.** 종이 2018번 울린 후 가진 돈이 어떤 상태이든, 2019번째 종이 울렸을 때 $(\$1, \$1, \$1)$이 될 확률은 $\frac{1}{4}$입니다. 따라서 전체 확률은 $\frac{1}{4}$입니다.

**주의.** 가능한 상태는 $(1,1,1)$과 $(2,1,0)$의 배열 6가지를 합한 7가지이지만, 이 상태들이 일어날 가능성은 같지 않습니다. 같다고 가정하면 $\frac{1}{7}$, 즉 선택지 (A)가 나옵니다. 실제로는 $(1,1,1)$의 확률이 $\frac{1}{4}$이고 나머지 여섯 상태는 각각 $\frac{1}{8}$입니다.

**정답: (B) $\frac{1}{4}$**

---

## 21 경우의 수와 확률

출처: 2008 AMC 10A 23번

> 집합 $S = \{a, b, c, d, e\}$의 부분집합 두 개를, 그 합집합이 $S$이고 교집합의 원소가 정확히 두 개가 되도록 고르려고 한다. 부분집합을 고르는 순서는 고려하지 않을 때, 이렇게 고르는 방법의 수는?
>
> **(A)** 20 **(B)** 40 **(C)** 60 **(D)** 160 **(E)** 320

**핵심 아이디어.** 각 원소가 어디에 들어갈지를 따로따로 정해 봅시다. 합집합이 $S$ 전체이므로, 모든 원소는 첫 번째 부분집합에만, 두 번째 부분집합에만, 또는 둘 다에 들어갑니다. 그러면 문제는 이름표를 붙이는 방법의 수를 세는 문제가 되고, 마지막으로 순서 때문에 중복으로 센 것을 바로잡으면 됩니다.

**1단계: 공통 원소.** 정확히 두 원소가 두 부분집합 모두에 들어갑니다. 이 두 원소를 고르는 방법은 $\binom{5}{2} = 10$가지입니다.

**2단계: 나머지 세 원소.** 남은 3개의 원소는 각각 합집합에는 들어가지만 교집합에는 들어가지 않으므로, 두 부분집합 중 정확히 하나에만 들어갑니다. 일단 두 부분집합을 "첫 번째"와 "두 번째"로 부르기로 하면, 각 원소마다 2가지 선택이 있으므로 $2^3 = 8$가지입니다.

따라서 **순서가 있는** 쌍 (첫 번째 부분집합, 두 번째 부분집합)은 $10 \cdot 8 = 80$개입니다.

**3단계: 순서 없애기.** 두 부분집합은 결코 같지 않습니다. 공통이 아닌 3개의 원소는 각각 한쪽에만 들어있기 때문입니다. 따라서 순서가 없는 각 선택 $\{A, B\}$는 $(A, B)$와 $(B, A)$로 정확히 두 번씩 세어졌습니다. 답은 $\frac{80}{2} = 40$입니다.

예를 들어 교집합을 $\{a, b\}$로 고르고 $c$를 첫 번째 부분집합에, $d, e$를 두 번째 부분집합에 넣으면 $\{a, b, c\}$와 $\{a, b, d, e\}$가 됩니다. 이름표를 바꾸어 붙여도 같은 두 부분집합이 나옵니다.

**주의.** 80에서 멈추면 "순서는 고려하지 않는다"는 조건을 무시한 것입니다. 80은 선택지에 없으니, 2로 나누어야 한다는 힌트입니다.

**정답: (B)** 40

---

## 22 기하

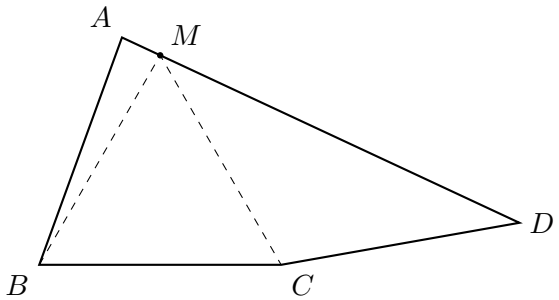
출처: 2008 AMC 10B 24번

사각형 $ABCD$에서 $AB = BC = CD$, $\angle ABC = 70^\circ$, $\angle BCD = 170^\circ$이다. $\angle BAD$의 크기는 몇 도인가?

**(A)** 75 **(B)** 80 **(C)** 85 **(D)** 90 **(E)** 95

**핵심 아이디어.** 세 변이 $AB = BC = CD$로 같고, 두 각 $70^\circ$와 $170^\circ$가 각각 "$60^\circ$에 깔끔한 값을 더한 것"이라는 점에서 $\overline{BC}$ **위에 정삼각형을 세우는** 방법이 떠오릅니다. 그 세 번째 꼭짓점 $M$은 $B$로부터 $A$와 같은 거리에 있고, $C$로부터 $D$와 같은 거리에 있으므로, 각을 계산할 수 있는 이등변삼각형 두 개가 나타납니다.

**1단계. 보조점.** $\overline{BC}$에 대하여 $A$와 같은 쪽에 있고 $\triangle BMC$가 정삼각형이 되는 점을 $M$이라 합시다. 그러면 $BM = MC = BC$이고 $\triangle BMC$의 모든 각은 $60^\circ$입니다. $70^\circ > 60^\circ$이고 $170^\circ > 60^\circ$이므로, 반직선 $BM$은 $\angle ABC$의 내부에, 반직선 $CM$은 $\angle BCD$의 내부에 있습니다.




**2단계. 삼각형 $ABM$.** $AB = BC = BM$이므로 $\triangle ABM$은 꼭지각이 $\angle ABM = 70^\circ - 60^\circ = 10^\circ$인 이등변삼각형입니다. 두 밑각은 같으므로

$$\angle BAM = \angle BMA = \frac{180^\circ - 10^\circ}{2} = 85^\circ.$$

**3단계. 삼각형 $MCD$.** $MC = BC = CD$이므로 $\triangle MCD$는 꼭지각이 $\angle MCD = 170^\circ - 60^\circ = 110^\circ$인 이등변삼각형입니다. 두 밑각은

$$\angle CMD = \angle CDM = \frac{180^\circ - 110^\circ}{2} = 35^\circ.$$

**4단계. $M$은 $\overline{AD}$ 위에 있다.** 점 $M$ 주위에서 반직선 $MA$, $MB$, $MC$, $MD$는 이 순서로 놓여 있으므로 (그림 참고), 이웃한 세 각의 합은

$$\angle AMB + \angle BMC + \angle CMD = 85^\circ + 60^\circ + 35^\circ = 180^\circ.$$

따라서 반직선 $MA$와 $MD$는 정반대 방향을 향합니다. 즉 $A$, $M$, $D$는 한 직선 위에 있고, $M$은 $A$와 $D$ 사이에 있습니다.

**5단계.** $M$이 선분 $\overline{AD}$ 위에 있으므로, $A$에서의 각은 $\angle BAD = \angle BAM = 85^\circ$입니다.

**확인.** 이때 $\angle ADC = \angle MDC = 35^\circ$이고, 사각형 $ABCD$의 네 각의 합은 $85^\circ + 70^\circ + 170^\circ + 35^\circ = 360^\circ$로, 사각형의 내각의 합과 맞아떨어집니다.

**정답: (C)** 85

---

## 23 기하

출처: 2017 AMC 10B 24번

> 정삼각형의 세 꼭짓점이 쌍곡선 $xy = 1$ 위에 있고, 이 쌍곡선의 한 꼭짓점이 삼각형의 무게중심이다. 삼각형의 넓이의 제곱은?
>
> **(A)** 48 **(B)** 60 **(C)** 108 **(D)** 120 **(E)** 169

**핵심 아이디어.** 정삼각형에서는 무게중심이 외심이기도 합니다. 따라서 세 꼭짓점은 $xy = 1$ 위의 점 중에서 쌍곡선의 꼭짓점으로부터 **같은 거리**에 있는 점들이고, $(1,1)$에서 점 $(t, \frac{1}{t})$까지의 거리는 아주 깔끔한 식으로 나타납니다.

**1단계. 설정.** $xy = 1$의 꼭짓점은 $(1,1)$과 $(-1,-1)$입니다. 대칭 $(x,y) \mapsto (-x,-y)$에 의해 무게중심을 $G = (1,1)$로 잡아도 됩니다. 삼각형이 정삼각형이므로 $G$는 외심입니다. 즉 세 꼭짓점은 모두 $G$로부터 같은 거리 $R$에 있습니다.

**2단계. $G$로부터의 거리.** 점 $(t, \frac{1}{t})$에 대하여 $s = t + \frac{1}{t}$라 합시다. 그러면 다음이 성립합니다.

$$(t-1)^2 + \left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 = t^2 + \frac{1}{t^2} - 2s + 2 = (s^2 - 2) - 2s + 2 = s(s-2).$$

$t > 0$인 갈래에서는 $s \geq 2$이고, $s$가 커질수록 $s(s-2)$도 커집니다. $t < 0$인 갈래에서는 $s \leq -2$이고, $s$가 작아질수록 $s(s-2)$는 $(-2)(-4) = 8$에서부터 커집니다. 따라서 주어진 $R^2$에 대하여 각 갈래에서 $s$의 값은 많아야 하나이고, $s$의 값 하나는 두 점 $(t, \frac{1}{t})$과 $(\frac{1}{t}, t)$를 줍니다. 이 두 점은 $y = x$에 대하여 서로 대칭입니다($t = \pm 1$이면 한 점).

**3단계. 어떤 세 점인가?** 그러므로 $G$를 중심으로 하고 반지름이 $R$인 원은 쌍곡선과 많아야 두 대칭 쌍(각 갈래에 하나씩)에서 만나고, 삼각형은 이 점들 중 세 개를 사용합니다. 즉 한 갈래의 쌍 전체와 다른 갈래의 한 점입니다. 이제 무게중심을 이용합시다. $x$좌표의 합과 $y$좌표의 합은 각각 3입니다.

- $p > 0$인 쌍 $(p, \frac{1}{p}), (\frac{1}{p}, p)$ 전체와 $q < 0$인 점 $(q, \frac{1}{q})$: 두 합은 $p + \frac{1}{p} + q$와 $p + \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$이므로 $q = \frac{1}{q}$이고, 따라서 $q = -1$입니다.
- 음의 갈래의 쌍 전체와 $p > 0$인 점 $(p, \frac{1}{p})$: 같은 비교로 $p = 1$이어야 합니다. 즉 그 점은 꼭짓점 $(1,1) = G$ 자체인데, 삼각형의 꼭짓점은 중심이 될 수 없으므로 불가능합니다.

따라서 한 꼭짓점은 $(-1,-1)$이고, $R^2 = 2^2 + 2^2 = 8$입니다. 양의 갈래에서 $s(s-2) = 8$이면 $s = 4$이고($x$ 좌표의 합 $s + (-1) = 3$과도 맞습니다), 나머지 두 꼭짓점은 $(2+\sqrt{3},\, 2-\sqrt{3})$과 $(2-\sqrt{3},\, 2+\sqrt{3})$입니다. 이 삼각형의 각 변의 길이의 제곱은 $24$이므로, 실제로 정삼각형입니다.

**4단계. 넓이.** 중심은 삼각형을, 두 변의 길이가 $R$이고 그 끼인각이 $120^\circ$인 세 삼각형으로 나눕니다.

$$\text{넓이} = 3 \cdot \frac{1}{2} R^2 \sin 120^\circ = \frac{3}{2} \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}.$$

(마찬가지로 변$^2 = 24$이고 $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 24 = 6\sqrt{3}$입니다.) 넓이의 제곱은 $(6\sqrt{3})^2 = 108$입니다.

**정답: (C)** 108

---

## 24 대수

출처: 2018 AMC 10B 25번

> $\lfloor x \rfloor$는 $x$보다 작거나 같은 최대의 정수를 나타낸다. 방정식 $x^2 + 10{,}000\lfloor x \rfloor = 10{,}000x$를 만족시키는 실수 $x$는 몇 개인가?
>
> **(A)** 197 **(B)** 198 **(C)** 199 **(D)** 200 **(E)** 201

**핵심 아이디어.** 가우스 기호가 있는 항을 반대쪽으로 옮기면 $x^2 = 10{,}000\,(x - \lfloor x \rfloor)$입니다. 우변은 $x$의 **소수 부분**의 $10{,}000$배이고, 소수 부분은 $0$과 $1$ 사이에 있습니다. 이로써 $x$의 범위가 유한하게 제한되고, 단위 구간 $[a, a+1)$을 하나씩 살펴보면 된다는 것을 알 수 있습니다. 매우 납작한 포물선 $y = \frac{x^2}{10{,}000}$이 톱니 모양 그래프 $y = x - \lfloor x \rfloor$의 톱니 하나마다 한 번씩 만나는 모습을 떠올려 보세요.

**1단계. $x$의 범위 제한.** $a = \lfloor x \rfloor$라 하면 방정식은 $x^2 = 10{,}000(x - a)$가 됩니다. $0 \le x - a < 1$이므로 $0 \le x^2 < 10{,}000$이고, 따라서 $-100 < x < 100$입니다. 그러므로 $a$는 정수 $-100, -99, \ldots, 99$ 중 하나입니다.

**2단계. 구간을 하나씩.** 이런 정수 $a$를 하나 고정하고 $a \le x < a+1$인 해를 찾습니다. 즉, 다음 함수의 영점을 찾습니다.

$$g(x) = 10{,}000(x - a) - x^2.$$

$a \le x < y < a+1$이면 $x + y < 200$이므로 다음이 성립합니다.

$$g(y) - g(x) = 10{,}000(y - x) - (y^2 - x^2) = (y - x)\big(10{,}000 - (x + y)\big) > 0,$$

따라서 $g$는 이 구간에서 증가하고, 영점은 **많아야 하나**입니다.

**3단계. 영점은 언제 있을까?** 왼쪽 끝에서 $g(a) = -a^2$이고, $x$가 $a+1$에 가까워지면 $g(x)$는 $10{,}000 - (a+1)^2$에 가까워집니다.

- $a = 0$일 때: $g(0) = 0$이므로 $x = 0$이 해입니다.
- $a \ne 0$이고 $(a+1)^2 < 10{,}000$일 때: $g$는 음수에서 시작해 양수로 끝나므로, 구간 안쪽에서 정확히 한 번 $0$을 지납니다.

- $(a+1)^2 \geq 10{,}000$일 때: $g$는 증가하므로 구간 전체에서 $g(x) < 10{,}000 - (a+1)^2 \leq 0$이고, 따라서 해가 없습니다.

**4단계. 세기.** $a = -100, \ldots, 99$ 중에서 조건 $(a+1)^2 < 10{,}000$은 $-99 \leq a+1 \leq 99$, 즉 $-100 \leq a \leq 98$을 뜻합니다. 이 조건은 $a = 99$일 때만 성립하지 않습니다($a = 0$도 해를 정확히 하나 가집니다). 따라서 다음 각 $a$에 대해 해가 정확히 하나씩 있습니다.

$$a = -100, -99, \ldots, 98,$$

즉, 해는 모두 $98 - (-100) + 1 = 199$개입니다.

**주의.** $a = 99$일 때 방정식 $x^2 - 10{,}000x + 990{,}000 = 0$은 $(x-100)(x-9900) = 0$으로 인수분해되고, $x = 100$이 "구간의 끝에 있는" 해처럼 보입니다. 그러나 $\lfloor 100 \rfloor = 100$이지 $99$가 아니며, 실제로 $100^2 + 10{,}000 \cdot 100 \neq 10{,}000 \cdot 100$입니다. 이것을 세면 200, 즉 (D)가 됩니다.

**정답: (C)** 199

---

## 25 경우의 수와 확률

출처: 2020 AMC 10A 25번

제이슨은 공정한 표준 육면체 주사위 세 개를 던진다. 그런 다음 나온 눈을 보고, 다시 던질 주사위들의 부분집합을 고른다(공집합일 수도 있고, 세 개 모두일 수도 있다). 다시 던진 후, 세 주사위의 윗면에 나온 수의 합이 정확히 7일 때, 그리고 그때에만 제이슨이 이긴다. 제이슨은 항상 이길 확률이 가장 높아지도록 행동한다. 제이슨이 정확히 두 개의 주사위를 다시 던지기로 선택할 확률은?

**(A)** $\frac{7}{36}$ **(B)** $\frac{5}{24}$ **(C)** $\frac{2}{9}$ **(D)** $\frac{17}{72}$ **(E)** $\frac{1}{4}$

**핵심 아이디어.** 먼저 각 종류의 다시 던지기, 즉 주사위를 0, 1, 2, 3개 다시 던질 때 이길 확률이 최대 얼마인지 구해 봅시다. 이 몇 개의 수를 비교하면 어떤 처음 결과에서 "두 개 다시 던지기"가 최선인지 정확히 알 수 있고, 그다음은 세기 문제입니다.

**1단계: 각 선택의 가치.**

- **하나도 다시 던지지 않기:** 합이 이미 7일 때만 (확률 1로) 이깁니다.
- **하나 다시 던지기**, 합이 $t$인 두 주사위를 남기는 경우: 새 주사위가 $7-t$를 보여야 하므로, $t \leq 6$일 때 그리고 그때에만 가능합니다. 확률은 $t \leq 6$이면 $\frac{1}{6}$이고, 그렇지 않으면 0입니다.
- **두 개 다시 던지기**, 눈 $d$가 나온 주사위 하나를 남기는 경우: 새 두 주사위의 합이 $7-d$여야 합니다. 두 주사위의 합이 $m (2 \leq m \leq 7)$이 되는 경우는 $m-1$가지이고 합이 1인 경우는 불가능하므로, 이 사건은 36가지 결과 중 $6-d$가지에서 일어납니다. $d = 1, \ldots, 6$에 대해 각각 $5, 4, 3, 2, 1, 0$가지입니다.
- **세 개 모두 다시 던지기:** 세 주사위의 합이 7이 되는 경우의 수는 $\binom{6}{2} = 15$이므로 확률은 $\frac{15}{216} = \frac{5}{72} = \frac{2.5}{36}$입니다.

**2단계: "두 개 다시 던지기"는 언제 최선일까요?** 두 개를 다시 던져서 이길 확률은 많아야 $\frac{5}{36}$이고, 이는 $\frac{1}{6} = \frac{6}{36}$보다 작습니다. 따라서 어떤 두 주사위의 합이 $6$ 이하이면, 나머지 하나를 다시 던지는 것이 어떤 두 개 다시 던지기보다도 낫습니다. (합이 $7$인 결과에도 그런 쌍이 있지만, 이때 제이슨은 그냥 그대로 둡니다.) 따라서 제이슨이 두 개를 다시 던지는 것은 **모든** 쌍의 합이 $7$ 이상일 때, 즉 가장 작은 두 주사위의 합이 $7$ 이상일 때뿐입니다.

이 경우 하나도 다시 던지지 않거나 하나만 다시 던지면 확률이 $0$입니다. 두 개를 다시 던질 때는 가장 작은 주사위 $a$를 남기는 것이 가장 좋고 그 확률은 $\frac{6-a}{36}$이며, 이것이 $\frac{2.5}{36}$보다 큰 것은 정확히 $6 - a \geq 3$, 즉 $a \leq 3$일 때입니다. 따라서 제이슨이 정확히 두 개를 다시 던지는 것은 가장 작은 주사위 $a$가 $3$ 이하이고 가장 작은 두 주사위의 합이 $7$ 이상일 때, 그리고 그때뿐입니다.

**3단계: 세기.** 결과를 $a \leq b \leq c$ 순서로 정리하여 쓰고, 순서를 고려한 결과의 수를 셉니다.

- $a = 1$, $b \geq 6$: $(1, 6, 6)$으로 $3$가지입니다.
- $a = 2$, $b \geq 5$: $(2, 5, 5)$, $(2, 5, 6)$, $(2, 6, 6)$으로 $3 + 6 + 3 = 12$가지입니다.
- $a = 3$, $b \geq 4$: $(3, 4, 4)$, $(3, 4, 5)$, $(3, 4, 6)$, $(3, 5, 5)$, $(3, 5, 6)$, $(3, 6, 6)$으로 $3 + 6 + 6 + 3 + 6 + 3 = 27$가지입니다.

모두 $216$가지 중 $3 + 12 + 27 = 42$가지이므로 확률은 $\dfrac{42}{216} = \dfrac{7}{36}$입니다.

**주의.** 세 개를 모두 다시 던지는 경우와 비교하는 것을 잊으면 가장 작은 주사위가 $4$, $5$, $6$인 결과까지 포함하게 되어 $\frac{69}{216} = \frac{23}{72}$이 나오는데, 이것은 선택지에 없습니다. 가장 작은 주사위가 $4$이면 확률이 $\frac{2}{36}$뿐이어서, 처음부터 다시 던지는 $\frac{2.5}{36}$보다 나쁩니다.

**정답: (A)** $\dfrac{7}{36}$