AMC 10

제 8 회

실전 모의고사

해설

정답표 • 출처 • 단계별 풀이

25문항 모두 AMC 10 기출(2000–2025)을 원문 그대로 사용했습니다. 심화 난이도: 각 문항은 원래 시험보다 두세 번호 앞에 배치되어 있으며, 21–25번은 원래 23–25번 문항입니다. 원문 © Mathematical Association of America.

정답표와 출처

번호	정답	출처	영역
1	**E**	2004 AMC 10A 3번	대수
2	**B**	2010 AMC 10B 5번	정수론
3	**D**	2013 AMC 10A 6번	경우의 수와 확률
4	**E**	2018 AMC 10A 7번	정수론
5	**B**	2015 AMC 10A 8번	대수
6	**D**	2005 AMC 10B 9번	경우의 수와 확률
7	**C**	2014 AMC 10B 10번	정수론
8	**C**	2023 AMC 10A 11번	기하
9	**B**	2016 AMC 10B 11번	대수
10	**D**	2007 AMC 10B 12번	대수
11	**B**	2022 AMC 10B 14번	경우의 수와 확률
12	**D**	2020 AMC 10A 14번	대수
13	**D**	2021 가을 AMC 10B 15번	기하
14	**D**	2021 가을 AMC 10A 16번	대수
15	**B**	2010 AMC 10A 18번	경우의 수와 확률
16	**B**	2009 AMC 10A 19번	기하
17	**D**	2012 AMC 10A 19번	대수
18	**C**	2011 AMC 10B 20번	기하
19	**C**	2013 AMC 10B 22번	경우의 수와 확률
20	**C**	2025 AMC 10B 23번	정수론
21	**D**	2012 AMC 10B 23번	기하
22	**C**	2025 AMC 10A 24번	경우의 수와 확률
23	**D**	2021 AMC 10A 24번	기하
24	**C**	2008 AMC 10A 25번	기하
25	**A**	2017 AMC 10A 25번	정수론

1 대수

출처: 2004 AMC 10A 3번

> 앨리샤는 시간당 \$20를 벌고, 그중 1.45%가 지방세로 공제된다. 앨리샤의 시간당 임금 중 지방세로 쓰이는 금액은 몇 센트인가?
>
> **(A)** 0.0029 **(B)** 0.029 **(C)** 0.29 **(D)** 2.9 **(E)** 29

핵심 아이디어. 문제가 묻는 단위는 **센트**이므로, 먼저 임금을 센트로 바꿉니다. 그러면 백분율은 소수를 곱하는 것일 뿐입니다.

1단계. 1달러는 100센트이므로, \$20는 시간당 $20 \times 100 = 2000$센트입니다.

2단계. 백분율은 "100당 얼마"라는 뜻이므로 $1.45\% = \dfrac{1.45}{100} = 0.0145$입니다.

3단계. 지방세는 시간당

$$0.0145 \times 2000 = 29$$

센트입니다.

검산해 봅시다. 2000센트의 1%는 20센트이므로, 1.45%는 30센트보다 조금 작아야 합니다. 실제로 29는 그렇습니다.

주의. 달러 단위로 계산하면 $0.0145 \times 20 = 0.29$인데, 이것은 **달러** 단위의 세금입니다. 이 수를 그대로 센트로 답하면 (C) 0.29를 고르게 됩니다. 여기에 다시 100을 곱해야 합니다.

정답: (E) 29

---

2 정수론

출처: 2010 AMC 10B 5번

> 31일인 어떤 달에 월요일과 수요일의 개수가 같다. 일주일의 일곱 요일 중 이 달의 첫째 날의 요일이 될 수 있는 것은 몇 개인가?
>
> **(A)** 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 6

핵심 아이디어. 4주는 28일이고, 그 안에는 모든 요일이 정확히 네 번씩 들어 있습니다. 어떤 요일이 다섯 번 나오는지는 남은 3일만이 결정합니다.

$31 = 4 \cdot 7 + 3$이므로, 다섯 번 나오는 요일은 정확히 그 달의 처음 세 날의 요일입니다. 월요일과 수요일의 개수가 같으려면 그 세 날에 두 요일이 **둘 다** 들어 있거나 **둘 다** 없어야 합니다.

첫째 날이 될 수 있는 일곱 요일을 차례로 살펴봅시다.

- 월요일: 월, 화, 수 (둘 다 있음). **가능.**

- 화요일: 화, 수, 목 (수요일만 있음). 불가능.
- 수요일: 수, 목, 금 (수요일만 있음). 불가능.
- 목요일: 목, 금, 토 (둘 다 없음). **가능.**
- 금요일: 금, 토, 일 (둘 다 없음). **가능.**
- 토요일: 토, 일, 월 (월요일만 있음). 불가능.
- 일요일: 일, 월, 화 (월요일만 있음). 불가능.

따라서 첫째 날은 월요일, 목요일, 금요일이 될 수 있으므로 3개입니다.

주의. 두 요일이 모두 다섯 번 나오는 경우(월요일)만 찾고, "둘 다 없는" 경우인 목요일과 금요일을 빠뜨리기 쉽습니다.

정답: (B) 3

---

3 경우의 수와 확률

출처: 2013 AMC 10A 6번

> 조이와 그의 다섯 형제의 나이는 $3, 5, 7, 9, 11, 13$살이다. 어느 날 오후, 조이의 형제 중 나이의 합이 16인 두 명은 영화를 보러 갔고, 10살보다 어린 형제 두 명은 야구를 하러 갔으며, 조이와 5살인 형제는 집에 남았다. 조이는 몇 살인가?
>
> **(A)** 3 **(B)** 7 **(C)** 9 **(D)** 11 **(E)** 13

핵심 아이디어. 합이 16인 나이의 쌍을 나열하고, 누가 집에 남았는지와 누가 야구를 하러 갔는지를 이용해 하나씩 지워 봅시다.

합이 16인 쌍은 $(3, 13)$, $(5, 11)$, $(7, 9)$입니다.

5살인 형제는 집에 남았으므로, 영화를 보러 간 쌍은 $(5, 11)$이 아닙니다.

7살과 9살이 영화를 보러 갔다면, 남은 형제 중 10살보다 어린 사람은 3살과 5살뿐입니다. 그런데 5살인 형제는 집에 남았으므로 야구를 할 수 있는 사람은 한 명뿐이고, 두 명이 되지 않습니다. 따라서 영화를 보러 간 쌍은 $(7, 9)$도 아닙니다.

그러므로 3살과 13살이 영화를 보러 갔습니다. 야구를 한 두 명은 남은 나이 $5, 7, 9, 11$ 중에서 10보다 작고 5살이 아닌 두 명이어야 하므로 7과 9입니다. 남은 나이는 11뿐이고, 이것이 조이의 나이입니다.

확인: 영화는 $3 + 13 = 16$, 야구는 $7, 9 < 10$, 집에는 5와 11입니다. 여섯 나이가 모두 한 번씩 쓰였습니다.

정답: (D) 11

4 정수론

출처: 2018 AMC 10A 7번

> 다음 값이 정수가 되도록 하는 (반드시 양수일 필요는 없는) 정수 n의 값은 몇 개인가?
>
> $$4000 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n$$
>
> **(A)** 3 **(B)** 4 **(C)** 6 **(D)** 8 **(E)** 9

핵심 아이디어. 모든 수를 소인수분해해 봅시다. 어떤 소수도 음의 지수를 갖지 않을 때, 그리고 그때에만 이 식은 정수입니다.

$4000 = 2^5 \cdot 5^3$이므로 다음과 같습니다.

$$4000 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n = 2^5 \cdot 5^3 \cdot \frac{2^n}{5^n} = 2^{5+n} \cdot 5^{3-n}.$$

n이 음수일 때도 마찬가지입니다. 이때 $\left(\frac{2}{5}\right)^n = \left(\frac{5}{2}\right)^{-n}$이고, 위의 식은 여전히 올바른 거듭제곱을 줍니다.

$2^a \cdot 5^b$ 꼴의 수는 $a \geq 0$이고 $b \geq 0$일 때, 그리고 그때에만 정수입니다(지수가 음수이면 분모에 2나 5가 남는데, 이를 약분할 수 있는 것이 없습니다). 따라서 다음이 필요합니다.

$$5 + n \geq 0 \text{ 이고 } 3 - n \geq 0, \quad \text{즉,} \quad -5 \leq n \leq 3.$$

-5부터 3까지의 정수는 $-5, -4, \ldots, 3$이고, 그 개수는 $3 - (-5) + 1 = 9$입니다.

주의. "반드시 양수일 필요는 없는"이라는 말에는 이유가 있습니다. $n = 0, 1, 2, 3$만 세면 4, 즉 (B)가 됩니다. 또 양 끝을 모두 세기 위한 "$+1$"을 빠뜨리고 $3 - (-5) = 8$로 계산하면 8, 즉 (D)가 됩니다.

정답: (E) 9

5 대수

출처: 2015 AMC 10A 8번

> 2년 전 피트의 나이는 사촌 클레어의 나이의 세 배였다. 그보다 2년 전에는 피트의 나이가 클레어의 나이의 네 배였다. 몇 년 후에 두 사람의 나이의 비가 $2:1$이 되는가?
>
> **(A)** 2 **(B)** 4 **(C)** 5 **(D)** 6 **(E)** 8

핵심 아이디어. 두 사람의 **현재** 나이에 문자를 붙이고, 각 문장을 방정식으로 바꾸어 풀어 봅시다. "그보다 2년 전"은 4년 전이라는 점에 주의합니다.

1단계. 지금 피트의 나이를 p살, 클레어의 나이를 c살이라 합시다. 2년 전에는 $p-2=3(c-2)$이므로 $p=3c-4$입니다. 4년 전에는 $p-4=4(c-4)$이므로 $p=4c-12$입니다.

2단계. p에 대한 두 식을 같다고 놓으면 $3c-4=4c-12$이므로 $c=8$이고 $p=3\cdot 8-4=20$입니다. 확인해 보면, 2년 전 두 사람은 18살과 6살(세 배), 4년 전에는 16살과 4살(네 배)이었습니다.

3단계. y년 후 나이의 비가 $2:1$이 되려면 $20+y=2(8+y)=16+2y$가 성립해야 하므로 $y=4$입니다. 그때 피트는 24살, 클레어는 12살입니다.

정답: (B) 4

---

6 경우의 수와 확률

출처: 2005 AMC 10B 9번

> 공정한 주사위 하나는 면에 $1,1,2,2,3,3$이 적혀 있고, 다른 하나는 면에 $4,4,5,5,6,6$이 적혀 있다. 두 주사위를 던져 윗면에 나온 수를 더한다. 그 합이 홀수일 확률은?
>
> **(A)** $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{4}{9}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{5}{9}$ **(E)** $\frac{2}{3}$

핵심 아이디어. 합이 홀수인 것은 한 수가 홀수이고 다른 수가 짝수일 때뿐입니다. 따라서 각 주사위의 **홀짝**만 중요합니다.

1단계. 첫째 주사위의 홀수 면은 $1,1,3,3$으로 여섯 면 중 네 면입니다. 따라서 홀수가 나올 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, 짝수가 나올 확률은 $\frac{1}{3}$입니다.

2단계. 둘째 주사위의 홀수 면은 $5,5$로 여섯 면 중 두 면입니다. 따라서 홀수가 나올 확률은 $\frac{1}{3}$, 짝수가 나올 확률은 $\frac{2}{3}$입니다.

3단계. 합이 홀수가 되는 경우는 (홀수, 짝수)와 (짝수, 홀수) 두 가지입니다.

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{9}+\frac{1}{9}=\frac{5}{9}.$$

주의. "첫째 주사위는 홀수, 둘째 주사위는 짝수" 인 경우만 세면 $\frac{4}{9}$, 즉 B가 됩니다. 보통 주사위처럼 각 주사위가 절반의 확률로 홀수라고 생각하면 $\frac{1}{2}$, 즉 C가 됩니다.

정답: (D) $\frac{5}{9}$

---

7 정수론

출처: 2014 AMC 10B 10번

아래 덧셈에서 A, B, C, D는 서로 다른 숫자이다. D가 될 수 있는 값은 모두 몇 가지인가?

$$\begin{array}{r} ABBCB \\ +\,BCADA \\ \hline DBDDD \end{array}$$

(A) 2 **(B)** 4 **(C)** 7 **(D)** 8 **(E)** 9

핵심 아이디어. 한 자리씩 계산하되, 일의 자리와 맨 왼쪽 자리를 함께 보는 것부터 시작합시다. 두 자리 모두 같은 두 숫자 A와 B를 더하므로, 이것으로 모든 받아올림이 정해집니다.

1단계. 일의 자리는 $B+A$를 더해 D를 쓰므로, $A+B$는 D 또는 $D+10$입니다. 맨 왼쪽 자리는 $A+B$(와 받아올림)를 더해 D를 쓰고, 여섯째 자리로는 **아무것도** 올라가지 않으므로 $A+B \le D \le 9$입니다. 따라서 $A+B=D$이고, 일의 자리에서는 받아올림이 없습니다.

2단계. 이제 십의 자리는 받아올림 없이 $C+D$를 더해 D를 씁니다. 그러므로 $C+D$는 D 또는 $D+10$인데, $C \le 9$이므로 $C+D=D$, 즉 $C=0$이고 받아올림도 없습니다. 나머지 자리도 맞아떨어집니다. 백의 자리는 $B+A=D$, 천의 자리는 $B+0=B$, 맨 왼쪽 자리는 $A+B=D$입니다.

3단계. 따라서 이 덧셈은 $C=0$이고 $D=A+B$이며, A, B, D가 서로 다르고 0이 아닐 때 정확히 성립합니다. A와 B는 다섯 자리 수의 맨 앞자리이므로 0이 아니고, 서로 달라야 합니다. 따라서 가장 작은 합은 $1+2=3$입니다. $A=1$, $B=D-1$로 두면 3부터 9까지의 모든 D가 가능합니다(예를 들어 $D=3$일 때 $12202+20131=32333$). 모두 7가지입니다.

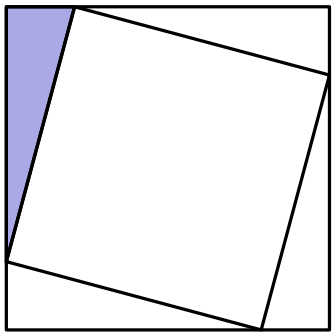
주의. A와 B가 서로 달라야 한다는 것을 잊으면 $A=B=1$로 $D=2$가 나와 8가지로 세게 되고, 선택지 (D)를 고르게 됩니다.

정답: (C) 7

8 기하

출처: 2023 AMC 10A 11번

넓이가 2인 정사각형이 넓이가 3인 정사각형에 내접하여, 아래 그림과 같이 합동인 삼각형 네 개가 생긴다. 색칠한 직각삼각형에서 직각을 낀 두 변 중 긴 변의 길이에 대한 짧은 변의 길이의 비의 값은?



(A) $\frac{1}{5}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $2-\sqrt{3}$ **(D)** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ **(E)** $\sqrt{2}-1$

핵심 아이디어. 직각을 낀 두 변을 a, b라 합시다. 큰 정사각형의 한 변에서 $a+b$를 얻고, 빗변은 작은 정사각형의 한 변이므로 a^2+b^2을 얻습니다. 비 $\frac{a}{b}$는 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$로부터 구할 수 있는데, 이 값에는 정확히 이 두 사실이 쓰입니다.

1단계. 큰 정사각형의 각 변은 두 모서리 삼각형의 짧은 변 a와 긴 변 b로 나뉘므로 $a+b=\sqrt{3}$입니다. 각 삼각형의 빗변은 안쪽 정사각형의 한 변이므로 $a^2+b^2=\left(\sqrt{2}\right)^2=2$입니다.

2단계. 첫 번째 식을 제곱하면 $a^2+2ab+b^2=3$입니다. 여기서 $a^2+b^2=2$를 빼면 $2ab=1$이 남으므로 $ab=\frac{1}{2}$입니다.

3단계. $t=\frac{a}{b}$로 놓으면 $0<t<1$입니다. 그러면

$$t+\frac{1}{t}=\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{2}{1/2}=4,$$

따라서 $t^2-4t+1=0$이고 $t=2\pm\sqrt{3}$입니다. $t<1$이므로 $t=2-\sqrt{3}\approx 0.268$을 택합니다.

다른 풀이. 두 변의 길이를 직접 구해 봅시다. $a+b=\sqrt{3}$이고 $ab=\frac{1}{2}$이므로, 두 변의 길이는 $t^2-\sqrt{3}\,t+\frac{1}{2}=0$의 두 근입니다.

$$t=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{3-2}}{2}=\frac{\sqrt{3}\pm 1}{2}.$$

긴 변에 대한 짧은 변의 비는 다음과 같습니다.

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}.$$

정답: (C) $2-\sqrt{3}$

9 대수

출처: 2016 AMC 10B 11번

> 칼은 직사각형 모양인 자신의 정원에 울타리를 치기로 했다. 그는 울타리 기둥 20개를 사서 네 모퉁이에 하나씩 세우고, 나머지는 정원의 가장자리를 따라 고르게 세워 이웃한 기둥 사이의 간격이 정확히 4야드가 되게 했다. 모퉁이를 포함하여 정원의 긴 변에 있는 기둥의 수는 모퉁이를 포함하여 짧은 변에 있는 기둥의 수의 두 배이다. 칼의 정원의 넓이는 몇 제곱야드인가?
>
> **(A)** 256 **(B)** 336 **(C)** 384 **(D)** 448 **(E)** 512

핵심 아이디어. 변마다 기둥의 수를 세되, 모퉁이 기둥은 두 변에 동시에 속한다는 것을 기억합시다. 그다음 기둥 사이의 **간격**의 수를 세어 기둥의 수를 길이로 바꿉니다.

1단계. 모퉁이를 포함하여 짧은 변에 있는 기둥을 s개, 긴 변에 있는 기둥을 ℓ개라 합시다. 네 변의 기둥 수를 모두 더하면 모퉁이 기둥 4개가 각각 두 번씩 세어지므로 다음이 성립합니다.

$$2\ell + 2s - 4 = 20.$$

2단계. 긴 변의 기둥 수가 두 배이므로 $\ell = 2s$입니다. 대입하면 $4s + 2s - 4 = 20$이므로 $6s = 24$이고, $s = 4$, $\ell = 8$입니다.

확인: $2 \cdot 8 + 2 \cdot 4 - 4 = 20$개입니다. 맞습니다.

3단계. 기둥 n개가 한 줄로 서 있으면 그 사이의 간격은 $n-1$개입니다. 따라서 짧은 변은 간격이 3개이므로 길이가 $3 \cdot 4 = 12$야드이고, 긴 변은 간격이 7개이므로 길이가 $7 \cdot 4 = 28$야드입니다.

4단계. 넓이는 $12 \cdot 28 = 336$제곱야드입니다.

주의. 간격의 수 대신 기둥의 수에 4를 곱하면 변의 길이가 16과 32가 되어 넓이는 512, 즉 선택지 (E)가 됩니다. 한 줄로 선 기둥 네 개 사이에는 간격이 세 개뿐입니다.

정답: (B) 336

10 대수

출처: 2007 AMC 10B 12번

> 톰의 나이는 T 살이고, 이는 그의 세 자녀의 나이의 합과 같다. N 년 전 톰의 나이는 그때 세 자녀의 나이의 합의 두 배였다. $\frac{T}{N}$ 의 값은?
>
> **(A)** 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 6

핵심 아이디어. 두 나이를 모두 N 년 전의 나이로 써 봅시다. 핵심은 세 자녀 **각각**이 N 살씩 어렸다는 점입니다.

N 년 전 톰은 $T-N$ 살이었습니다. 자녀들은 각각 N 살씩 어렸으므로, 자녀들의 나이의 합은 $T-3N$ 이었습니다.

조건에 따르면 그때 톰의 나이는 그때 자녀들의 나이의 합의 두 배였으므로

$$T-N=2(T-3N)=2T-6N.$$

T 는 한쪽으로, N 은 다른 쪽으로 옮기면 $6N-N=2T-T$ 이므로 $T=5N$ 입니다. 따라서 $\dfrac{T}{N}=5$ 입니다.

주의. 자녀들의 나이의 합에서 ($3N$ 대신) N 만 빼면 $T-N=2(T-N)$ 이 되어 $T=N$, 즉 비가 1 이 되는데, 이것은 선택지에 없습니다. 자녀가 세 명이므로 세 사람이 모두 나이를 먹습니다.

정답: (D) 5

11 경우의 수와 확률

출처: 2022 AMC 10B 14번

> S 는 $\{1,2,3,\cdots,25\}$ 의 부분집합이고, S 의 임의의 두 원소(서로 다를 필요는 없다)의 합은 결코 S 의 원소가 아니다. S 가 가질 수 있는 원소의 개수의 최댓값은?
>
> **(A)** 12 **(B)** 13 **(C)** 14 **(D)** 15 **(E)** 16

핵심 아이디어. "최댓값" 문제에는 두 부분이 필요합니다. 그 수에 도달하는 예와, 그보다 클 수 없다는 증명입니다. 증명에서는 S 의 **가장 큰** 원소 m 을 봅시다. i 와 $m-i$ 가 모두 S 에 있으면 그 합 m 이 S 의 두 원소의 합이 되어 금지된 상황이 됩니다. 따라서 m 보다 작은 수들은 짝을 이루고, 각 짝에서는 많아야 하나만 고를 수 있습니다.

1단계 (13개가 가능함). $S=\{13,14,\ldots,25\}$ 로 잡으면 원소는 $25-13+1=13$ 개입니다. 이 중 어느 두 수를 더해도(같은 수를 두 번 더해도) 적어도 $13+13=26>25$ 이므로, 합이 다시 S 에 들어가는 일은 없습니다.

2단계 (13개가 최대임). S 의 가장 큰 원소를 m 이라 합시다. 수 $1,2,\ldots,m-1$ 을 $i<m-i$ 인 짝 $\{i,\,m-i\}$ 로 나눕니다. m 이 짝수이면 가운데 수 $\frac{m}{2}$ 은 짝 없이 홀로 남습니다.

어떤 짝의 두 수가 모두 S에 있다면 $i+(m-i)=m$이 S에 있는 두 원소의 합이 되므로 허용되지 않습니다. 따라서 각 짝에는 S의 원소가 많아야 하나 들어 있습니다. 또 m이 짝수이면 $\frac{m}{2}+\frac{m}{2}=m$이므로 $\frac{m}{2}\notin S$입니다.

3단계. 짝은 $\left\lfloor\frac{m-1}{2}\right\rfloor$개이므로 $|S|\le\left\lfloor\frac{m-1}{2}\right\rfloor+1$입니다. 여기서 $+1$은 m 자신을 센 것입니다. $m\le 25$이므로 이 값은 많아야 $\left\lfloor\frac{24}{2}\right\rfloor+1=13$입니다.

두 결과를 합치면 최댓값은 13입니다.

다른 풀이. 크기가 13인 또 다른 집합으로 모든 홀수의 집합 $\{1,3,5,\ldots,25\}$가 있습니다. 두 홀수의 합은 짝수이므로 결코 이 집합에 들어 있지 않습니다. 두 예 모두 3단계의 상한에 정확히 도달합니다.

정답: (B) 13

---

12 대수

출처: 2020 AMC 10A 14번

> 실수 x와 y가 $x+y=4$와 $x\cdot y=-2$를 만족시킬 때, 다음 식의 값은
>
> $$x+\frac{x^3}{y^2}+\frac{y^3}{x^2}+y?$$
>
> **(A)** 360 **(B)** 400 **(C)** 420 **(D)** 440 **(E)** 480

핵심 아이디어. 식이 x와 y에 대하여 대칭이고, 우리가 아는 것은 $x+y$와 xy뿐입니다. 그러니 모든 것을 이 둘로 나타내 봅시다. 두 분수를 공통분모 $x^2y^2=(xy)^2$으로 통분하는 것이 자연스러운 첫 단계입니다.

1단계. x와 y는 $t^2-4t-2=0$의 두 근 $2\pm\sqrt{6}$입니다. 둘 다 영이 아닌 실수이므로 분수가 잘 정의됩니다. 두 분수를 통분하면 다음과 같습니다.

$$\frac{x^3}{y^2}+\frac{y^3}{x^2}=\frac{x^5+y^5}{x^2y^2}=\frac{x^5+y^5}{(-2)^2}=\frac{x^5+y^5}{4}.$$

2단계. $x+y=4$와 $xy=-2$로부터 거듭제곱의 합을 차례로 구합니다.

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=16+4=20,$$

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=64+24=88.$$

3단계. 전개하면 $(x^2+y^2)(x^3+y^3)=x^5+y^5+x^2y^3+x^3y^2=x^5+y^5+x^2y^2(x+y)$입니다. 따라서 다음을 얻습니다.

$$x^5+y^5=20\cdot 88-4\cdot 4=1760-16=1744.$$

4단계. 두 분수의 합은 $\frac{1744}{4}=436$입니다. 여기에 나머지 $x+y=4$를 더하면 $436+4=440$입니다.

다른 풀이. $S_k = x^k + y^k$라 합시다. x와 y는 $t^2 = 4t + 2$를 만족시키므로 $S_k = 4S_{k-1} + 2S_{k-2}$입니다. $S_0 = 2$, $S_1 = 4$에서 시작하면 $S_2 = 20$, $S_3 = 88$, $S_4 = 392$, $S_5 = 1744$로 앞의 결과와 같습니다.

주의. 식의 바깥쪽에 있는 x와 y를 잊지 맙시다. 분수만 더하면 436인데, 이는 선택지에 없습니다. 또 $x^2y^2 = (-2)^2 = +4$이고 -4가 아니라는 점에도 주의합시다.

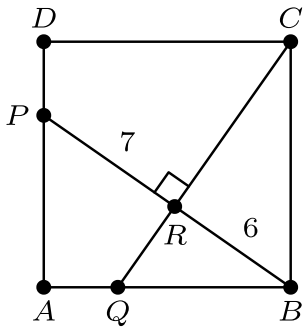
정답: (D) 440

---

13 기하

출처: 2021 가을 AMC 10B 15번

정사각형 $ABCD$에서 점 P와 Q는 각각 $\overline{AD}$와 $\overline{AB}$ 위에 있다. 선분 $\overline{BP}$와 $\overline{CQ}$는 점 R에서 수직으로 만나고, $BR = 6$, $PR = 7$이다. 정사각형의 넓이는?



(A) 85 **(B)** 93 **(C)** 100 **(D)** 117 **(E)** 125

핵심 아이디어. R에서의 직각과 정사각형의 직각이 함께 닮은 직각삼각형을 만듭니다. 한 변의 길이를 s라 하고 $AP = p$로 놓으면, 주어진 두 길이로부터 s와 p에 관한 식 두 개를 얻습니다.

1단계. 정사각형의 한 변의 길이를 s, $p = AP$라 합시다. $BP = BR + RP = 6 + 7 = 13$이므로, 직각삼각형 PAB에서 다음을 얻습니다.

$$s^2 + p^2 = 13^2 = 169.$$

2단계. 삼각형 PAB와 BRC를 비교해 봅시다. 두 삼각형 모두 직각을 가집니다($\angle PAB = \angle BRC = 90^\circ$). 또 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$이고 $\overline{BP}$가 두 선분을 모두 가로지르므로 $\angle APB = \angle RBC$입니다(엇각). 따라서 두 삼각형은 $P \leftrightarrow B$, $A \leftrightarrow R$, $B \leftrightarrow C$로 대응하는 닮은 삼각형입니다. 대응하는 변의 비를 맞추면 다음과 같습니다.

$$\frac{PA}{BR} = \frac{PB}{BC} \quad \Longrightarrow \quad \frac{p}{6} = \frac{13}{s} \quad \Longrightarrow \quad sp = 78.$$

3단계. 구하는 것은 s^2이므로 s^2과 p^2을 봅시다. 두 수의 합은 169이고 곱은 $78^2 = 6084$입니다. 따라서 두 수는 다음 이차방정식의 두 근입니다.

$$t^2 - 169t + 6084 = 0, \quad \text{즉} \quad (t - 117)(t - 52) = 0.$$

그러므로 $\{s^2, p^2\} = \{117, 52\}$ 입니다.

4단계. P는 변 $\overline{AD}$ 위에 있으므로 $p = AP \le AD = s$ 입니다. 따라서 s^2은 큰 근이고, 넓이는 $s^2 = 117$ 입니다(그리고 $p^2 = 52$).

확인: $s = 3\sqrt{13}$, $p = 2\sqrt{13}$이므로 $sp = 6 \cdot 13 = 78$이고 $s^2 + p^2 = 117 + 52 = 169$입니다.

주의. 다른 근 52는 P가 D 너머에 있는 경우($p > s$)입니다. 이 문제에서는 선택지에 없지만, 근을 짐작으로 고르지 말고 항상 "P는 $\overline{AD}$ 위에 있다"는 조건으로 골라야 합니다.

정답: (D) 117

---

14 대수

출처: 2021 가을 AMC 10A 16번

함수

$$f(x) = ||\lfloor x \rfloor| - |\lfloor 1 - x \rfloor||$$

의 그래프는 다음 중 무엇에 대하여 대칭인가? (단, $\lfloor x \rfloor$는 x를 넘지 않는 최대의 정수이다.)

(A) y축 **(B)** 직선 $x = 1$ **(C)** 원점 **(D)** 점 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ **(E)** 점 $(1, 0)$

핵심 아이디어. 식에서 x와 $1 - x$가 나타나는 방식을 봅시다. 둘을 서로 바꾸면 두 항이 맞바뀝니다. 이것은 $f(1 - x) = -f(x)$라는 뜻이고, 바로 점 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$에 대한 대칭입니다.

1단계. x 대신 $1 - x$를 대입합니다. $1 - (1 - x) = x$이므로

$$f(1 - x) = ||\lfloor 1 - x \rfloor| - |\lfloor x \rfloor|| = -f(x).$$

2단계. 따라서 (x, y)가 그래프 위에 있으면 $(1 - x, -y)$도 그래프 위에 있습니다. 이 두 점의 중점은 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$입니다. 즉 그래프를 점 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$을 중심으로 반 바퀴 돌리면 자기 자신과 겹칩니다.

3단계. 다른 선택지가 틀렸음을 확인하기 위해 그래프를 정확히 구해 봅시다. x가 정수가 아니고 $n = \lfloor x \rfloor$이면, $n < x < n + 1$에서 $-n < 1 - x < 1 - n$이므로 $\lfloor 1 - x \rfloor = -n$이고 $f(x) = |n| - |-n| = 0$입니다. 정수 n에서는 $f(n) = |n| - |1 - n|$이고, 이 값은 $n \ge 1$일 때 $n - (n - 1) = 1$, $n \le 0$일 때 $-n - (1 - n) = -1$입니다.

- y축: $f(1) = 1$이지만 $f(-1) = -1$입니다.
- 직선 $x = 1$: $f(0) = -1$이지만 $f(2) = 1$입니다.
- 원점: $(0, -1)$이 그래프 위에 있으므로 $(0, 1)$도 그래프 위에 있어야 하는데, $f(0)$의 값은 하나뿐이므로 불가능합니다.
- 점 $(1, 0)$: $(1, 1)$이 그래프 위에 있으므로 $(1, -1)$도 그래프 위에 있어야 하는데, 같은 이유로 불가능합니다.

주의. 부호에 주의합시다. $f(1-x)=f(x)$라면 세로 직선 $x=\frac{1}{2}$에 대한 선대칭이지만, 여기서는 $f(1-x)=-f(x)$이므로 **점** $\left(\frac{1}{2},0\right)$에 대한 대칭입니다.

정답: (D) $\left(\frac{1}{2},0\right)$

---

15 경우의 수와 확률

출처: 2010 AMC 10A 18번

베르나르도는 집합

$$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

에서 서로 다른 수 3개를 임의로 골라 내림차순으로 배열하여 3자리 수를 만든다. 실비아는 집합

$$\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

에서 서로 다른 수 3개를 임의로 골라 마찬가지로 내림차순으로 배열하여 3자리 수를 만든다. 베르나르도의 수가 실비아의 수보다 클 확률은?

(A) $\frac{47}{72}$ **(B)** $\frac{37}{56}$ **(C)** $\frac{2}{3}$ **(D)** $\frac{49}{72}$ **(E)** $\frac{39}{56}$

핵심 아이디어. 두 사람의 차이는 베르나르도에게만 있는 숫자 9뿐입니다. 그가 9를 고르는지에 따라 경우를 나눕시다. 9를 고르면 무조건 이기고, 고르지 않으면 두 사람이 **같은** 집합에서 고르는 셈이므로 대칭성이 나머지를 해결해 줍니다.

1단계: 베르나르도가 9를 고르는 경우. 그가 고를 수 있는 방법은 $\binom{9}{3}=84$가지이고, 모두 같은 확률입니다. 그중 9를 포함하는 것은 $\{1,\dots,8\}$에서 숫자 두 개를 더 고르면 되므로 $\binom{8}{2}=28$가지입니다. 따라서 이 경우의 확률은 $\frac{28}{84}=\frac{1}{3}$입니다.

이때 그의 수는 9로 시작하고, 실비아의 수는 많아야 8로 시작하므로 그가 항상 이깁니다.

2단계: 베르나르도가 9를 고르지 않는 경우. 이 경우의 확률은 $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$입니다. 이제 두 사람 모두 $\{1,\dots,8\}$에서 숫자 3개를 고르고 둘 다 내림차순으로 배열하므로, 고른 숫자가 다르면 만들어지는 수도 다릅니다. 두 사람의 상황이 완전히 같으므로 "베르나르도의 수가 더 큼"과 "실비아의 수가 더 큼"은 확률이 같습니다.

두 수가 같은 것은 같은 집합을 고를 때뿐이고, 실비아가 베르나르도와 같은 집합을 고를 확률은 $\frac{1}{\binom{8}{3}}=\frac{1}{56}$입니다. 따라서

$$P(\text{베르나르도의 수가 더 큼})=\frac{1-\frac{1}{56}}{2}=\frac{55}{112}.$$

3단계: 두 경우 합치기.

$$\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{2}{3}\cdot\frac{55}{112}=\frac{1}{3}+\frac{55}{168}=\frac{56}{168}+\frac{55}{168}=\frac{111}{168}=\frac{37}{56}.$$

주의. 2단계에서 두 수가 같을 수 있다는 것을 잊고 $\frac{1}{2}$을 쓰면 $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$, 즉 (C)가 됩니다.

정답: (B) $\frac{37}{56}$

---

16 기하

출처: 2009 AMC 10A 19번

> 원 A의 반지름은 100이다. 원 B는 반지름이 정수 $r < 100$이고, 원 A의 둘레를 따라 한 바퀴 굴러가는 동안 원 A에 계속 내접한다. 원 B가 굴러가기 시작할 때와 끝날 때 두 원의 접점은 같다. r의 값이 될 수 있는 것은 몇 개인가?
>
> **(A)** 4 **(B)** 8 **(C)** 9 **(D)** 50 **(E)** 90

핵심 아이디어. 미끄러지지 않고 구른다는 것은, 원 A를 따라 이동한 거리가 원 B의 둘레 중 맞닿았던 부분의 길이와 같다는 뜻입니다. 그러니 두 원의 둘레를 비교해 봅시다.

원 A의 둘레는 $2\pi \cdot 100 = 200\pi$이고, 원 B의 둘레는 $2\pi r$입니다. B가 A를 따라 한 바퀴 구르면 접점은 A를 따라 200π만큼 움직이고, B의 둘레도 정확히 같은 길이 200π만큼 접점을 지나갑니다.

A 위의 접점은 한 바퀴를 돈 뒤 처음 자리로 돌아옵니다. B 위의 접점도 처음과 같으려면, 길이 200π가 B의 둘레의 정수 배여야 합니다.

$$\frac{200\pi}{2\pi r} = \frac{100}{r} \quad \text{이 양의 정수여야 합니다.}$$

따라서 r은 100의 약수여야 합니다. $100 = 2^2 \cdot 5^2$의 약수는 다음과 같습니다.

$$1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 20,\ 25,\ 50,\ 100,$$

이 중 조건 $r < 100$에 의해 100은 제외됩니다. 따라서 8개의 값이 남습니다.

주의. 100의 약수는 9개입니다. $r < 100$ 때문에 $r = 100$이 빠진다는 것을 잊으면 9로 (C)가 됩니다.

정답: (B) 8

17 대수

출처: 2012 AMC 10A 19번

> 페인트공 폴라와 그녀의 두 조수는 각자 일정하지만 서로 다른 속도로 페인트칠을 한다. 세 사람은 항상 오전 $8:00$에 일을 시작하며, 세 사람 모두 항상 같은 시간 동안 점심을 먹는다.
>
> 월요일에 세 사람은 집의 50%를 칠하고 오후 $4:00$에 일을 마쳤다. 화요일에는 폴라가 없어서 두 조수만 집의 24%밖에 칠하지 못하고 오후 $2:12$에 일을 마쳤다. 수요일에는 폴라가 혼자 일했고, 오후 $7:12$까지 일하여 집 칠하기를 끝냈다.
>
> 하루의 점심시간은 몇 분이었는가?
>
> **(A)** 30 **(B)** 36 **(C)** 42 **(D)** 48 **(E)** 60

핵심 아이디어. 일의 양 = 속도 × 일한 시간이고, 하루에 식이 하나씩 나옵니다. 미지수가 세 개(폴라의 속도, 조수들의 속도, 점심시간)이므로 세 날의 정보면 딱 충분합니다. 요령은 속도를 먼저 소거하는 것입니다.

1단계. 점심시간을 L분이라 하고, 폴라는 분당 집의 p퍼센트를, 두 조수는 함께 분당 h퍼센트를 칠한다고 합시다. 매일 오전 $8{:}00$에 시작하므로, 일을 마친 시각까지 걸린 시간은 다음과 같습니다.

- 월요일 오후 $4{:}00$까지 480분,
- 화요일 오후 $2{:}12$까지 372분,
- 수요일 오후 $7{:}12$까지 672분.

2단계. 수요일에 폴라는 집을 **끝냈으므로** 남은 부분 $100-50-24=26$퍼센트를 칠했습니다. 세 날로부터 다음 식을 얻습니다.

$$(p+h)(480-L)=50, \qquad h(372-L)=24, \qquad p(672-L)=26.$$

3단계. 화요일과 수요일을 합하면 $h(372-L)+p(672-L)=50$으로, 월요일의 $p(480-L)+h(480-L)=50$과 합이 같습니다. 두 식을 빼면 L이 소거됩니다.

$$p(480-672)+h(480-372)=0 \quad\Longrightarrow\quad 108h=192p \quad\Longrightarrow\quad h=\frac{16}{9}p.$$

4단계. 월요일 식은 $\frac{25}{9}p(480-L)=50$이 되므로 $p(480-L)=18$입니다. 수요일 식을 이 식으로 나누면 p가 사라집니다.

$$\frac{672-L}{480-L}=\frac{26}{18}=\frac{13}{9} \quad\Longrightarrow\quad 6048-9L=6240-13L \quad\Longrightarrow\quad 4L=192,$$

따라서 $L=48$입니다.

확인. 이때 $p=\frac{18}{432}=\frac{1}{24}$, $h=\frac{16}{9}\cdot\frac{1}{24}=\frac{2}{27}$입니다. 월요일은 $\left(\frac{1}{24}+\frac{2}{27}\right)\cdot 432=\frac{25}{216}\cdot 432=50$, 화요일은 $\frac{2}{27}\cdot 324=24$, 수요일은 $\frac{1}{24}\cdot 624=26$으로 세 날 모두 맞습니다.

주의. 수요일에 칠한 양은 50%가 아닙니다. 월요일과 화요일에 이미 $50+24=74$퍼센트를 칠했으므로, 폴라가 마저 칠할 부분은 26%뿐이었습니다.

정답: (D) 48

---

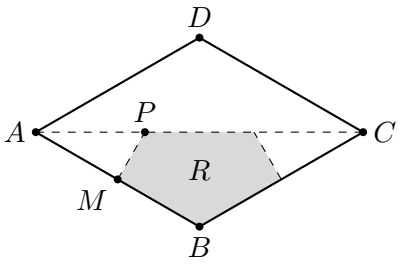
18 기하

출처: 2011 AMC 10B 20번

마름모 $ABCD$의 한 변의 길이는 2이고 $\angle B = 120^\circ$이다. 영역 R은 마름모 내부의 점 중에서 다른 세 꼭짓점 중 어느 것보다도 꼭짓점 B에 더 가까운 점 전체로 이루어진다. R의 넓이는?

(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **(B)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(C)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **(D)** $1+\frac{\sqrt{3}}{3}$ **(E)** 2

핵심 아이디어. "A보다 B에 더 가깝다"는 $\overline{BA}$의 수직이등분선을 기준으로 B가 있는 쪽이라는 뜻입니다. 따라서 R은 세 수직이등분선, 즉 $\overline{BA}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$의 수직이등분선으로 잘려 나온 영역이고, 120°라는 각 덕분에 이 선들의 위치를 모두 쉽게 찾을 수 있습니다.



1단계. 마름모에서 $\angle DAB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$이므로 $\triangle ABD (AB = AD = 2)$는 정삼각형이고, 짧은 대각선은 $BD = 2$입니다. 마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분하므로 $\overline{BD}$의 수직이등분선은 직선 AC입니다. 따라서 R은 $\triangle ABC$ 안, 즉 $\overline{AC}$에 대해 B가 있는 쪽에 있습니다.

2단계. $\triangle ABC$는 $BA = BC = 2$, $\angle B = 120^\circ$이므로 넓이가 $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot \sin 120^\circ = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$입니다. 나머지 두 각은 각각 30°입니다.

3단계. $\overline{BA}$의 수직이등분선은 $\overline{BA}$의 중점 M을 지나고 $\overline{AC}$와 점 P에서 만납니다. 이 선은 직각삼각형 AMP를 잘라 내는데, $AM = 1$이고 $\angle MAP = \angle BAC = 30^\circ$이므로 $MP = AM\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$이고 그 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$입니다. $\overline{BC}$의 수직이등분선도 C 쪽에서 합동인 삼각형을 잘라 냅니다.

4단계. 양쪽 구석의 두 삼각형을 떼어 내면 R의 넓이는 $\sqrt{3} - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$입니다.

확인: 대칭에 의해 D의 영역도 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$이므로, A와 C는 마름모의 넓이 $2\sqrt{3}$의 나머지를 나누어 각각 $\frac{\sqrt{3}}{3}$씩 갖습니다. 둔각인 꼭짓점이 더 넓은 영역을 차지합니다.

주의. 네 꼭짓점이 마름모를 똑같이 나눈다고 가정하면 $\frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$이 되어 선택지 (B)를 고르게 됩니다. 실제로는 그렇지 않습니다. 둔각인 꼭짓점 B와 D는 A와 C의 두 배를 차지합니다.

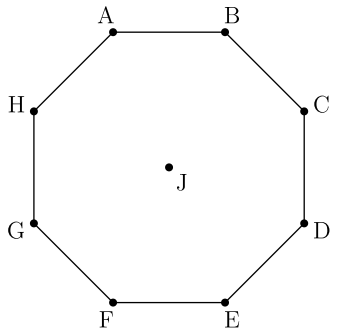
정답: (C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

---

19 경우의 수와 확률

출처: 2013 AMC 10B 22번

정팔각형 $ABCDEFGH$의 중심은 J이다. 각 꼭짓점과 중심에 1부터 9까지의 숫자를 하나씩 대응시키는데, 각 숫자는 한 번씩만 사용하고, 직선 AJE, BJF, CJG, DJH 위의 수들의 합이 모두 같도록 한다. 이렇게 하는 방법은 몇 가지인가?



(A) 384 **(B)** 576 **(C)** 1152 **(D)** 1680 **(E)** 3456

핵심 아이디어. 네 직선은 모두 중심 J를 지나므로, "네 직선의 합이 같다"는 것은 사실 "네 **마주 보는 쌍** $\{A,E\},\{B,F\},\{C,G\},\{D,H\}$의 합이 같다"는 뜻입니다. 이 네 쌍의 합을 모두 더하면 J를 제외한 모든 숫자를 쓰게 되므로, 여기서 J가 정해집니다.

1단계. J에는 어떤 숫자가 올 수 있을까? 각 직선의 합은 J에 마주 보는 한 쌍의 합을 더한 것이므로, 네 쌍의 합은 모두 같아야 합니다. 이 합을 p라 합시다. 네 쌍은 J를 제외한 여덟 개의 숫자를 사용하고, 그 합은 $(1+2+\cdots+9)-J = 45-J$입니다. 따라서

$$4p = 45 - J,$$

즉 $45-J$는 4의 배수여야 합니다. $J=1,\ldots,9$를 확인해 보면, $J=1,5,9$일 때 $45-J=44,\,40,\,36$이 되어 조건을 만족하고, 다른 J는 만족하지 않습니다.

2단계. 쌍은 저절로 정해집니다. J를 정하면 $p=\frac{45-J}{4}$이고, 남은 각 숫자의 짝은 p에서 그 숫자를 뺀 값이어야 합니다.

- $J=1, p=11$: $\{2,9\},\{3,8\},\{4,7\},\{5,6\}$;
- $J=5, p=10$: $\{1,9\},\{2,8\},\{3,7\},\{4,6\}$;
- $J=9, p=9$: $\{1,8\},\{2,7\},\{3,6\},\{4,5\}$.

각 경우에 남은 숫자들을 쌍으로 나누는 방법은 이 네 쌍뿐입니다.

3단계. 쌍을 배치하기. 네 쌍을 네 직선 AJE, BJF, CJG, DJH에 배정하는 방법은 $4! = 24$가지입니다. 각 직선에서 쌍의 두 숫자를 놓는 순서는 2가지이므로(예: $A = 2, E = 9$ 또는 $A = 9, E = 2$), 선택이 $2^4 = 16$배 더 생깁니다. 따라서 J의 값 하나마다

$$24 \cdot 16 = 384$$

가지 배치가 있습니다.

4단계. 가능한 중심이 세 가지이므로 전체 방법의 수는 $3 \cdot 384 = 1152$입니다.

> **주의.** 가운데 숫자 5를 중심에 놓고 거기서 멈추기 쉽습니다. 그러면 세 경우 중 하나만 세게 되어 384, 즉 (A)가 나옵니다.

정답: (C) 1152

---

20 정수론

출처: 2025 AMC 10B 23번

> 어떤 직사각형 모양의 격자는 141개의 행과 91개의 열의 정사각형 칸으로 이루어져 있다. 각 칸에는 수를 두 개 쓸 자리가 있다. 호러스와 베라는 각자 1부터 $141 \times 91 = 12{,}831$까지의 수를 칸에 써 넣어 격자를 채운다. 호러스는 가로로 채운다. 그는 1부터 91까지를 왼쪽에서 오른쪽으로 차례대로 1행에 쓰고, 92부터 182까지를 왼쪽에서 오른쪽으로 차례대로 2행에 쓰고, 같은 방식으로 141행까지 계속한다. 베라는 세로로 채운다. 그녀는 1부터 141까지를 위에서 아래로 차례대로 1열에 쓰고, 그다음 142부터 282까지를 위에서 아래로 차례대로 2열에 쓰고, 같은 방식으로 91열까지 계속한다. 같은 수가 두 번 쓰인 칸은 몇 개인가?
>
> **(A)** 7 **(B)** 10 **(C)** 11 **(D)** 12 **(E)** 19

> **핵심 아이디어.** 각 사람이 i행 j열에 쓰는 수를 식으로 나타내고 두 식을 같다고 놓읍시다. 행과 열을 1이 아니라 0부터 세면 식과 방정식이 훨씬 깔끔해집니다.

1단계: 식 세우기. 칸이 i행 j열에 있다고 하고, $1 \le i \le 141$, $1 \le j \le 91$이라 합시다. 호러스는 i행에 이르기 전에 91칸짜리 행 $i-1$개를 모두 채웠으므로 $91(i-1)+j$를 씁니다. 베라는 141칸짜리 열 $j-1$개를 모두 채웠으므로 $141(j-1)+i$를 씁니다.

2단계: 방정식. $r = i-1$, $c = j-1$로 두면 $0 \le r \le 140$, $0 \le c \le 90$입니다. 두 수가 같을 조건은 다음과 같습니다.

$$91r + (c+1) = 141c + (r+1) \iff 90r = 140c \iff 9r = 14c.$$

3단계: 정수해 구하기. $\gcd(9, 14) = 1$이므로 c는 9의 배수이고 r은 14의 배수여야 합니다. 즉 정수 $t \ge 0$에 대하여 $c = 9t$, $r = 14t$로 쓸 수 있습니다. 범위 조건은 $9t \le 90$, $14t \le 140$이고, 두 경우 모두 $t \le 10$입니다.

따라서 $t = 0, 1, \ldots, 10$으로 11개의 칸이 있습니다. 왼쪽 위 귀퉁이 칸($t = 0$, 둘 다 1을 씀)부터 오른쪽 아래 귀퉁이 칸($t = 10$, 둘 다 12,831을 씀)까지입니다.

주의. t를 1부터 10까지 세면(또는 $90 \div 9 = 10$으로 계산하면) 귀퉁이 칸 $t = 0$을 빠뜨려 10, 즉 선택지 (B)가 나옵니다. 첫 번째 칸이 포함되는지 항상 확인합시다.

정답: (C) 11

---

21 기하

출처: 2012 AMC 10B 23번

> 속이 찬 나무 단위 정육면체에서, 한 면 위의 서로 이웃하지 않은 두 꼭짓점과 맞은편 면 위에서 앞의 두 꼭짓점 어느 것과도 이웃하지 않은 한 꼭짓점을 지나는 평면으로 속이 찬 사면체 하나를 잘라 낸다. 이 사면체는 버리고, 정육면체의 남은 부분을 잘린 면이 아래로 향하도록 탁자 위에 놓는다. 이 물체의 높이는?
>
> **(A)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **(B)** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **(C)** 1 **(D)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **(E)** $\sqrt{2}$

핵심 아이디어. 좌표를 써서 정육면체를 고정하면 어느 꼭짓점이 잘려 나가는지 정확히 보입니다. 그러면 높이는 그 꼭짓점을 지나는 공간대각선에서 나옵니다. 이 대각선은 잘린 면에 수직이므로, 높이는 "대각선 전체에서 잘려 나간 부분을 뺀 것"입니다. 잘려 나간 부분은 사면체의 높이이고, 부피 공식으로 빠르게 구할 수 있습니다.

1단계. 어느 조각이 잘려 나가는가? 정육면체의 꼭짓점을 (0 또는 1, 0 또는 1, 0 또는 1)에 놓습니다. 아랫면에서 이웃하지 않은 두 꼭짓점 $X = (1,0,0)$과 $Y = (0,1,0)$을 잡습니다. 윗면에서 $(1,0,1)$은 X와 이웃하고 $(0,1,1)$은 Y와 이웃하므로, 세 번째 꼭짓점은 $(0,0,1)$ 또는 $(1,1,1)$입니다. 두 경우는 서로 거울상이므로 $Z = (0,0,1)$로 잡겠습니다.

이제 X, Y, Z는 꼭짓점 $P = (0,0,0)$에 이웃한 세 꼭짓점이므로, 평면은 사면체 $PXYZ$를 잘라 냅니다. P의 맞은편 꼭짓점을 $Q = (1,1,1)$이라 합시다.

2단계. 버린 사면체의 높이. 이 사면체의 밑면은 넓이가 $\frac{1}{2}$인 직각삼각형 PXY이고 높이는 $PZ = 1$이므로, 부피는 $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}$입니다.

다르게 보면, 밑면은 잘린 면 XYZ이고 이것은 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정삼각형(각 변이 면의 대각선)이므로 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$입니다. P에서 이 면까지의 거리를 h라 하면 다음과 같습니다.

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot h = \frac{1}{6} \quad \Longrightarrow \quad h = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

3단계. 대각선은 잘린 면에 수직이다. P는 X, Y, Z 각각에서 거리가 1이고, Q는 그 각각에서 거리가 $\sqrt{2}$입니다. 삼각형의 세 꼭짓점에서 같은 거리에 있는 점은 삼각형의 중심을 지나고 그 평면에 수직인 직선 위에 있습니다. P와 Q가 모두 그 직선 위에 있으므로, 길이가 $\sqrt{3}$인 공간대각선 $\overline{PQ}$는 잘린 면에 수직입니다.

4단계. 높이. 잘린 평면은 $x + y + z = 1$이고, 남은 쪽에 있는 점과 이 평면 사이의 거리는 $\frac{x+y+z-1}{\sqrt{3}}$입니다. 이 값은 $x + y + z$가 가장 클 때, 즉 Q에서 가장 큽니다. 따라서 물체의 꼭대기는 Q이고, $\overline{PQ}$를 따라 잰 잘린 면으로부터의 높이는 다음과 같습니다.

$$\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

(공식으로 확인: $\frac{3-1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.)

주의. $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 즉 선택지 (A)는 **버린** 사면체의 높이입니다. 탁자 위의 물체는 정육면체의 나머지 부분이므로, 전체 대각선의 길이 $\sqrt{3}$에서 이 값을 빼야 합니다.

정답: (D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

---

22 경우의 수와 확률

출처: 2025 AMC 10A 24번

> 어떤 숫자도 두 번 이상 쓰이지 않고, 0이 없으며, 어떤 숫자도 자신보다 큰 두 숫자와 이웃하지 않는 양의 정수를 공정한 수라고 하자. 예를 들어 23, 196, 12463은 공정한 수이지만, 1546, 320, 34321은 공정한 수가 아니다. 공정한 양의 정수는 모두 몇 개인가?
>
> **(A)** 511 **(B)** 2,584 **(C)** 9,841 **(D)** 17,711 **(E)** 19,682

핵심 아이디어. "어떤 숫자도 자신보다 큰 두 숫자와 이웃하지 않는다"는 것은 수의 중간에 움푹 팬 곳(양옆의 두 숫자보다 작은 숫자)이 없다는 뜻입니다. 예시를 보면 12463은 가장 큰 숫자까지 올라갔다가 내려옵니다. 이로부터 모든 공정한 수가 최댓값까지 올라갔다가 내려온다고 짐작할 수 있고, 그러면 문제는 각 숫자를 어느 쪽에 놓을지 정하는 문제로 바뀝니다.

1단계: 공정한 수는 "올라갔다가 내려온다". 이웃이 둘인 숫자는 안쪽 숫자뿐이므로, 공정하다는 것은 어떤 안쪽 숫자도 양옆의 두 숫자보다 작지 않다는 뜻입니다. 가장 큰 숫자를 m이라 합시다. m의 왼쪽에서 어딘가 내려가는 곳이 있다고, 즉 $d_i > d_{i+1}$이라고 가정합시다. d_i부터 m까지의 구간을 보면, 그 구간에서 가장 작은 숫자는 d_i도 아니고(d_{i+1}이 더 작으므로) m도 아닙니다(가장 크므로). 따라서 그 가장 작은 숫자는 구간의 안쪽에 있고 양옆의 두 숫자보다 작으므로, 공정하지 않습니다. 그러므로 숫자들은 m까지 계속 증가하고, 같은 논리로 그 뒤로는 계속 감소합니다. 거꾸로, 이런 수에는 움푹 팬 곳이 없으므로 공정한 수입니다.

2단계: 숫자 집합을 고정하고 세기. 1–9 중에서 서로 다른 숫자 k개로 이루어진 집합을 고릅니다. 그 집합의 가장 큰 숫자 m이 꼭대기입니다. 나머지 $k-1$개의 숫자는 각각 m의 왼쪽이나 오른쪽에 놓입니다. 놓일 쪽이 정해지면 왼쪽 부분은 증가하는 순서로, 오른쪽 부분은 감소하는 순서로 써야 합니다. 따라서 이 집합에서 공정한 수가 2^{k-1}개 나옵니다.

3단계: 모두 더하기. 전체 개수는 다음과 같습니다.

$$\sum_{k=1}^{9} \binom{9}{k} 2^{k-1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{9} \binom{9}{k} 2^k = \frac{1}{2}\left((1+2)^9 - 1\right) = \frac{19683-1}{2} = 9841.$$

(가운데 단계는 이항정리입니다. $\sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} 2^k = 3^9$에서 $k=0$인 항 1을 뺀 것입니다.) 영이 아닌 서로 다른 숫자로 이루어진 모든 문자열을 컴퓨터로 탐색해도 정확히 9841개가 나옵니다.

주의. 가장 큰 숫자까지 포함해 모든 숫자가 놓일 쪽을 고르게 하면 $\sum \binom{9}{k} 2^k = 3^9 - 1 = 19682$로 (E)가 됩니다. 꼭대기 숫자는 고를 쪽이 없으므로 각 개수를 반으로 나누어야 합니다.

정답: (C) $9{,}841$

---

23 기하

출처: 2021 AMC 10A 24번

> 사각형의 내부가 $(x+ay)^2 = 4a^2$과 $(ax-y)^2 = a^2$의 그래프로 둘러싸여 있다. 여기서 a는 양의 실수이다. 모든 $a > 0$에 대하여 성립하도록 이 영역의 넓이를 a에 대한 식으로 나타낸 것은?
>
> **(A)** $\dfrac{8a^2}{(a+1)^2}$ **(B)** $\dfrac{4a}{a+1}$ **(C)** $\dfrac{8a}{a+1}$ **(D)** $\dfrac{8a^2}{a^2+1}$ **(E)** $\dfrac{8a}{a^2+1}$

핵심 아이디어. $(\text{일차식})^2 = k^2$ 꼴의 방정식은 사실 두 평행선 $\text{일차식} = \pm k$입니다. 평행선 두 쌍은 평행사변형을 둘러싸는데, 여기서는 두 쌍이 서로 수직이므로 영역은 직사각형이고, 그 변의 길이는 평행선 사이의 거리입니다.

1단계: 네 직선. $(x+ay)^2 = 4a^2$은 $x+ay = 2a$ 또는 $x+ay = -2a$라는 뜻으로, 기울기가 $-\frac{1}{a}$인 두 평행선입니다. 마찬가지로 $(ax-y)^2 = a^2$은 $ax-y = a$ 또는 $ax-y = -a$라는 뜻으로, 기울기가 a인 두 평행선입니다.

2단계: 직사각형. 두 기울기의 곱이 $a \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) = -1$이므로 두 쌍은 서로 수직입니다. 따라서 영역은 직사각형입니다.

3단계: 변의 길이. 평행선 $Ax+By = C_1$과 $Ax+By = C_2$ 사이의 거리는 $|C_1 - C_2|/\sqrt{A^2+B^2}$입니다. 첫째 쌍$(A=1,\ B=a,\ C=\pm 2a)$과 둘째 쌍$(A=a,\ B=-1,\ C=\pm a)$에 이를 적용하면 다음을 얻습니다.

$$\frac{4a}{\sqrt{a^2+1}} \quad \text{와} \quad \frac{2a}{\sqrt{a^2+1}}.$$

4단계: 넓이.

$$\frac{4a}{\sqrt{a^2+1}} \cdot \frac{2a}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{8a^2}{a^2+1}.$$

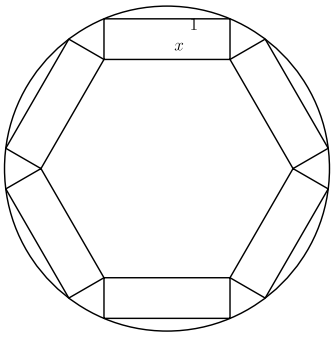
주의. $a=1$만 대입해 보면, 직선 $x+y = \pm 2$와 $x-y = \pm 1$이 넓이 4인 직사각형을 둘러쌉니다. 그런데 선택지 (C), (D), (E)는 $a=1$에서 모두 4입니다. 그래서 문제에 "모든 $a > 0$에 대하여 성립하도록"이라는 조건이 있는 것입니다. $a=2$도 대입해 보면 실제 넓이는 $\frac{32}{5}$이고, 이 값을 주는 것은 (D) 뿐입니다.

정답: (D) $\dfrac{8a^2}{a^2+1}$

24 기하

출처: 2008 AMC 10A 25번

반지름이 4인 원탁이 있다. 이 원탁 위에 직사각형 모양의 식탁 매트 여섯 장을 놓는다. 그림과 같이 각 매트의 너비는 1, 길이는 x이다. 각 매트는 두 꼭짓점이 원탁의 가장자리 위에 있도록 놓이며, 이 두 꼭짓점은 길이가 x인 같은 변의 양 끝점이다. 또한 각 매트의 안쪽 꼭짓점은 이웃한 매트의 안쪽 꼭짓점과 맞닿도록 놓인다. x의 값은?



(A) $2\sqrt{5}-\sqrt{3}$ **(B)** 3 **(C)** $\dfrac{3\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$ **(D)** $2\sqrt{3}$ **(E)** $\dfrac{5+2\sqrt{3}}{2}$

핵심 아이디어. 여섯 개의 안쪽 변은 정육각형을 이루고, 정육각형의 기하는 우리가 모두 알고 있습니다. 원탁의 중심을 원점에 두고 바깥쪽 꼭짓점 하나의 좌표를 x로 나타낸 뒤, 그 점이 반지름 4인 원 위에 있다는 사실을 이용합시다.

1단계: 안쪽 육각형. 각 매트의 바깥쪽 변은 원탁의 길이 x인 현이므로, 모든 매트는 중심 O에 대해 서로를 회전한 것입니다. 특히 모든 안쪽 꼭짓점은 O로부터 같은 거리에 있습니다. 안쪽 변(길이 x)은 여섯 개의 맞닿는 점에서 끝과 끝이 이어지므로, 이 점들은 O를 중심으로 하는 한 원 위에 있고 길이가 같은 현 여섯 개로 연결됩니다. 길이가 같은 현은 같은 호를 자르므로 맞닿는 점들은 같은 간격으로 놓입니다. 즉 안쪽 변들은 O를 중심으로 하고 한 변이 x인 정육각형을 이룹니다. 한 변이 x인 정육각형은 정삼각형 여섯 개로 이루어지므로, O에서 각 변까지의 거리(변심거리)는 $\frac{\sqrt{3}}{2}x$입니다.

2단계: 바깥쪽 꼭짓점. 위쪽 매트를 보고 $O=(0,0)$으로 놓습니다. 그 안쪽 변은 수평이고 $\left(-\frac{x}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$에서 $\left(\frac{x}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$까지입니다. 매트의 너비가 1이므로 바깥쪽 꼭짓점은 1만큼 더 위에 있습니다.

$$Q=\left(\frac{x}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}x+1\right).$$

3단계: Q는 가장자리 위에 있다. 따라서 $OQ=4$입니다.

$$\frac{x^2}{4}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+1\right)^2=16.$$

전개하면 $\frac{x^2}{4}+\frac{3x^2}{4}+\sqrt{3}\,x+1=16$이므로

$$x^2+\sqrt{3}\,x-15=0.$$

4단계: 풀기. 근의 공식에 의해

$$x = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{3 + 60}}{2} = \frac{-\sqrt{3} \pm 3\sqrt{7}}{2}.$$

길이는 양수이므로 $x = \dfrac{3\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2} \approx 3.10$입니다.

> **주의.** 가장자리 위에 있는 길이 x인 변은 원탁에 내접하는 정육각형의 한 변이 **아닙니다**. 그렇다면 $x = 4$가 되는데, 이것은 선택지에 없습니다. 정육각형은 안쪽에 있는 것이고, 바깥쪽 꼭짓점은 그보다 너비 1만큼 더 바깥에 있습니다.

정답: (C) $\dfrac{3\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2}$

---

25 정수론

출처: 2017 AMC 10A 25번

> 100 이상 999 이하의 정수 중에서, 각 자리의 숫자를 재배열한 수 중 어떤 것이 100과 999 사이에 있는 11의 배수가 되는 성질을 가진 정수는 몇 개인가? 예를 들어, 121과 211은 모두 이 성질을 가진다.
>
> **(A)** 226 **(B)** 243 **(C)** 270 **(D)** 469 **(E)** 486

> **핵심 아이디어.** 어떤 수가 조건을 만족하는지는 숫자의 순서가 아니라 어떤 **숫자들**로 이루어졌는지에만 달려 있습니다. 그러니 11의 배수로 배열할 수 있는 숫자 묶음을 모두 찾고, 각 묶음이 세 자리 수를 몇 개 만드는지 세면 됩니다. 도구는 배수 판정법입니다. $\overline{ABC}$가 11의 배수이면 $A - B + C$도 그러하고, 그 역도 성립합니다.

1단계: 판정법을 더 깔끔하게. $A - B + C = (A + B + C) - 2B$로 쓸 수 있습니다. 따라서 숫자 묶음이 정해지면, 11로 나누어떨어지는지는 **어느 숫자가 가운데에 오는지**에만 달려 있습니다. 바깥쪽 두 숫자를 서로 바꾸는 것은 전혀 영향이 없고, 세 숫자가 모두 다르면 가운데 숫자로 가능한 것은 많아야 하나입니다. B와 B' 둘 다 가능하다면 11은 $2(B - B')$의 약수가 되어야 하므로 $B = B'$이기 때문입니다.

110부터 990까지 11의 배수는 81개입니다($11 \cdot 10$부터 $11 \cdot 90$까지).

2단계: 세 숫자가 모두 같은 경우. 이때 $A - A + A = A$이고, 이것은 1부터 9까지의 숫자이므로 결코 11의 배수가 아닙니다. 이 경우는 없습니다.

3단계: 정확히 두 숫자가 같은 경우(x, x, y).

- y가 가운데($\overline{xyx}$): $11 \mid 2x - y$여야 합니다. 그러면 $121, 242, 363, 484, 616, 737, 858, 979$를 얻습니다. 이 8개의 숫자 묶음에는 0이 없으므로 각각 3개의 수를 만듭니다. $8 \cdot 3 = 24$.
- x가 가운데($\overline{xxy}$ 또는 $\overline{yxx}$): 교대합이 y이므로 $y = 0$입니다. 그러면 $110, 220, \ldots, 990$을 얻습니다. 각 묶음 $\{x, x, 0\}$은 $\overline{xx0}$과 $\overline{x0x}$만 만듭니다(0은 맨 앞에 올 수 없습니다). $9 \cdot 2 = 18$.

이로써 81개의 배수 중 $8+9=17$개를 다루었고, 세 숫자가 모두 다른 배수 64개가 남습니다.

4단계: 세 숫자가 모두 다르고 그중 하나가 0인 경우. 0은 맨 앞에 올 수 없습니다. 맨 끝에 오면 $\overline{AB0}$은 $A=B$여야 하는데, 이는 허용되지 않습니다. 따라서 0은 가운데에 있고 $A+C=11$입니다. $209, 308, 407, 506, 605, 704, 803, 902$. 이들은 짝을 지어 4개의 숫자 묶음 $\{0,2,9\}, \{0,3,8\}, \{0,4,7\}, \{0,5,6\}$이 됩니다. 각 묶음은 $2\cdot 2=4$개의 수를 만듭니다(맨 앞에 올 수 있는 숫자를 고른 뒤 나머지 둘을 배열). $4\cdot 4=16$.

5단계: 세 숫자가 모두 다르고 영을 포함하지 않는 경우. 남은 $64-8=56$개의 배수입니다. 1단계에 의해 각 숫자 묶음은 정확히 두 개의 배수 $\overline{ABC}$와 $\overline{CBA}$를 포함하므로, 숫자 묶음은 $56\div 2=28$개입니다. 각 묶음은 $3!=6$개의 수를 만듭니다. $28\cdot 6=168$.

6단계: 합계. $24+18+16+168=226$입니다.

> **주의.** 81개의 배수 모두에 $3!=6$을 곱하면 486, 즉 (E)가 나옵니다. 이것은 $\overline{ABC}$, $\overline{CBA}$ 쌍을 모두 두 번씩 세고, 맨 앞이 0인 배열이나 숫자가 반복되는 배열까지 서로 다른 수로 센 것입니다.

정답: (A) 226