AMC 10

제 9 회

실전 모의고사

해설

정답표 • 출처 • 단계별 풀이

25문항 모두 AMC 10 기출(2000–2025)을 원문 그대로 사용했습니다. 심화 난이도: 각 문항은 원래 시험보다 두세 번호 앞에 배치되어 있으며, 21–25번은 원래 23–25번 문항입니다. 원문 © Mathematical Association of America.

정답표와 출처

번호	정답	출처	영역
1	**D**	2008 AMC 10B 3번	대수
2	**D**	2012 AMC 10B 5번	대수
3	**B**	2006 AMC 10A 6번	대수
4	**C**	2010 AMC 10A 6번	대수
5	**D**	2018 AMC 10B 7번	기하
6	**B**	2019 AMC 10A 9번	정수론
7	**A**	2011 AMC 10A 9번	기하
8	**A**	2019 AMC 10B 11번	대수
9	**D**	2020 AMC 10B 12번	정수론
10	**C**	2014 AMC 10A 12번	기하
11	**E**	2009 AMC 10A 13번	대수
12	**B**	2023 AMC 10A 14번	경우의 수와 확률
13	**B**	2010 AMC 10B 16번	기하
14	**D**	2025 AMC 10A 16번	경우의 수와 확률
15	**C**	2021 가을 AMC 10A 18번	경우의 수와 확률
16	**A**	2021 가을 AMC 10B 19번	정수론
17	**A**	2025 AMC 10B 20번	기하
18	**C**	2024 AMC 10A 21번	대수
19	**D**	2009 AMC 10B 21번	정수론
20	**A**	2011 AMC 10B 22번	기하
21	**B**	2017 AMC 10A 23번	경우의 수와 확률
22	**D**	2018 AMC 10A 24번	기하
23	**E**	2013 AMC 10A 24번	경우의 수와 확률
24	**A**	2022 AMC 10B 25번	정수론
25	**D**	2012 AMC 10A 25번	경우의 수와 확률

1 대수

출처: 2008 AMC 10B 3번

> x는 양의 실수이다. 다음 중 아래 식과 같은 것은?
>
> $$\sqrt[3]{x\sqrt{x}}\,?$$
>
> **(A)** $x^{\frac{1}{6}}$ **(B)** $x^{\frac{1}{4}}$ **(C)** $x^{\frac{3}{8}}$ **(D)** $x^{\frac{1}{2}}$ **(E)** x

핵심 아이디어. 모든 거듭제곱근을 분수 지수로 바꿔 봅시다. 그러면 거듭제곱끼리 곱하는 것은 지수를 **더하는** 것이 되고, 거듭제곱근을 취하는 것은 지수를 **나누는** 것이 됩니다.

1단계. $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$이므로, 세제곱근 안의 식은 다음과 같습니다.

$$x\sqrt{x} = x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{1+\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}.$$

2단계. 세제곱근을 취하면 지수에 $\frac{1}{3}$이 곱해집니다.

$$\sqrt[3]{x^{\frac{3}{2}}} = x^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{2}}.$$

$x = 64$로 확인해 봅시다. $64 \cdot \sqrt{64} = 64 \cdot 8 = 512$이고, $\sqrt[3]{512} = 8 = \sqrt{64}$입니다. ✓

주의. $x \cdot x^{\frac{1}{2}}$을 계산할 때 지수는 **더해야** 하며, 곱하면 안 됩니다. 지수를 곱하면 세제곱근 안이 $x^{\frac{1}{2}}$이 되고, 결국 $x^{\frac{1}{6}}$, 즉 (A)가 됩니다.

정답: (D) $x^{\frac{1}{2}}$

---

2 대수

출처: 2012 AMC 10B 5번

> 애나는 식사에 대한 판매세가 10%인 워싱턴 D.C.의 한 식당에서 저녁 식사를 즐긴다. 애나는 판매세가 더해지기 전의 식사 가격에 대하여 15%의 팁을 남기고, 세금은 팁을 더하기 전의 금액에 대하여 계산된다. 애나가 저녁 식사에 쓴 돈은 모두 $\$27.50$이다. 세금과 팁을 제외한 저녁 식사의 가격은?
>
> **(A)** $\$18$ **(B)** $\$20$ **(C)** $\$21$ **(D)** $\$22$ **(E)** $\$24$

핵심 아이디어. 세금과 팁은 모두 **같은** 금액, 즉 식사 가격에 대한 백분율입니다. 그러므로 둘을 그냥 더해 하나의 백분율로 합칠 수 있습니다.

식사 가격을 x달러라 합시다. 세금은 x의 10%인 $0.10x$이고, 팁은 x의 15%인 $0.15x$입니다. 따라서 애나가 낸 총액은 다음과 같습니다.

$$x + 0.10x + 0.15x = 1.25x.$$

그러므로 $1.25x = 27.50$에서 $x = \dfrac{27.50}{1.25} = 22$입니다.

검산: 세금은 \$2.20, 팁은 \$3.30이고, $22 + 2.20 + 3.30 = 27.50$입니다.

주의. \$27.50에서 25%를 **빼면** 안 됩니다. 백분율은 총액이 아니라 식사 가격에 대한 것입니다. 게다가 $0.75 \times 27.50 = 20.625$는 센트 단위로 떨어지는 금액도 아니고, 선택지에도 없습니다.

다른 풀이. 선택지를 대입해 봅시다. $1.25 \times 22 = 27.50$이 정확히 맞고, $1.25 \times 20 = 25$, $1.25 \times 24 = 30$은 맞지 않습니다.

정답: (D) \$22

---

3 대수

출처: 2006 AMC 10A 6번

$(7x)^{14} = (14x)^{7}$을 만족시키는 0이 아닌 실수 x의 값은?

(A) $\dfrac{1}{7}$ **(B)** $\dfrac{2}{7}$ **(C)** 1 **(D)** 7 **(E)** 14

핵심 아이디어. 지수 14는 정확히 7의 두 배입니다. 좌변을 일곱제곱 꼴로 고쳐 쓰고 밑끼리 비교해 봅시다.

$(7x)^{14} = \left((7x)^{2}\right)^{7}$이므로 주어진 방정식은 $\left((7x)^{2}\right)^{7} = (14x)^{7}$이라는 뜻입니다. 일곱제곱이 같은 두 실수는 서로 같습니다(홀수 제곱은 서로 다른 두 실수를 같은 값으로 보내지 않습니다). 따라서

$$(7x)^{2} = 14x, \qquad \text{즉} \qquad 49x^{2} = 14x.$$

$x \neq 0$이라고 주어졌으므로 양변을 $7x$로 나눌 수 있습니다. 그러면 $7x = 2$이므로 $x = \dfrac{2}{7}$입니다.

검산: $7x = 2$, $14x = 4$이고, 실제로 $2^{14} = 16384 = 4^{7}$입니다.

주의. $(7x)^{2}$을 $49x^{2}$가 아니라 $7x^{2}$으로 전개하면 $7x^{2} = 14x$가 되어 $x = 2$를 얻는데, 이것은 선택지에 없습니다. 7도 제곱해야 합니다.

정답: (B) $\dfrac{2}{7}$

4 대수

출처: 2010 AMC 10A 6번

양수 x, y에 대하여 연산 $\spadesuit(x,y)$를 다음과 같이 정의한다.

$$\spadesuit(x,y) = x - \frac{1}{y}$$

$\spadesuit(2, \spadesuit(2,2))$의 값은?

(A) $\frac{2}{3}$ **(B)** 1 **(C)** $\frac{4}{3}$ **(D)** $\frac{5}{3}$ **(E)** 2

핵심 아이디어. 안쪽부터 계산합니다. 먼저 안쪽의 $\spadesuit(2,2)$를 구한 다음, 그 값을 새로운 y로 넣어 봅시다.

1단계. 안쪽 연산은 $x = 2$, $y = 2$입니다.

$$\spadesuit(2,2) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

2단계. 이제 바깥 연산은 $x = 2$, $y = \frac{3}{2}$입니다. $\frac{3}{2}$의 역수는 $\frac{2}{3}$이므로

$$\spadesuit\left(2, \tfrac{3}{2}\right) = 2 - \frac{1}{3/2} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{6}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

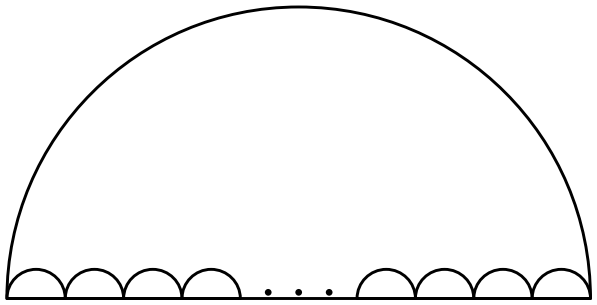
주의. 순서가 중요합니다. 안쪽 결과는 **두 번째** 자리에 들어갑니다. 첫 번째 자리에 넣으면 $\spadesuit(\frac{3}{2}, 2) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$을 계산하게 되는데, 이것은 선택지 (B)입니다.

정답: (C) $\frac{4}{3}$

5 기하

출처: 2018 AMC 10B 7번

아래 그림과 같이 큰 반원의 지름을 따라 합동인 반원 N개가 그려져 있고, 이 작은 반원들의 지름은 겹치지 않으면서 큰 반원의 지름을 빈틈없이 덮는다. 작은 반원들의 넓이의 합을 A, 큰 반원의 내부이면서 작은 반원들의 외부인 영역의 넓이를 B라 하자. 비 $A : B$는 $1 : 18$이다. N의 값은?



(A) 16 **(B)** 17 **(C)** 18 **(D)** 19 **(E)** 36

핵심 아이디어. 작은 반지름에 r이라는 이름을 붙입시다. 작은 지름 N개가 큰 지름 위에 정확히 늘어서므로 큰 반지름은 작은 반지름의 N배입니다. 따라서 모든 넓이를 r과 N으로 나타낼 수 있습니다.

1단계. 큰 지름은 작은 지름 N개와 같습니다. $2R = N \cdot 2r$이므로 $R = Nr$입니다.

2단계. 작은 반원 하나의 넓이가 $\frac{1}{2}\pi r^2$이므로 A는 다음과 같습니다.

$$A = N \cdot \tfrac{1}{2}\pi r^2.$$

큰 반원의 넓이는 $\frac{1}{2}\pi(Nr)^2 = N^2 \cdot \frac{1}{2}\pi r^2$입니다. 영역 B는 남은 부분이므로

$$B = N^2 \cdot \tfrac{1}{2}\pi r^2 - N \cdot \tfrac{1}{2}\pi r^2 = (N^2 - N) \cdot \tfrac{1}{2}\pi r^2.$$

3단계. 비에서 공통인수 $\frac{1}{2}\pi r^2$이 약분됩니다.

$$A : B = N : (N^2 - N) = N : N(N-1) = 1 : (N-1).$$

$1 : (N-1) = 1 : 18$로 놓으면 $N - 1 = 18$이므로 $N = 19$입니다.

주의. B는 작은 반원들의 **바깥** 부분만입니다. A를 큰 반원 전체와 비교하면 $A : (A + B) = 1 : N$이 되어 $N = 18$, 즉 선택지 (C)가 나옵니다.

정답: (D) 19

6 정수론

출처: 2019 AMC 10A 9번

> 처음 n개의 양의 정수의 합이 처음 n개의 양의 정수의 곱의 약수가 아닌 세 자리 양의 정수 n 중에서 가장 큰 것은?
>
> **(A)** 995 **(B)** 996 **(C)** 997 **(D)** 998 **(E)** 999

핵심 아이디어. 합을 $\frac{n(n+1)}{2}$, 곱을 $n!$로 씁니다. 공통인수 n을 약분하고 나면, 모든 것은 $n+1$을 수 $1, 2, \ldots, n-1$로 만들어 낼 수 있는지에 달려 있습니다. $n \geq 2$일 때 이것이 불가능한 경우는 $n+1$이 소수일 때뿐입니다.

1단계. 합은 $\dfrac{n(n+1)}{2}$이고 곱은 $n! = n \cdot (n-1)!$입니다. 곱을 합으로 나눈 몫은 다음과 같습니다.

$$\frac{n!}{n(n+1)/2} = \frac{2\,(n-1)!}{n+1}.$$

따라서 합이 곱의 약수가 되는 것은 $n+1$이 $2 \cdot (n-1)!$의 약수일 때이고, 그때뿐입니다.

2단계. $(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1)$임을 이용하여 큰 쪽부터 확인합니다.

- $n = 999$: $n+1 = 1000 = 8 \cdot 125$입니다. 인수 8과 125가 $998!$ 안에 따로따로 들어 있으므로 1000은 이 수의 약수입니다. 나누어떨어집니다.
- $n = 998$: $n+1 = 999 = 27 \cdot 37$입니다. 인수 27과 37이 모두 $997!$ 안에 들어 있습니다. 나누어떨어집니다.
- $n = 997$: $n+1 = 998 = 2 \cdot 499$입니다. 인수 2와 499가 모두 $996!$ 안에 들어 있습니다. 나누어떨어집니다.
- $n = 996$: $n+1 = 997$이고, 이것은 소수입니다. $2 \cdot 995!$의 인수는 모두 997보다 작으므로, 소수 997은 이 수를 나누지 못합니다. 나누어떨어지지 **않습니다**.

따라서 구하는 가장 큰 n은 996입니다.

주의. 997이 소수인 것을 보고 $n = 997$ (C)로 답하는 실수. 소수여야 하는 것은 n이 아니라 $n+1$입니다. $n = 997$일 때는 합이 곱의 약수입니다.

정답: (B) 996

7 기하

출처: 2011 AMC 10A 9번

> 네 방정식 $y = a$, $y = -b$, $x = -c$, $x = d$의 그래프로 둘러싸인 직사각형 모양의 영역이 있다. 단, a, b, c, d는 모두 양수이다. 다음 중 이 영역의 넓이를 나타내는 것은?
>
> **(A)** $ac + ad + bc + bd$ **(B)** $ac - ad + bc - bd$ **(C)** $ac + ad - bc - bd$
>
> **(D)** $-ac - ad + bc + bd$ **(E)** $ac - ad - bc + bd$

핵심 아이디어. 변의 길이는 평행한 두 직선 사이의 거리, 즉 큰 좌표에서 작은 좌표를 뺀 값입니다. a, b, c, d가 양수이므로 $-b$는 x축 아래쪽에, $-c$는 y축 왼쪽에 있습니다.

높이. 가로 변은 $y = a$ (x축 위쪽)와 $y = -b$ (x축 아래쪽)입니다. 따라서 높이는 $a - (-b) = a + b$입니다.

너비. 세로 변은 $x = d$ (y축 오른쪽)와 $x = -c$ (y축 왼쪽)입니다. 따라서 너비는 $d - (-c) = c + d$입니다.

넓이. 곱해서 전개하면 다음과 같습니다.

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

주의. 음수 좌표를 빼면 더해진다는 것을 잊고 변의 길이를 $a - b$와 $c - d$로 쓰면 $(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$가 되어 선택지 (E)를 고르게 됩니다.

정답: (A) $ac + ad + bc + bd$

8 대수

출처: 2019 AMC 10B 11번

> 두 항아리에 같은 개수의 구슬이 들어 있고, 모든 구슬은 파란색 또는 초록색이다. 항아리 1에서 파란 구슬과 초록 구슬의 개수의 비는 $9 : 1$이고, 항아리 2에서 파란 구슬과 초록 구슬의 개수의 비는 $8 : 1$이다. 초록 구슬은 모두 95개이다. 항아리 1에 있는 파란 구슬은 항아리 2에 있는 파란 구슬보다 몇 개 더 많은가?
>
> **(A)** 5 **(B)** 10 **(C)** 25 **(D)** 45 **(E)** 50

핵심 아이디어. 비 $9 : 1$은 항아리 속 구슬이 10개의 같은 묶음으로 나뉜다는 뜻이므로, 한 묶음의 크기를 문자로 둡시다. 여기서 한 "묶음"은 정확히 초록 구슬의 개수이므로, 초록 구슬의 개수를 미지수로 잡습니다.

1단계. 항아리 1의 초록 구슬을 x개, 항아리 2의 초록 구슬을 y개라 합시다. 그러면 항아리 1에는 파란 구슬이 $9x$개, 전체 구슬이 $10x$개 있고, 항아리 2에는 파란 구슬이 $8y$개, 전체 구슬이 $9y$개 있습니다.

2단계. 두 조건을 식으로 쓰면 다음과 같습니다.

$$10x = 9y \qquad \text{그리고} \qquad x + y = 95.$$

첫째 식에서 $y = \frac{10}{9}x$이므로 $x + \frac{10}{9}x = \frac{19}{9}x = 95$이고, $x = 45$, $y = 50$을 얻습니다. 확인해 보면 두 항아리 모두 구슬이 450개입니다.

3단계. 항아리 1에는 파란 구슬이 $9 \cdot 45 = 405$개, 항아리 2에는 $8 \cdot 50 = 400$개 있습니다. 차는 $405 - 400 = 5$입니다.

정답: (A) 5

---

9 정수론

출처: 2020 AMC 10B 12번

> 분수
>
> $$\frac{1}{20^{20}}$$
>
> 을 소수로 나타내면, 소수점 아래에 0이 몇 개 연달아 나온 뒤 9가 나오고, 그 뒤로 몇 개의 숫자가 더 이어진다. 소수점 아래에 처음 연달아 나오는 0은 몇 개인가?
>
> **(A)** 23 **(B)** 24 **(C)** 25 **(D)** 26 **(E)** 27

핵심 아이디어. 10의 거듭제곱으로 나누는 것은 소수점을 옮기는 것일 뿐입니다. 그러니 $\frac{1}{20^{20}}$을 (어떤 자연수) $\div$ (10의 거듭제곱) 꼴로 바꿔 봅시다. 분자와 분모에 5^{20}을 곱하면 됩니다.

1단계. $20 \cdot 5 = 100$이므로 다음과 같습니다.

$$\frac{1}{20^{20}} = \frac{5^{20}}{20^{20} \cdot 5^{20}} = \frac{5^{20}}{100^{20}} = \frac{5^{20}}{10^{40}}.$$

2단계. 5^{20}의 크기를 어림해 봅시다. $5^{20} = \frac{10^{20}}{2^{20}}$이고 $2^{20} = 1{,}048{,}576 \approx 1.05 \times 10^6$이므로, $5^{20} \approx \frac{10^{14}}{1.05} \approx 0.95 \times 10^{14}$입니다. (정확히는 $5^{20} = 95{,}367{,}431{,}640{,}625$입니다.) 따라서 5^{20}은 14자리 수이고 9로 시작합니다.

3단계. 14자리 수를 10^{40}으로 나누면 그 수의 마지막 자리 숫자는 소수점 아래 40번째 자리에 옵니다. 따라서 첫 자리 숫자인 9는 $40 - 14 + 1 = 27$번째 자리에 놓입니다. 그 앞의 $40 - 14 = 26$개 자리는 모두 0입니다.

$$\frac{1}{20^{20}} = 0.\underbrace{00\cdots0}_{26}95367431640625.$$

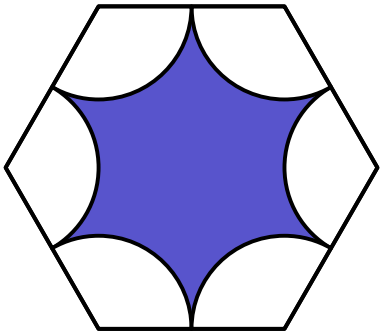
주의. $20^{20} = 2^{20} \cdot 10^{20}$은 $7 + 20 = 27$자리 수이므로 "27자리이니 0도 27개"라고 하기 쉬운데, 이것은 (E)입니다. 그러나 1로 시작하는 27자리 수로 1을 나눈 값은 10^{-27}과 10^{-26} 사이에 있으므로, 처음 나오는 0이 아닌 숫자 앞에는 0이 26개뿐입니다.

정답: (D) 26

10 기하

출처: 2014 AMC 10A 12번

한 변의 길이가 6인 정육각형이 있다. 각 꼭짓점을 중심으로 반지름이 3인 합동인 호를 그려서 그림과 같이 부채꼴을 만든다. 정육각형의 내부이면서 부채꼴의 외부인 영역을 그림과 같이 색칠한다. 색칠한 영역의 넓이는?



(A) $27\sqrt{3}-9\pi$ **(B)** $27\sqrt{3}-6\pi$ **(C)** $54\sqrt{3}-18\pi$ **(D)** $54\sqrt{3}-12\pi$ **(E)** $108\sqrt{3}-9\pi$

핵심 아이디어. 색칠한 넓이 = 정육각형 − 부채꼴입니다. 제대로 구해야 할 것은 각 부채꼴의 중심각 하나뿐인데, 그것은 그 꼭짓점에서의 정육각형의 내각입니다.

1단계. 중심에서 여섯 꼭짓점으로 선분을 그으면, 한 변의 길이가 6인 정육각형은 한 변의 길이가 6인 정삼각형 여섯 개로 나뉩니다. 각 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 6^2 = 9\sqrt{3}$이므로 정육각형의 넓이는 다음과 같습니다.

$$6\cdot 9\sqrt{3} = 54\sqrt{3}.$$

2단계. 각 부채꼴은 한 꼭짓점을 중심으로 하고 그 꼭짓점에서 만나는 두 변으로 둘러싸여 있으므로, 중심각은 정육각형의 내각인 120°입니다. 반지름 3은 한 변의 절반이므로, 이웃한 두 꼭짓점에서 그린 호는 그 사이에 있는 변의 중점에서 정확히 만나고 부채꼴끼리 겹치지 않습니다.

3단계. 중심각이 120°인 부채꼴은 넓이가 $\pi\cdot 3^2 = 9\pi$인 원의 $\frac{120}{360} = \frac{1}{3}$이므로 넓이가 3π입니다. 부채꼴 여섯 개의 넓이의 합은 $6\cdot 3\pi = 18\pi$로, 반지름이 3인 원 두 개의 넓이와 같습니다.

4단계. 색칠한 영역의 넓이는 $54\sqrt{3}-18\pi \approx 93.5-56.5 = 37.0$이고, 양수이므로 타당합니다.

주의. 1단계의 삼각형들은 각이 60°이지만, 부채꼴은 두 삼각형이 만나는 정육각형의 **꼭짓점**에 놓이므로 각 부채꼴의 중심각은 120°입니다. 60°를 쓰면 부채꼴 넓이의 합이 9π가 되어 답이 $54\sqrt{3}-9\pi$가 되는데, 이것은 선택지에 없습니다.

정답: (C) $54\sqrt{3}-18\pi$

11 대수

출처: 2009 AMC 10A 13번

> $P = 2^m$, $Q = 3^n$ 이라 하자. 모든 정수의 순서쌍 (m, n)에 대하여 12^{mn}과 같은 것은?
>
> **(A)** P^2Q **(B)** P^nQ^m **(C)** P^nQ^{2m} **(D)** $P^{2m}Q^n$ **(E)** $P^{2n}Q^m$

핵심 아이디어. 모든 선택지는 $P = 2^m$과 $Q = 3^n$으로 이루어져 있고, 이것은 소수 2와 3의 거듭제곱입니다. 바로 12에 들어 있는 소수들이지요. 그러니 12를 소인수분해하여 $12 = 2^2 \cdot 3$으로 쓰고, 2의 거듭제곱은 $(2^m)^{\text{어떤 수}}$ 꼴로, 3의 거듭제곱은 $(3^n)^{\text{어떤 수}}$ 꼴로 보이도록 지수를 다시 묶어 봅시다.

1단계. $12 = 2^2 \cdot 3$이므로

$$12^{mn} = \left(2^2 \cdot 3\right)^{mn} = 2^{2mn} \cdot 3^{mn}.$$

2단계. 2의 거듭제곱을 m을 중심으로 묶습니다. $2^{2mn} = (2^m)^{2n} = P^{2n}$입니다.

3단계. 3의 거듭제곱을 n을 중심으로 묶습니다. $3^{mn} = (3^n)^m = Q^m$입니다.

따라서 모든 정수의 순서쌍 (m, n)에 대하여 $12^{mn} = P^{2n}Q^m$입니다.

주의. $m = n = 1$을 대입하는 것만으로는 결정되지 않습니다. 이때 $12^{mn} = 12$이고, (A)는 $4 \cdot 3 = 12$, (D)는 $4 \cdot 3 = 12$, (E)는 $4 \cdot 3 = 12$가 되기 때문입니다. $m = 1$, $n = 2$처럼 $m \neq n$인 값을 골라 봅시다. 이제 $12^{mn} = 144$인데, (A)는 36, (D)는 324이고, (E)만 $16 \cdot 9 = 144$가 됩니다.

정답: (E) $P^{2n}Q^m$

12 경우의 수와 확률

출처: 2023 AMC 10A 14번

> 처음 100개의 양의 정수 중에서 한 수를 임의로 고른 다음, 그 수의 양의 약수 중 하나를 임의로 고른다. 고른 약수가 11로 나누어떨어질 확률은?
>
> **(A)** $\frac{4}{100}$ **(B)** $\frac{9}{200}$ **(C)** $\frac{1}{20}$ **(D)** $\frac{11}{200}$ **(E)** $\frac{3}{50}$

핵심 아이디어. 약수가 11의 배수가 되려면 원래 수도 그래야 합니다. 그러니 먼저 고른 수가 11의 배수일 확률을 구하고, 그다음 그런 수의 약수 중 11의 배수인 것의 비율을 구합시다. $100 < 121 = 11^2$이므로, 두 번째 비율은 그런 수 모두에서 똑같습니다.

1단계. n의 약수가 11로 나누어떨어지면 n도 11로 나누어떨어집니다. 100 이하의 11의 배수는 $11, 22, \ldots, 99$로, 100개 중 9개입니다. 그 밖의 n에 대해서는 성공 확률이 0입니다.

2단계. $1 \le m \le 9$인 $n = 11m$을 생각합시다. $m < 11$이므로 소수 11은 m을 나누지 않습니다. 따라서 $11m$의 약수는 모두 m의 약수 d이거나 $11d$ 꼴입니다. 두 목록의 길이는 같고, 둘 중 두 번째 목록만이

정확히 11의 배수로 이루어집니다. 그러므로 n의 약수 중 정확히 절반이 11로 나누어떨어집니다. 예를 들어 22의 약수는 $1, 2, 11, 22$이고, 이 넷 중 둘이 11의 배수입니다.

3단계. 두 단계의 확률을 곱합니다.

$$\frac{9}{100} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{200}.$$

주의. 1단계에서 멈추면 $\frac{9}{100}$를 얻는데, 이것은 고른 **수**가 11의 배수일 확률입니다. 두 번째 무작위 선택을 잊은 것이며, $\frac{9}{100}$는 선택지에 없습니다.

정답: (B) $\frac{9}{200}$

---

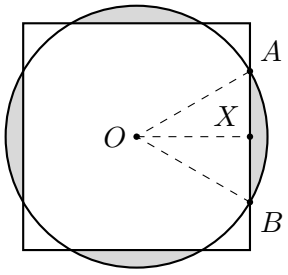
13 기하

출처: 2010 AMC 10B 16번

한 변의 길이가 1인 정사각형과 반지름이 $\frac{\sqrt{3}}{3}$인 원의 중심이 같다. 원의 내부이면서 정사각형의 외부인 부분의 넓이는?

(A) $\frac{\pi}{3} - 1$ **(B)** $\frac{2\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{3}$ **(C)** $\frac{\pi}{18}$ **(D)** $\frac{1}{4}$ **(E)** $\frac{2\pi}{9}$

핵심 아이디어. 먼저 두 도형이 어떻게 겹치는지 정해 봅시다. 반지름 $\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.577$은 한 변의 절반$(0.5)$보다 크고 대각선의 절반$(\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707)$보다 작습니다. 따라서 원은 각 변의 가운데에서 바깥으로 삐져나오고, 정사각형의 꼭짓점은 원 밖으로 튀어나옵니다. 구하는 부분은 똑같은 활꼴 네 개이고, 각 활꼴은 "부채꼴 빼기 삼각형"입니다.



1단계. 원이 정사각형의 오른쪽 변과 만나는 두 점을 A, B라 하고, 그 변의 중점을 X라 하면 $OX = \frac{1}{2}$입니다. 직각삼각형 OXA에서 $AX^2 = OA^2 - OX^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$이므로 $AX = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$입니다.

2단계. 그러면 $AB = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$이고, 이것은 반지름과 같습니다. 따라서 $\triangle OAB$는 정삼각형이고 $\angle AOB = 60°$입니다. (같은 말로, $\triangle OXA$는 30-60-90 삼각형입니다.)

3단계. 부채꼴 AOB는 원의 $\frac{60}{360} = \frac{1}{6}$이므로 넓이는 $\frac{1}{6} \cdot \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{18}$입니다. 정삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{12}$입니다.

4단계. 활꼴 하나($\overline{AB}$ 오른쪽의 색칠된 부분)의 넓이는 $\frac{\pi}{18} - \frac{\sqrt{3}}{12}$입니다. 이런 활꼴이 각 변에 하나씩 모두 네 개 있고, 꼭짓점이 원 밖에 있으므로 서로 겹치지 않습니다. 따라서 전체 넓이는 다음과 같습니다.

$$4\left(\frac{\pi}{18} - \frac{\sqrt{3}}{12}\right) = \frac{2\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

주의. 넓이를 그냥 빼서 $\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 1 = \frac{\pi}{3} - 1$로 계산하면 선택지 (A)가 되는데, 이는 정사각형 전체가 원 안에 있다고 가정한 것입니다. 실제로는 그렇지 않습니다. 꼭짓점은 중심에서 0.707만큼 떨어져 있습니다. 부채꼴 네 개를 더하고 삼각형을 빼는 것을 잊으면 $4 \cdot \frac{\pi}{18} = \frac{2\pi}{9}$로 선택지 (E)가 됩니다.

정답: (B) $\frac{2\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{3}$

---

14 경우의 수와 확률

출처: 2025 AMC 10A 16번

> 항아리가 세 개 있다. 동전 세 개를 각각 세 항아리 중 하나에 넣는데, 항아리는 무작위로, 다른 동전을 넣은 위치와 독립적으로 고른다. 동전이 가장 많이 들어 있는 항아리에 든 동전 개수의 기댓값은?
>
> **(A)** $\frac{4}{3}$ **(B)** $\frac{39}{27}$ **(C)** $\frac{5}{3}$ **(D)** $\frac{17}{9}$ **(E)** 2

핵심 아이디어. 같은 확률의 배치는 $3^3 = 27$가지뿐입니다. 이를 나뉜 **모양**, 즉 3-0-0, 2-1-0, 1-1-1로 분류하면, 각 모양에서 가장 많이 든 항아리의 동전 수는 정해져 있습니다.

1단계. 동전마다 선택지가 3가지이므로 같은 확률의 배치는 $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$가지입니다.

2단계. 모양별로 세어 봅시다.

- 세 동전이 모두 한 항아리에 들어가는 경우(3-0-0): 항아리를 고르는 방법이 3가지입니다. 가장 많이 든 항아리에는 동전이 3개 있습니다.
- 항아리마다 동전이 하나씩 들어가는 경우(1-1-1): 동전들이 서로 다른 항아리에 들어가는 방법은 $3! = 6$가지입니다. 가장 많이 든 항아리에는 동전이 1개 있습니다.
- 나머지 경우(2-1-0): $27 - 3 - 6 = 18$가지입니다. (직접 세면, 동전 두 개가 든 항아리를 고르는 방법 3가지, 동전 하나가 든 항아리를 고르는 방법 2가지, 혼자 있는 동전을 고르는 방법 3가지이므로 $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$입니다.) 가장 많이 든 항아리에는 동전이 2개 있습니다.

3단계. 기댓값은 다음과 같습니다.

$$\frac{3 \cdot 3 + 18 \cdot 2 + 6 \cdot 1}{27} = \frac{9 + 36 + 6}{27} = \frac{51}{27} = \frac{17}{9}.$$

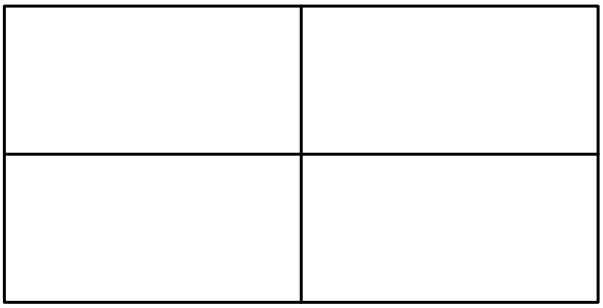
주의. 세 모양이 같은 확률로 일어난다고 생각하면 안 됩니다. 27가지 중 각각 3, 18, 6가지입니다. $3, 2, 1$을 똑같은 비중으로 평균 내면 2, 즉 선택지 (E)가 나옵니다.

정답: (D) $\frac{17}{9}$

---

15 경우의 수와 확률

출처: 2021 가을 AMC 10A 18번

> 어느 농부의 직사각형 밭이 그림과 같이 2행 2열의 격자 모양으로 4개의 직사각형 구역으로 나뉘어 있다. 농부는 각 구역에 옥수수, 밀, 콩, 감자 중 한 가지 작물을 심으려고 한다. 농부는 경계를 공유하는 어떤 두 구역에도 옥수수와 밀을 심고 싶지 않고, 경계를 공유하는 어떤 두 구역에도 콩과 감자를 심고 싶지 않다. 이러한 제한 아래에서, 밭의 네 구역 각각에 심을 작물을 정하는 방법의 수는?
>
> 
>
> **(A)** 12 **(B)** 64 **(C)** 84 **(D)** 90 **(E)** 144

핵심 아이디어. 각 작물에는 정확히 하나의 "상극" 작물이 있습니다(옥수수와 밀, 콩과 감자). 대각선 위치의 두 구역은 경계를 공유하지 않고, 둘 다 나머지 두 구역 각각과 경계를 공유합니다. 그러니 대각선 위치의 두 구역에 같은 작물을 심는지에 따라 경우를 나눕시다.

준비. 구역을 왼쪽 위, 오른쪽 위, 왼쪽 아래, 오른쪽 아래라 부릅시다. 오른쪽 위와 왼쪽 아래는 대각선 위치이고(경계를 공유하지 않음), 나머지 두 구역은 각각 이 두 구역 **모두**와 경계를 공유합니다. 같은 작물끼리 이웃하는 것은 허용됩니다.

경우 1: 오른쪽 위와 왼쪽 아래에 같은 작물을 심는 경우. 그 작물을 고르는 방법은 4가지입니다. 나머지 각 구역은 이 한 작물하고만 이웃하므로 그 상극만 피하면 되어, 각각 3가지씩 선택할 수 있습니다. 따라서 $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$가지입니다.

경우 2: 오른쪽 위와 왼쪽 아래에 서로 다른 작물을 심는 경우. 순서를 고려하여 두 작물을 고르는 방법은 $4 \cdot 3 = 12$가지입니다. 이제 나머지 각 구역은 두 작물 각각의 상극을 피해야 합니다.

- 두 작물이 서로 상극이면(예: 옥수수와 밀), 금지되는 작물은 밀과 옥수수로 2가지뿐이므로 2가지 선택이 남습니다.
- 서로 상극이 아니면(예: 옥수수와 콩), 금지되는 작물은 밀과 감자로 역시 2가지이므로 2가지 선택이 남습니다.

어느 쪽이든 나머지 각 구역에는 2가지 선택이 있으므로 $12 \cdot 2 \cdot 2 = 48$가지입니다.

합계. 두 경우는 겹치지 않고 모든 경우를 빠짐없이 포함하므로, 방법의 수는 $36 + 48 = 84$입니다.

주의. 구역을 차례로 채우면서 "마지막 구역은 두 구역과 이웃하니 3가지"라고 하면 $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 108$이 되는데, 이는 선택지에 없습니다. 마지막 구역의 선택이 3가지인 것은 두 이웃 구역의 작물이 같을 때뿐이며, 그래서 경우를 나누어야 합니다.

정답: (C) 84

---

16 정수론

출처: 2021 가을 AMC 10B 19번

N을 양의 정수 $7777\ldots777$이라 하자. 이 수는 각 자리의 숫자가 모두 7인 313자리 수이다. $f(r)$을 N의 r제곱근의 맨 앞자리 숫자라 하자. 다음 식의 값은

$$f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6)?$$

(A) 8 **(B)** 9 **(C)** 11 **(D)** 22 **(E)** 29

핵심 아이디어. 어떤 수에 10의 거듭제곱을 곱해도 맨 앞자리 숫자는 변하지 않습니다. 그러므로 N에서 r제곱근이 다시 10의 거듭제곱이 되는 10의 거듭제곱을 떼어 내면, 제곱근을 구할 작은 "앞부분"만 남습니다. 313자리라는 정보는 312를 r로 나눈 나머지를 통해서만 영향을 줍니다.

1단계. $N = 7.77\ldots \times 10^{312}$이므로 $7 \cdot 10^{312} < N < 8 \cdot 10^{312}$입니다.

2단계 ($r = 2, 3, 4, 6$). 이 수들은 모두 312의 약수이므로$(312 = 2 \cdot 156 = 3 \cdot 104 = 4 \cdot 78 = 6 \cdot 52)$ $\sqrt[r]{10^{312}}$은 10의 거듭제곱입니다. 따라서 N의 r제곱근은 $7 < x < 8$인 어떤 x에 대한 $\sqrt[r]{x}$와 맨 앞자리 숫자가 같습니다.

- $r = 2$: $2^2 = 4 < 7$이고 $8 < 9 = 3^2$이므로 $2 < \sqrt{x} < 3$, 즉 $f(2) = 2$입니다.
- $r = 3$: $1 < 7$이고 $8 = 2^3$이므로 $1 < \sqrt[3]{x} < 2$, 즉 $f(3) = 1$입니다.
- $r = 4$: $8 < 16 = 2^4$이므로 $f(4) = 1$입니다.
- $r = 6$: $8 < 64 = 2^6$이므로 $f(6) = 1$입니다.

3단계 ($r = 5$). 이번에는 $312 = 5 \cdot 62 + 2$이므로 앞부분에 10의 거듭제곱을 두 개 더 남겨 둡니다. 그러면 $700 \cdot 10^{310} < N < 800 \cdot 10^{310}$이고 $\sqrt[5]{10^{310}} = 10^{62}$입니다. $3^5 = 243 < 700$이고 $800 < 1024 = 4^5$이므로 앞부분의 5제곱근은 3과 4 사이에 있습니다. 따라서 $f(5) = 3$입니다.

4단계. 합은 $2 + 1 + 1 + 3 + 1 = 8$입니다.

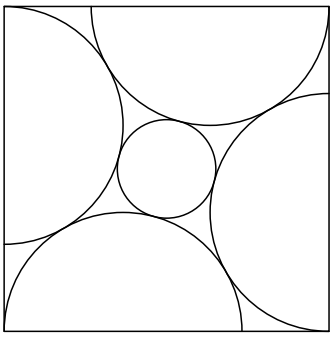
주의. $r = 5$도 다른 경우처럼 다루어 $7.77\ldots$의 5제곱근을 구하면 $f(5) = 1$이 되고 합은 6이 되는데, 이것은 선택지에 없습니다. 앞부분은 남는 10의 거듭제곱의 지수가 r의 배수가 되도록 골라야 합니다.

정답: (A) 8

17 기하

출처: 2025 AMC 10B 20번

한 변의 길이가 1인 정사각형에 합동인 반원 네 개가 내접해 있다. 각 반원의 지름은 정사각형의 변 위에 있고, 각 지름의 한 끝점은 정사각형의 꼭짓점이며, 이웃한 반원끼리는 서로 접한다. 정사각형의 중심을 중심으로 하는 작은 원이 아래 그림과 같이 네 반원에 각각 접한다.



작은 원의 지름은 정수 a, b, c, d에 대하여 $(\sqrt{a}+b)(\sqrt{c}+d)$로 나타낼 수 있다. $a+b+c+d$의 값은?

(A) 3 **(B)** 5 **(C)** 8 **(D)** 9 **(E)** 11

핵심 아이디어. 문제의 조건은 모두 접한다는 것이고, 외접하는 두 원의 중심은 정확히 (반지름의 합)만큼 떨어져 있습니다. 정사각형을 좌표평면에 놓으면 모든 중심의 좌표가 간단해지고, 접한다는 조건이 방정식이 됩니다.

1단계. 정사각형의 꼭짓점을 $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$에 놓고 각 반원의 반지름을 r이라 합시다. 그림처럼 아래쪽 반원의 지름은 $(0,0)$에서 $(2r,0)$까지이므로 중심은 $(r,0)$입니다. 오른쪽 반원의 지름은 $(1,0)$에서 위로 $(1,2r)$까지이므로 중심은 $(1,r)$입니다.

2단계. 이 두 반원은 서로 접하므로 중심 사이의 거리는 $r+r=2r$입니다.

$$(1-r)^2+r^2=4r^2 \implies 1-2r+2r^2=4r^2 \implies 2r^2+2r-1=0.$$

양의 근은 $r=\dfrac{-2+\sqrt{12}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\approx 0.366$입니다.

3단계. 작은 원의 중심은 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$이고 반지름은 t입니다. 이 중심과 $(r,0)$ 사이의 거리는 $\frac{1}{2}-r=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$을 이용하여 구합니다.

$$\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{7-4\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}=2-\sqrt{3}.$$

따라서 거리는 $\sqrt{2-\sqrt{3}}$입니다. 이 이중근호는 간단히 할 수 있습니다.

$$\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{6+2-2\sqrt{12}}{4}=\frac{8-4\sqrt{3}}{4}=2-\sqrt{3},$$

이고 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}>0$이므로 $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$입니다.

4단계. 접한다는 조건에서 $t + r = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ 입니다. 따라서 지름은 다음과 같습니다.

$$2t = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) - (\sqrt{3} - 1) = \sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2} + 1 = (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{2} - 1).$$

(우변을 전개하여 확인해 봅시다.) 정사각형의 90° 회전대칭에 의해 이 원은 네 반원 모두에 접합니다. 수치로는 $2t \approx 0.303$으로 그림과 잘 맞습니다.

5단계. 따라서 $a = 3$, $b = -1$, $c = 2$, $d = -1$이고 $a + b + c + d = 3 - 1 + 2 - 1 = 3$입니다.

주의. b와 d는 음수입니다. 부호를 무시하고 $3 + 1 + 2 + 1 = 7$로 더하면 안 되며, 7은 선택지에도 없습니다.

정답: (A) 3

---

18 대수

출처: 2024 AMC 10A 21번

정수로 이루어진 5×5 배열에서 각 행의 수들을 차례대로 나열한 것과 각 열의 수들을 차례대로 나열한 것은 모두 길이가 5인 등차수열을 이룬다. 위치 $(5,5)$, $(2,4)$, $(4,3)$, $(3,1)$에 있는 수는 각각 0, 48, 16, 12이다. 위치 $(1,2)$에 있는 수는?

$$\begin{bmatrix} \cdot & ? & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 48 & \cdot \\ 12 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 16 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}$$

(A) 19 **(B)** 24 **(C)** 29 **(D)** 34 **(E)** 39

핵심 아이디어. "모든 행과 모든 열이 등차수열"이라는 조건은 매우 강합니다. 이 조건 때문에 배열 전체가 모르는 상수 네 개만 가진 하나의 식으로 정해집니다. 주어진 수도 네 개이니, 상수를 구하기에 딱 알맞습니다. 위치를 가운데 $(3,3)$에서부터 재면 수가 작아집니다.

1단계: 배열의 모양. i행 j열의 수를 $a(i,j)$라 쓰고, $u = i - 3$, $v = j - 3$으로 놓으면 $u, v \in \{-2, \ldots, 2\}$입니다. i행은 등차수열이므로, 어떤 수 p_i(그 행의 가운데 수)와 q_i(그 행의 공차)에 대하여 $a = p_i + q_i v$입니다.

3열도 등차수열이므로, 그 열의 수 p_i는 i가 커질 때 일정한 양씩 변합니다. 즉 $p_i = P + Qu$입니다. 4열도 등차수열이므로 $p_i + q_i$도 u의 일차식이고, 둘을 빼면 $q_i = R + Su$도 u의 일차식입니다. 따라서

$$a = P + Qu + Rv + Suv.$$

여기서 P는 가운데 수, Q는 3열을 따라 내려갈 때의 공차, R은 3행을 따라갈 때의 공차입니다.

2단계: 주어진 네 수 이용하기. 주어진 각 위치를 (u, v)로 바꾸면 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}(4,3) \to (1,0): &\quad P+Q=16,\\ (3,1) \to (0,-2): &\quad P-2R=12,\\ (2,4) \to (-1,1): &\quad P-Q+R-S=48,\\ (5,5) \to (2,2): &\quad P+2Q+2R+4S=0.\end{aligned}$$

3단계: 풀기. 처음 두 식에서 $P=16-Q$이고 $2R=P-12=4-Q$입니다. 이것을 마지막 식에 대입하면 $(16-Q)+2Q+(4-Q)+4S=0$, 즉 $20+4S=0$이므로 $S=-5$입니다.

이제 셋째 식은 $(16-Q)-Q+\frac{4-Q}{2}+5=48$입니다. 양변에 2를 곱하면 $32-4Q+4-Q+10=96$, 즉 $46-5Q=96$이므로 $-5Q=50$이고 $Q=-10$입니다. 그러면 $P=26$, $R=7$입니다.

4단계: 답. 위치 $(1,2)$는 $(u,v)=(-2,-1)$이므로

$$a=26+(-10)(-2)+7(-1)+(-5)(-2)(-1)=26+20-7-10=29.$$

확인해 봅시다. 배열 전체의 각 행은 $12,29,46,63,80$; $12,24,36,48,60$; $12,19,26,33,40$; $12,14,16,18,20$; $12,9,6,3,0$입니다. 모든 행과 모든 열이 등차수열이고, 모든 수가 정수이며, 주어진 네 수도 제자리에 있습니다.

정답: (C) 29

---

19 정수론

출처: 2009 AMC 10B 21번

> 다음 수를 8로 나눈 나머지는?
>
> $$3^0+3^1+3^2+\cdots+3^{2009}$$
>
> **(A)** 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 4 **(E)** 6

핵심 아이디어. 3의 거듭제곱을 8로 나눈 나머지는 금방 반복됩니다. $3^0=1$, $3^1=3$, $3^2=9\equiv 1$, $3^3=27\equiv 3$, ... 따라서 항들을 나머지 패턴이 같은 쌍으로 묶을 수 있습니다.

1단계. $3^2=9=8+1$이므로, 9를 곱해도 8로 나눈 나머지는 변하지 않습니다. 따라서 3의 거듭제곱 중 지수가 짝수인 것은 모두 나머지가 1이고, 지수가 홀수인 것은 모두 나머지가 3입니다.

2단계. 지수 $0,1,\ldots,2009$에 대응하는 항은 2010개이고, 이들은 연속한 1005개의 쌍 $3^{2j}+3^{2j+1}$로 묶입니다. 각 쌍의 나머지는 $1+3=4$입니다.

3단계. 전체 합의 나머지는 $1005\cdot 4=4020=8\cdot 502+4$의 나머지와 같으므로, 나머지는 4입니다.

다른 풀이. 등비수열의 합 공식에 의해 합은 $\dfrac{3^{2010}-1}{2}$입니다. 2로 나누는 과정이 있으므로 16을 법으로 계산합니다. $3^{2010}=9^{1005}$이고 $9^2=81\equiv 1 \pmod{16}$이므로 $9^{1005}\equiv 9 \pmod{16}$입니다. 그러면 $3^{2010}-1\equiv 8 \pmod{16}$이고, 이를 2로 나누면 8로 나눈 나머지는 4입니다.

주의. $3^{2010} \equiv 1 \pmod 8$에서 $\frac{3^{2010}-1}{2} \equiv \frac{0}{2} = 0$이라고 하기 쉬운데, 이것은 선택지 (A)입니다. 8을 법으로 하는 합동식에서는 2로 그냥 나눌 수 없습니다. 그래서 다른 풀이에서는 16을 법으로 계산한 것입니다.

정답: (D) 4

---

20 기하

출처: 2011 AMC 10B 22번

밑면은 한 변의 길이가 1인 정사각형이고 옆면은 모두 정삼각형인 각뿔이 있다. 정육면체 하나를 이 각뿔 안에 넣는데, 한 면은 각뿔의 밑면 위에 놓이고 그 맞은편 면은 모든 모서리가 각뿔의 옆면 위에 놓이도록 한다. 이 정육면체의 부피는?

(A) $5\sqrt{2}-7$ **(B)** $7-4\sqrt{3}$ **(C)** $\frac{2\sqrt{2}}{27}$ **(D)** $\frac{\sqrt{2}}{9}$ **(E)** $\frac{\sqrt{3}}{9}$

핵심 아이디어. 정육면체의 윗면은 높이 x(한 변의 길이)에 있고, 그 높이에서 자른 각뿔의 수평 단면에 꼭 맞습니다. 따라서 각뿔의 높이와, 위로 올라갈수록 정사각형 단면이 어떻게 줄어드는지를 알아야 합니다.

1단계: 높이. 각 옆모서리는 한 변의 길이가 1인 정삼각형의 한 변이므로 길이가 1입니다. 밑면의 대각선은 $\sqrt{2}$이므로, 꼭대기 점은 밑면의 중심 바로 위에 있고 밑면의 각 꼭짓점과의 수평 거리는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$입니다. 따라서 높이는 다음과 같습니다.

$$H = \sqrt{1^2 - \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}.$$

2단계: 단면. 높이 t에서 각뿔의 단면은 밑면과 닮은 정사각형이고, 닮음비는 $\frac{H-t}{H} = 1-\sqrt{2}\,t$입니다. 따라서 그 한 변의 길이는 $1-\sqrt{2}\,t$입니다.

3단계: 정육면체 맞추기. 정육면체의 한 변의 길이를 x라 합시다. 윗면은 높이 x에 있고, "모든 모서리가 옆면 위에 놓인다"는 것은 이 면이 높이 x에서의 단면 정사각형과 정확히 일치한다는 뜻입니다. 따라서 다음을 얻습니다.

$$x = 1-\sqrt{2}\,x \quad\Longrightarrow\quad x = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1.$$

4단계: 부피. $(\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2}$이므로 부피는 다음과 같습니다.

$$(\sqrt{2}-1)^3 = (3-2\sqrt{2})(\sqrt{2}-1) = 3\sqrt{2}-3-4+2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}-7.$$

주의. 옆면 정삼각형의 높이 $\frac{\sqrt{3}}{2}$을 각뿔의 높이로 쓰는 실수입니다. 그러면 $x = 2\sqrt{3}-3$이고 부피는 약 0.100이 되어 어느 선택지와도 맞지 않습니다. 각뿔의 높이는 옆면을 따라 재는 것이 아니라 밑면에서 수직으로 재야 합니다.

정답: (A) $5\sqrt{2}-7$

21 경우의 수와 확률

출처: 2017 AMC 10A 23번

> 세 꼭짓점이 모두 좌표평면 위의 점 (i, j) 중에 있고 넓이가 양수인 삼각형은 몇 개인가? (단, i와 j는 1 이상 5 이하의 정수이다.)
>
> **(A)** 2128 **(B)** 2148 **(C)** 2160 **(D)** 2200 **(E)** 2300

핵심 아이디어. 좋은 삼각형을 직접 세는 것은 막막하지만, **나쁜** 경우를 세는 것은 그렇지 않습니다. 세 점이 삼각형을 이루지 못하는 것은 정확히 세 점이 한 직선 위에 있을 때입니다. 그러니 세 점을 고르는 모든 경우를 센 뒤, 한 직선 위에 있는 세 점의 조를 직선별로 빼 줍시다.

1단계. 점은 모두 $5 \cdot 5 = 25$개이므로, 그중 3개를 고르는 방법의 수는 다음과 같습니다.

$$\binom{25}{3} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{6} = 2300.$$

2단계: 어떤 직선을 봐야 할까? 세 격자점을 지나는 직선 위에서는 한 격자점에서 다음 격자점으로 같은 이동 (a, b)만큼씩 나아가며, 이때 a와 b는 서로소입니다. 두 번 이동하면 가로로 $2a$, 세로로 $2b$만큼 가는데, 이것이 5×5 격자 안에 들어가야 하므로 $|a| \le 2$이고 $|b| \le 2$입니다. 따라서 가능한 방향은 가로, 세로, 기울기 ± 1, 그리고 기울기 ± 2, $\pm \frac{1}{2}$뿐입니다.

3단계: 한 직선 위의 세 점 세기. 격자점이 k개인 직선에는 한 직선 위에 있는 세 점의 조가 $\binom{k}{3}$개 있습니다.

- 행, 열, 그리고 긴 대각선 두 개: 점이 5개인 직선이 $5 + 5 + 2 = 12$개이므로 $12 \cdot \binom{5}{3} = 12 \cdot 10 = 120$개입니다.
- 점이 4개인 대각선(기울기 ± 1), 예를 들어 $(1, 2)$에서 $(4, 5)$까지: 4개이므로 $4 \cdot \binom{4}{3} = 16$개입니다.
- 점이 3개인 대각선, 예를 들어 $(1, 3)$에서 $(3, 5)$까지: 4개이므로 $4 \cdot 1 = 4$개입니다.
- 기울기 2: $(1, 2)$만큼 두 번 이동하면 4만큼 올라가므로 y는 $1, 3, 5$이고 x는 1, 2, 3 중 하나에서 시작할 수 있습니다. 즉 점이 정확히 3개인 직선이 3개입니다. 기울기 -2, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$도 마찬가지이므로 $4 \cdot 3 = 12$개의 직선에서 12개가 나옵니다.

모두 합하면 한 직선 위에 있는 세 점의 조는 $120 + 16 + 4 + 12 = 152$개입니다.

4단계. 넓이가 양수인 삼각형의 개수는 다음과 같습니다.

$$2300 - 152 = 2148.$$

주의. 행, 열, 45° 대각선만 확인하고 끝내기 쉽습니다. 기울기 ± 2와 $\pm \frac{1}{2}$을 빠뜨리면 $2300 - 120 - 16 - 4 = 2160$, 즉 (C)가 됩니다. 한 직선 위의 세 점을 아예 빼지 않으면 2300, 즉 (E)가 됩니다.

정답: (B) 2148

22 기하

출처: 2018 AMC 10A 24번

> $AB = 50$, $AC = 10$인 삼각형 ABC의 넓이는 120이다. $\overline{AB}$의 중점을 D, $\overline{AC}$의 중점을 E라 하자. $\angle BAC$의 이등분선이 $\overline{DE}$, $\overline{BC}$와 만나는 점을 각각 F, G라 할 때, 사각형 $FDBG$의 넓이는?
>
> **(A)** 60 **(B)** 65 **(C)** 70 **(D)** 75 **(E)** 80

핵심 아이디어. 사각형 $FDBG$는 삼각형 ABG에서 모서리의 작은 삼각형 ADF를 잘라 낸 것입니다. 각의 이등분선은 $\triangle ABC$ 중에서 $\triangle ABG$가 차지하는 비율을 알려 주고, 중점연결선 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$는 $\triangle ADF$를 $\triangle ABG$의 절반 크기 닮은꼴로 만들어 줍니다.

1단계. $\triangle ABG$의 넓이. 각의 이등분선 정리에 의해 다음이 성립합니다.

$$\frac{BG}{GC} = \frac{AB}{AC} = \frac{50}{10} = 5, \quad \text{따라서} \quad BG = \frac{5}{6}\,BC.$$

삼각형 ABG와 ABC는 A에서 직선 BC까지의 높이가 같으므로, 넓이의 비는 밑변의 비와 같습니다.

$$[ABG] = \frac{5}{6} \cdot 120 = 100.$$

2단계. $\triangle ADF$의 넓이. D와 E는 중점이므로 $\overline{DE}$는 중점연결선이고 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$입니다. 따라서 $\overline{DF} \parallel \overline{BG}$이고, $\triangle ADF$는 $\triangle ABG$와 닮음비 $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{2}$로 닮음입니다(특히 F는 $\overline{AG}$의 중점입니다). 넓이는 닮음비의 제곱에 비례하므로 다음과 같습니다.

$$[ADF] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 100 = 25.$$

3단계. D는 $\overline{AB}$ 위에, F는 $\overline{AG}$ 위에 있으므로, $\triangle ABG$에서 $\triangle ADF$를 떼어 내면 정확히 사각형 $FDBG$가 남습니다.

$$[FDBG] = 100 - 25 = 75.$$

길이 50과 10은 그 비 5를 통해서만 쓰였고, A에서의 각이나 길이 BC는 전혀 필요하지 않았다는 점에 주목하세요.

주의. 닮음비가 $\frac{1}{2}$인 닮은 도형의 넓이의 비는 $\frac{1}{4}$이지, $\frac{1}{2}$이 아닙니다. $[ADF] = \frac{1}{2} \cdot 100 = 50$으로 두면 $100 - 50 = 50$이 되는데, 이것은 선택지에 없습니다.

정답: (D) 75

23 경우의 수와 확률

출처: 2013 AMC 10A 24번

> 센트럴 고등학교와 노던 고등학교가 백개먼 시합을 벌인다. 각 학교에는 선수가 세 명씩 있으며, 대회 규칙에 따라 각 선수는 상대 학교의 각 선수와 두 게임씩 치러야 한다. 시합은 여섯 라운드로 진행되며, 각 라운드에서는 세 게임이 동시에 치러진다. 시합의 일정을 짜는 방법은 모두 몇 가지인가?
>
> **(A)** 540 **(B)** 600 **(C)** 720 **(D)** 810 **(E)** 900

핵심 아이디어. 각 라운드에서는 센트럴의 모든 선수가 서로 다른 노던 선수와 짝지어지므로, 한 라운드는 가능한 $3! = 6$가지 **짝짓기** 중 하나입니다. 일정은 짝짓기 여섯 개를 순서대로 나열한 것이므로, 먼저 **어떤** 짝짓기들을 (중복을 허용하여) 쓸 수 있는지 정하고, 그다음 그 순서를 셉니다.

센트럴의 선수를 A, B, C, 노던의 선수를 X, Y, Z라 합시다. 가능한 게임은 9가지 $(AX, AY, \ldots, CZ)$이고, 각 게임은 정확히 두 번씩 치러져야 합니다.

1단계. 여섯 가지 짝짓기를 두 묶음으로 나누기.

$$\begin{aligned} &\text{묶음 1:} \quad \{AX, BY, CZ\},\ \{AY, BZ, CX\},\ \{AZ, BX, CY\} \\ &\text{묶음 2:} \quad \{AX, BZ, CY\},\ \{AY, BX, CZ\},\ \{AZ, BY, CX\} \end{aligned}$$

각 묶음 안의 세 짝짓기를 합치면 9가지 게임이 한 번씩 모두 들어 있습니다. 묶음 1의 짝짓기와 묶음 2의 짝짓기는 항상 **정확히 하나**의 게임을 공유합니다(예를 들어 $\{AX, BY, CZ\}$와 $\{AY, BX, CZ\}$는 CZ만 공유합니다. 9가지 조합을 모두 확인할 수 있습니다).

2단계. 어떤 여섯 라운드의 모임이 가능할까? 묶음 1에서 아무 짝짓기 p, 묶음 2에서 아무 짝짓기 q를 고르고, 둘이 공유하는 하나의 게임을 g라 합시다. 게임 g는 각 묶음에서 정확히 한 짝짓기, 즉 p와 q에만 들어 있으므로, g가 치러지는 횟수는 (p를 쓴 횟수) + (q를 쓴 횟수)입니다. 이 값은 그러한 **모든** p와 q에 대해 2여야 합니다. 따라서 묶음 1의 짝짓기는 모두 같은 횟수 a번씩 쓰이고, 묶음 2의 짝짓기는 모두 $2-a$번씩 쓰입니다. 거꾸로, 이렇게 고르면 모든 게임이 정확히 두 번씩 치러지고 라운드 수는 $3a + 3(2-a) = 6$입니다.

3단계. 각 경우의 순서 세기.

- $a = 1$: 여섯 짝짓기를 한 번씩, 아무 순서로나: $6! = 720$가지.
- $a = 2$: 묶음 1의 세 짝짓기를 두 번씩: $\dfrac{6!}{2!\,2!\,2!} = \dfrac{720}{8} = 90$가지.
- $a = 0$: 묶음 2의 세 짝짓기를 두 번씩: 마찬가지로 90가지.

합계: $720 + 90 + 90 = 900$.

주의. 여섯 라운드가 모두 달라야 한다고 생각하기 쉽습니다. 그러면 $a = 1$인 경우만 세어 720, 즉 선택지 (C)가 나옵니다. "중복" 묶음 중 하나만 기억하면 $720 + 90 = 810$, 즉 선택지 (D)가 나옵니다.

다른 풀이. 라운드 대신 선수를 따라가 봅시다. 선수 A의 여섯 라운드 상대 목록에는 X, Y, Z가 두 번씩 들어 있으므로 목록은 $\frac{6!}{2!\,2!\,2!} = 90$가지입니다. A의 목록이 정해지면(예를 들어 $XXYYZZ$), B의 목록도

각 상대가 두 번씩 들어 있고 같은 라운드에서 A의 상대와 겹치면 안 됩니다. 따라서 라운드 1–2에는 X가, 라운드 3–4에는 Y가, 라운드 5–6에는 Z가 올 수 없습니다. B가 Y, Z로 (어느 순서로든) 시작하면, B의 Z와의 두 번째 게임은 라운드 3–4에, Y와의 두 번째 게임은 라운드 5–6에 있어야 하므로, 라운드 3–4는 X, Z이고 라운드 5–6은 X, Y이며 각각 순서는 자유입니다. 그래서 $2^3 = 8$가지 목록이 나옵니다. YY로 시작하면 $YYZZXX$로 정해지고, ZZ로 시작하면 $ZZXXYY$로 정해집니다. 모두 10가지 목록입니다. 그러면 C는 각 라운드에서 남은 상대와 경기해야 합니다. 따라서 일정은 $90 \cdot 10 = 900$가지입니다.

정답: (E) 900

---

24 정수론

출처: 2022 AMC 10B 25번

수열 $x_0, x_1, x_2, \ldots$에서 각 x_k는 0 또는 1이다. 각 양의 정수 n에 대하여 다음과 같이 정의한다.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} x_k 2^k$$

모든 $n \geq 1$에 대하여 $7S_n \equiv 1 \pmod{2^n}$이 성립한다고 하자. 이때 다음 합의 값은 얼마인가

$$x_{2019} + 2x_{2020} + 4x_{2021} + 8x_{2022}?$$

(A) 6 **(B)** 7 **(C)** 12 **(D)** 14 **(E)** 15

핵심 아이디어. S_n은 이진법으로 나타낸 자리 숫자가 $x_{n-1} \ldots x_1 x_0$인 수이므로, 구하는 합은 이진법 숫자 네 개로 이루어진 한 덩어리, 즉 $\dfrac{S_{2023} - S_{2019}}{2^{2019}}$입니다. 합동식과 크기 제한 $0 \leq S_n < 2^n$을 함께 쓰면 S_n이 정확히 정해집니다. 2^n보다 작은 수에 대한 법 2^n의 합동식은 가능한 경우를 몇 개만 남기기 때문입니다.

1단계: 목표를 S_n으로 나타내기. 두 식을 빼면 다음과 같습니다.

$$S_{2023} - S_{2019} = x_{2019} \cdot 2^{2019} + x_{2020} \cdot 2^{2020} + x_{2021} \cdot 2^{2021} + x_{2022} \cdot 2^{2022},$$

따라서 구하는 합은 $\dfrac{S_{2023} - S_{2019}}{2^{2019}}$입니다.

2단계: S_n의 정확한 식. 각 x_k는 0 또는 1이므로 $0 \leq S_n \leq 1 + 2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$입니다. 합동식은 $7S_n - 1$이 2^n의 배수라는 뜻이므로 $7S_n - 1 = m_n 2^n$이라 씁니다. $7S_n \equiv 1$이므로 $S_n \geq 1$이고, 따라서 $m_n \geq 0$입니다. 또 $7S_n - 1 \leq 7(2^n - 1) - 1 < 7 \cdot 2^n$이므로 $m_n \leq 6$입니다. 따라서

$$7S_n = m_n 2^n + 1, \qquad m_n \in \{0, 1, \ldots, 6\}.$$

3단계: m_n을 7로 나눈 나머지 구하기. 좌변이 7의 배수이므로 $m_n 2^n \equiv -1 \equiv 6 \pmod{7}$입니다. 2의 거듭제곱을 7로 나눈 나머지는 주기 3으로 반복됩니다. 즉 $2^0 \equiv 1$, $2^1 \equiv 2$, $2^2 \equiv 4$, $2^3 \equiv 1$입니다.

- $2019 = 3 \cdot 673$이므로 $2^{2019} \equiv 1$이고 $m_{2019} \equiv 6$이므로 $m_{2019} = 6$입니다.

- $2023 = 3 \cdot 674 + 1$이므로 $2^{2023} \equiv 2$이고 $2m_{2023} \equiv 6$이므로 $m_{2023} = 3$입니다(확인: $2 \cdot 3 = 6$).

따라서 $S_{2019} = \dfrac{6 \cdot 2^{2019} + 1}{7}$, $S_{2023} = \dfrac{3 \cdot 2^{2023} + 1}{7}$입니다.

4단계: 계산하기. $+1$은 서로 소거됩니다.

$$\frac{S_{2023} - S_{2019}}{2^{2019}} = \frac{3 \cdot 2^{2023} - 6 \cdot 2^{2019}}{7 \cdot 2^{2019}} = \frac{3 \cdot 2^4 - 6}{7} = \frac{48 - 6}{7} = 6.$$

이진법으로 $6 = 0110_2$이므로 $x_{2019} = 0$, $x_{2020} = 1$, $x_{2021} = 1$, $x_{2022} = 0$입니다.

다른 풀이. 처음 몇 항을 계산해 보면 $S_1 = 1$, $S_3 = 7$, $S_4 = 7$, $S_5 = 23$, $S_6 = 55$이므로, 자리 숫자는 $1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, \ldots$입니다. $k \geq 1$일 때 $x_k = 0$인 것은 k가 3의 배수일 때이고, 그때뿐입니다. (이것은 우연이 아닙니다. 2단계에 의해 $x_n = \frac{S_{n+1} - S_n}{2^n} = \frac{2m_{n+1} - m_n}{7}$이고, 3단계에 의해 m_n의 값은 n을 3으로 나눈 나머지에만 의존하며 $n = 1, 2, 3, \ldots$에 대하여 $3, 5, 6$이 반복됩니다. 따라서 $x_n = 1, 1, 0$이 차례로 반복됩니다.) 그러므로 $x_{2019} = 0$, $x_{2020} = x_{2021} = 1$, $x_{2022} = 0$이고, 합은 $0 + 2 + 4 + 0 = 6$입니다.

정답: (A) 6

---

25 경우의 수와 확률

출처: 2012 AMC 10A 25번

> 어떤 양의 정수 n에 대하여 구간 $[0, n]$에서 실수 x, y, z를 서로 독립적으로 임의로 고른다. x, y, z 중 어느 두 수도 서로 1 이내에 있지 않을 확률이 $\frac{1}{2}$보다 크다. 가능한 n의 값 중 가장 작은 것은?
>
> **(A)** 7 **(B)** 8 **(C)** 9 **(D)** 10 **(E)** 11

핵심 아이디어. 서로 독립인 세 균등분포 수는 정육면체 $[0, n]^3$ 안의 임의의 한 점과 같으므로, 확률은 부피의 비입니다. 먼저 세 수를 크기순으로 정렬한 다음, 필요한 간격을 "먹어 치우도록" 세 수를 서로 밀어 붙이면, 좋은 영역이 같은 모양의 더 작은 영역으로 바뀝니다.

1단계: 정렬. 두 수가 같을 확률은 0이고, 대칭성에 의해 x, y, z의 6가지 순서는 모두 같은 확률로 일어납니다. 따라서 $z < y < x$라고 가정하고 이 순서 안에서 확률을 구해도 답은 같습니다.

영역 $0 \leq z \leq y \leq x \leq n$은 정육면체를 똑같이 여섯으로 나눈 것 중 하나이고, 부피는 $\frac{n^3}{6}$입니다.

2단계: 좋은 영역. $z \leq y \leq x$일 때 "어느 두 수도 1 이내에 있지 않다"는 것은 $y - z \geq 1$이고 $x - y \geq 1$이라는 뜻입니다(그러면 $x - z \geq 2$는 저절로 성립합니다). 간격을 없애기 위해 다음과 같이 놓습니다.

$$u = z, \qquad v = y - 1, \qquad w = x - 2.$$

$n \geq 2$이면 조건은 $0 \leq u \leq v \leq w \leq n - 2$가 됩니다. ($n = 1$이면 그런 세 수가 $[0, 1]$ 안에 들어갈 수 없으므로 확률은 0입니다.) 이것은 평행이동이므로 부피가 변하지 않고, n을 $n - 2$로 바꾼 같은 종류의 영역이므로 부피는 $\frac{(n-2)^3}{6}$입니다.

3단계: 확률.

$$P = \frac{(n-2)^3/6}{n^3/6} = \left(\frac{n-2}{n}\right)^3 = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^3.$$

$n \geq 2$에서 이 값은 n이 커질수록 커지므로, $P > \frac{1}{2}$가 되는 첫 번째 n을 찾으면 됩니다.

4단계: 경계 확인. $n = 9$이면 $\left(\frac{7}{9}\right)^3 = \frac{343}{729}$이고 $2 \cdot 343 = 686 < 729$이므로 $P < \frac{1}{2}$입니다. $n = 10$이면 $\left(\frac{8}{10}\right)^3 = \frac{64}{125}$이고 $2 \cdot 64 = 128 > 125$이므로 $P > \frac{1}{2}$입니다.

P는 n과 함께 커지므로 $n \leq 9$인 경우는 모두 조건을 만족하지 않고, $n = 10$은 만족합니다. 따라서 가장 작은 값은 10입니다.

> **주의.** $n = 9$일 때의 값은 아슬아슬합니다. $\frac{343}{729} \approx 0.47$입니다. $\frac{7}{9} \approx 0.8$로 어림한 뒤 세제곱하여 약 0.51을 얻으면 (C)를 고르게 됩니다. $2(n-2)^3$과 n^3을 정확히 비교하세요.

정답: (D) 10