AMC 10

제 10 회

실전 모의고사

해설

정답표 • 출처 • 단계별 풀이

25문항 모두 AMC 10 기출(2000–2025)을 원문 그대로 사용했습니다. 심화 난이도: 각 문항은 원래 시험보다 두세 번호 앞에 배치되어 있으며, 21–25번은 원래 23–25번 문항입니다. 원문 © Mathematical Association of America.

정답표와 출처

번호	정답	출처	영역
1	**B**	2024 AMC 10A 4번	정수론
2	**C**	2005 AMC 10B 5번	대수
3	**D**	2003 AMC 10B 6번	기하
4	**A**	2004 AMC 10B 7번	대수
5	**E**	2006 AMC 10A 8번	대수
6	**B**	2015 AMC 10B 9번	기하
7	**D**	2017 AMC 10B 9번	경우의 수와 확률
8	**E**	2021 AMC 10A 11번	정수론
9	**B**	2013 AMC 10B 11번	대수
10	**C**	2008 AMC 10A 12번	대수
11	**C**	2025 AMC 10B 14번	경우의 수와 확률
12	**D**	2021 가을 AMC 10A 14번	기하
13	**D**	2020 AMC 10B 15번	대수
14	**A**	2008 AMC 10B 16번	경우의 수와 확률
15	**D**	2009 AMC 10B 18번	기하
16	**C**	2024 AMC 10B 19번	기하
17	**A**	2023 AMC 10B 20번	기하
18	**C**	2013 AMC 10A 20번	기하
19	**D**	2018 AMC 10A 22번	정수론
20	**C**	2011 AMC 10A 22번	경우의 수와 확률
21	**D**	2011 AMC 10B 23번	정수론
22	**E**	2022 AMC 10A 24번	경우의 수와 확률
23	**E**	2012 AMC 10A 24번	대수
24	**A**	2016 AMC 10A 25번	정수론
25	**C**	2019 AMC 10B 25번	경우의 수와 확률

1 정수론

출처: 2024 AMC 10A 4번

> 수 2024를 반드시 서로 다를 필요는 없는 두 자리 수들의 합으로 나타낸다. 이 합을 나타내는 데 필요한 두 자리 수의 개수의 최솟값은?
>
> **(A)** 20 **(B)** 21 **(C)** 22 **(D)** 23 **(E)** 24

핵심 아이디어. 가능한 한 **적은** 개수의 수를 쓰려면 각 수가 가능한 한 **커야** 합니다. 그래서 2024를 가장 큰 두 자리 수인 99의 배수와 비교해 봅시다.

하한. 두 자리 수는 각각 99 이하이므로, k개를 더하면 많아야 $99k$입니다. $k = 20$이면 만들 수 있는 가장 큰 값이 $99 \cdot 20 = 1980$인데, 이는 2024보다 작습니다. 따라서 20개로는 부족하고, 그보다 적은 개수로도 당연히 부족합니다.

21개로 가능함. 99를 20개 쓰고 수를 하나 더 씁니다. $2024 - 1980 = 44$이고, 이는 두 자리 수입니다. 실제로 다음이 성립합니다.

$$\underbrace{99 + 99 + \cdots + 99}_{20} + 44 = 1980 + 44 = 2024.$$

따라서 21개면 충분하고, 21이 최솟값입니다.

주의. $2024 \div 99 \approx 20.4$를 **내림**하면 20이 되어 선택지 (A)를 고르게 됩니다. 하지만 20개로는 44가 모자랍니다. 개수는 **올림**해야 합니다.

정답: (B) 21

2 대수

출처: 2005 AMC 10B 5번

> 브리애나는 주말 아르바이트로 번 돈의 일부를 써서 가격이 모두 같은 CD 여러 장을 사려고 한다. 그녀는 가진 돈의 5분의 1을 써서 CD의 3분의 1을 샀다. CD를 모두 사고 나면 그녀에게 남는 돈은 가진 돈의 몇 분의 몇인가?
>
> **(A)** $\frac{1}{5}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{2}{5}$ **(D)** $\frac{2}{3}$ **(E)** $\frac{4}{5}$

핵심 아이디어. CD의 가격이 모두 같으므로 비용은 CD의 개수에 비례합니다. CD가 세 배 많으면 돈도 세 배 듭니다.

CD의 3분의 1을 사는 데 가진 돈의 $\frac{1}{5}$가 들었습니다. CD 전체는 그런 3분의 1 묶음 세 개이므로, CD 전체의 값은 가진 돈의 다음 비율만큼입니다.

$$3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

따라서 남는 돈의 비율은 다음과 같습니다.

$$1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}.$$

그녀가 가진 돈이 얼마인지, CD를 몇 장 사는지는 전혀 필요하지 않았다는 점에 주목합시다. 비율만 알면 됩니다.

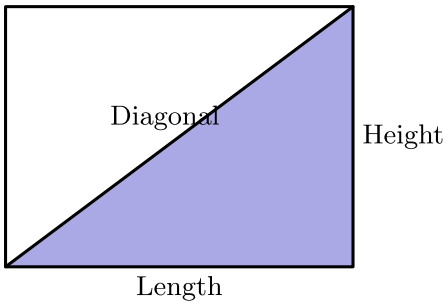
주의. $\frac{4}{5}$는 CD의 **처음** 3분의 1만 샀을 때 남는 돈입니다($1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$). 문제는 CD를 **모두** 산 뒤에 남는 돈을 묻고 있으므로, 중간에 멈추면 (E)를 고르게 됩니다.

정답: (C) $\frac{2}{5}$

3 기하

출처: 2003 AMC 10B 6번

많은 텔레비전 화면은 직사각형이며, 그 크기는 대각선의 길이로 나타낸다. 표준 텔레비전 화면에서 가로 길이와 높이의 비는 $4:3$이다. "27인치" 텔레비전 화면의 가로 길이를 인치 단위로 나타낼 때, 다음 중 가장 가까운 값은?



(A) 20 **(B)** 20.5 **(C)** 21 **(D)** 21.5 **(E)** 22

핵심 아이디어. 대각선, 가로 길이, 높이는 직각삼각형을 이룹니다. 두 변의 비가 $4:3$이면 유명한 3-4-5 직각삼각형이므로, 빗변은 5에 해당합니다.

가로 길이를 $4k$, 높이를 $3k$라 합시다. 피타고라스 정리에 의해 대각선의 길이는 다음과 같습니다.

$$\sqrt{(4k)^2+(3k)^2}=\sqrt{16k^2+9k^2}=\sqrt{25k^2}=5k.$$

"27인치" 화면이므로 대각선의 길이는 27입니다. 즉 $5k=27$이고, $k=5.4$입니다.

가로 길이는 $4k=4\cdot 5.4=21.6$인치입니다.

선택지 중에서 21.6은 21.5와 0.1만큼, 22와 0.4만큼 차이 나므로 가장 가까운 선택지는 21.5입니다.

주의. 21.6을 가장 가까운 정수로 반올림하면 22, 즉 (E)가 됩니다. 문제는 가장 가까운 **선택지**를 묻고 있으며, 21.5가 더 가깝습니다.

정답: (D) 21.5

4 대수

출처: 2004 AMC 10B 7번

> 미국에서 캐나다로 여행을 떠나면서 이사벨라는 d 미국 달러를 가지고 갔다. 국경에서 그녀는 이 돈을 모두 환전하여 미국 달러 7달러마다 캐나다 달러 10달러를 받았다. 캐나다 달러로 60달러를 쓰고 나니 d 캐나다 달러가 남았다. d의 각 자리의 숫자의 합은?
>
> **(A)** 5 **(B)** 6 **(C)** 7 **(D)** 8 **(E)** 9

핵심 아이디어. 각 문장을 캐나다 달러 금액으로 옮겨 적고, d에 대한 방정식 하나를 세워 봅시다.

미국 달러 한 달러는 캐나다 달러 $\frac{10}{7}$ 달러에 해당하므로, 이사벨라는 캐나다 달러로 $\frac{10}{7}d$달러를 받았습니다. 그중 60달러를 쓰고 d달러가 남았으므로

$$\frac{10}{7}d - 60 = d.$$

양변에서 d를 빼면 $\frac{10}{7}d - d = \frac{3}{7}d = 60$입니다. 양변에 $\frac{7}{3}$을 곱하면 $d = 60 \cdot \frac{7}{3} = 140$입니다.

검산: 미국 달러 140달러는 캐나다 달러 $140 \cdot \frac{10}{7} = 200$달러가 되고, $200 - 60 = 140$입니다.

문제는 d의 **각 자리의 숫자의 합**을 묻고 있으므로 답은 $1 + 4 + 0 = 5$입니다.

주의. 환율을 거꾸로 써서 $\frac{7}{10}d - 60 = d$로 놓으면 d가 음수가 되는데, 이는 환율을 뒤집었다는 신호입니다. 또한 $d = 140$ 자체가 아니라 각 자리의 숫자의 합을 답해야 합니다.

정답: (A) 5

---

5 대수

출처: 2006 AMC 10A 8번

> 방정식이 $y = x^2 + bx + c$인 포물선이 두 점 $(2, 3)$과 $(4, 3)$을 지난다. c의 값은?
>
> **(A)** 2 **(B)** 5 **(C)** 7 **(D)** 10 **(E)** 11

핵심 아이디어. 두 점의 y좌표가 3으로 같으므로, 두 점은 포물선의 대칭축에 대하여 서로 대칭입니다.

1단계. 대칭축은 $x = 2$와 $x = 4$의 한가운데에 있으므로 직선 $x = 3$입니다. $y = x^2 + bx + c$의 대칭축은 $x = -\frac{b}{2}$이므로 $-\frac{b}{2} = 3$, 즉 $b = -6$입니다.

2단계. 점 $(2, 3)$을 대입하면

$$3 = 2^2 + (-6)(2) + c = 4 - 12 + c = c - 8,$$

이므로 $c = 11$입니다. $(4, 3)$으로 확인하면 $16 - 24 + 11 = 3$입니다. ✓

다른 풀이. $y - 3$은 $x = 2$와 $x = 4$에서 0이 되고 최고차항의 계수가 1이므로

$$y - 3 = (x - 2)(x - 4) = x^2 - 6x + 8,$$

즉 $y = x^2 - 6x + 11$이고 $c = 11$입니다. (대입한 두 식 $3 = 4 + 2b + c$와 $3 = 16 + 4b + c$를 빼도 바로 $b = -6$을 얻습니다.)

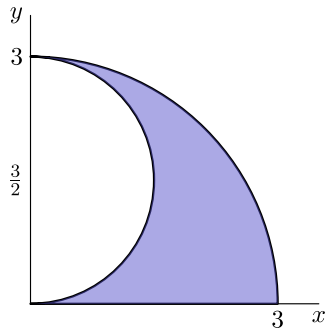
정답: (E) 11

---

6 기하

출처: 2015 AMC 10B 9번

아래 색칠된 영역은 상어 지느러미 팔카타라고 불리며, 레오나르도 다빈치가 연구한 도형이다. 이 영역은 반지름이 3이고 중심이 $(0,0)$인 원 중 제1사분면에 있는 부분, 반지름이 $\frac{3}{2}$이고 중심이 $(0,\frac{3}{2})$인 원 중 제1사분면에 있는 부분, 그리고 $(0,0)$에서 $(3,0)$까지의 선분으로 둘러싸여 있다. 상어 지느러미 팔카타의 넓이는?



(A) $\frac{4\pi}{5}$ **(B)** $\frac{9\pi}{8}$ **(C)** $\frac{4\pi}{3}$ **(D)** $\frac{7\pi}{5}$ **(E)** $\frac{3\pi}{2}$

핵심 아이디어. 지느러미는 큰 도형에서 작은 도형을 잘라 낸 모양입니다. 즉 사분원의 넓이에서 반원의 넓이를 빼면 됩니다.

1단계. 바깥 경계는 반지름이 3인 원 중 제1사분면에 있는 부분, 곧 사분원입니다. 두 좌표축과 함께 이 사분원은 넓이가 $\frac{1}{4}\pi \cdot 3^2 = \frac{9\pi}{4}$인 부채꼴을 둘러쌉니다.

2단계. 작은 원은 중심 $(0,\frac{3}{2})$가 y축 위에 있고 반지름이 $\frac{3}{2}$이므로 $(0,0)$과 $(0,3)$을 지납니다. 이 원의 제1사분면 부분은 오른쪽 절반이며, 넓이가 $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9\pi}{8}$인 반원을 둘러쌉니다. 이 반원은 사분원 안에 놓입니다(두 원은 $(0,3)$에서만 만납니다).

3단계. 색칠된 지느러미는 남은 부분이므로 넓이는 $\frac{9\pi}{4} - \frac{9\pi}{8} = \frac{18\pi}{8} - \frac{9\pi}{8} = \frac{9\pi}{8}$입니다.

주의. 작은 영역은 작은 원의 절반이지 4분의 1이 아닙니다. $\frac{1}{4}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2$을 빼면 $\frac{27\pi}{16}$가 나오는데, 이것은 선택지에 없습니다.

정답: (B) $\frac{9\pi}{8}$

7 경우의 수와 확률

출처: 2017 AMC 10B 9번

> 어느 라디오 프로그램에서 각각 3개의 선택지가 있는 객관식 문제 3개로 이루어진 퀴즈를 낸다. 참가자는 문제 중 2개 이상을 맞히면 이긴다. 참가자는 각 문제에 무작위로 답한다. 참가자가 이길 확률은?
>
> **(A)** $\frac{1}{27}$ **(B)** $\frac{1}{9}$ **(C)** $\frac{2}{9}$ **(D)** $\frac{7}{27}$ **(E)** $\frac{1}{2}$

핵심 아이디어. "2개 이상"은 두 경우로 나뉩니다. 정확히 2개를 맞히는 경우와 3개를 모두 맞히는 경우입니다. 각 문제를 맞힐 확률은 $\frac{1}{3}$, 틀릴 확률은 $\frac{2}{3}$입니다.

3개 모두 맞힘. 각 문제의 답은 독립적으로 고르므로, 확률은 $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$입니다.

정확히 2개 맞힘. 예를 들어 (맞힘, 맞힘, 틀림)처럼 특정한 한 가지 패턴의 확률은 $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{27}$입니다. 틀린 답은 3개의 문제 중 어느 것에도 올 수 있으므로 이런 패턴은 3가지이고, 확률은 $3\cdot\frac{2}{27}=\frac{6}{27}$입니다.

합계. $\frac{6}{27}+\frac{1}{27}=\frac{7}{27}$입니다.

주의. 틀린 답이 3개의 문제 중 어디에든 올 수 있다는 것을 잊으면 $\frac{2}{27}+\frac{1}{27}=\frac{1}{9}$, 즉 선택지 (B)가 나옵니다. "정확히 2개"만 세고 모두 맞히는 경우를 빠뜨리면 $\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$, 즉 선택지 (C)가 나옵니다.

정답: (D) $\frac{7}{27}$

---

8 정수론

출처: 2021 AMC 10A 11번

> 다음 정수 b 중에서 b진법의 수 2021_b-221_b가 3으로 나누어떨어지지 않는 것은?
>
> **(A)** 3 **(B)** 4 **(C)** 6 **(D)** 7 **(E)** 8

핵심 아이디어. 다섯 개의 진법을 하나씩 확인하지 말고, 차를 b에 대한 다항식으로 쓴 다음 인수분해합시다. 그러면 소수 3으로 나누어떨어지는지를 인수만 보고 판단할 수 있습니다.

1단계. 자릿값을 이용하면

$$2021_b=2b^3+0\cdot b^2+2b+1,\qquad 221_b=2b^2+2b+1.$$

빼면 $2b+1$이 지워집니다.

$$2021_b-221_b=2b^3-2b^2=2b^2(b-1).$$

2단계. 3은 소수이므로, 3이 $2b^2(b-1)$을 나누는 것은 3이 b 또는 $b-1$을 나눌 때와 정확히 같습니다(3은 2를 나누지 않습니다).

3단계. 선택지를 확인해 봅시다. $b=3$과 $b=6$은 3의 배수입니다. $b=4$와 $b=7$이면 $b-1=3$, $b-1=6$으로 3의 배수입니다. 두 조건을 모두 만족하지 않는 것은 $b=8$뿐입니다. 8도 7도 3의 배수가 아닙니다.

실제로 $b=8$이면 그 수는 $2\cdot 64\cdot 7=896$이고, $8+9+6=23$은 3의 배수가 아닙니다.

주의. 인수 b^2만 보고 $b-1$을 잊으면 $b=4$와 $b=7$도 답처럼 보입니다. 그러면 3과 6을 제외한 모든 진법이 답이 되는 것처럼 보이는데, 이는 인수 하나를 놓쳤다는 신호입니다.

정답: (E) 8

---

9 대수

출처: 2013 AMC 10B 11번

실수 x, y가 다음 방정식을 만족시킨다.

$$x^2+y^2=10x-6y-34.$$

$x+y$의 값은?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 6 **(E)** 8

핵심 아이디어. 미지수는 두 개인데 방정식이 하나뿐이면 보통 두 값을 모두 정할 수 없습니다. 단, 방정식이 제곱의 합을 0으로 만들도록 강제한다면 이야기가 다릅니다. x^2-10x와 y^2+6y가 완전제곱식으로 만들어 달라고 외치고 있다는 점이 바로 그 방향을 가리킵니다.

1단계. 모든 항을 좌변으로 옮깁니다.

$$x^2-10x+y^2+6y+34=0.$$

2단계. 각각을 완전제곱식으로 만듭니다. -10의 절반은 -5이고 $(-5)^2=25$입니다. 6의 절반은 3이고 $3^2=9$입니다. $25+9=34$이므로 상수항이 정확히 나뉩니다.

$$(x^2-10x+25)+(y^2+6y+9)=0, \qquad \text{즉,} \qquad (x-5)^2+(y+3)^2=0.$$

3단계. 실수의 제곱은 음수가 될 수 없으므로, 두 제곱의 합이 0이 되려면 각각이 0이어야 합니다. 따라서 $x-5=0$이고 $y+3=0$이므로 $x=5$, $y=-3$입니다.

확인: $x^2+y^2=25+9=34$이고 $10x-6y-34=50+18-34=34$입니다. 따라서 $x+y=5+(-3)=2$입니다.

주의. 완전제곱식을 만들 때 부호를 잘못 써서 $(y+3)^2$ 대신 $(y-3)^2$으로 쓰면 $y=3$이 되고 $x+y=8$, 즉 선택지 (E)가 나옵니다.

정답: (B) 2

10 대수

출처: 2008 AMC 10A 12번

> 빨간 구슬, 파란 구슬, 초록 구슬로 이루어진 구슬 모음에서 빨간 구슬은 파란 구슬보다 25% 더 많고, 초록 구슬은 빨간 구슬보다 60% 더 많다. 빨간 구슬이 r개 있다고 하자. 모음에 있는 구슬은 모두 몇 개인가?
>
> **(A)** $2.85r$ **(B)** $3r$ **(C)** $3.4r$ **(D)** $3.85r$ **(E)** $4.25r$

핵심 아이디어. 선택지가 모두 r의 배수이므로, 모든 색의 구슬 수를 r로 나타내 봅시다. 주의할 점은 하나뿐입니다. "빨간 구슬이 파란 구슬보다 25% 더 많다"는 빨간 구슬을 **파란 구슬과** 비교하는 말이므로, 이 백분율의 기준은 파란 구슬입니다.

1단계. 빨간 구슬은 파란 구슬보다 25% 많으므로 $r = b + 0.25b = 1.25b$입니다. 양변을 1.25로 나누면 $b = \dfrac{r}{1.25} = \dfrac{4}{5}r = 0.8r$입니다.

2단계. 초록 구슬은 빨간 구슬보다 60% 많고, 이번에는 빨간 구슬이 기준입니다. 따라서 $g = r + 0.6r = 1.6r$입니다.

3단계. 전체는 $r + 0.8r + 1.6r = 3.4r$입니다.

$r = 100$으로 간단히 확인해 봅시다. 그러면 $b = 80$이고(실제로 $0.25 \cdot 80 = 20$이므로 100은 80보다 25% 많습니다), $g = 160$이며, 전체는 $340 = 3.4 \cdot 100$입니다.

주의. 파란 구슬이 빨간 구슬보다 25% **적다**고 보아 $b = 0.75r$로 두면 $r + 0.75r + 1.6r = 3.35r$이 나오는데, 이것은 선택지에 없습니다. "빨간 구슬이 파란 구슬보다 25% 많다"는 "파란 구슬이 빨간 구슬보다 25% 적다"와 같은 말이 아닙니다. 80에서 25% 올리면 100이 되지만, 100에서 25% 내리면 75밖에 되지 않습니다.

정답: (C) $3.4r$

11 경우의 수와 확률

출처: 2025 AMC 10B 14번

> 키가 같은 사람이 아무도 없는 운동선수 아홉 명이 농구팀 입단 테스트를 받는다. 이들은 한 명씩 차례로, 파란색 밴드 3개, 빨간색 밴드 3개, 초록색 밴드 3개가 들어 있는 주머니에서 손목 밴드를 다시 넣지 않고 무작위로 하나씩 뽑는다. 이렇게 하여 이들은 파란색 조, 빨간색 조, 초록색 조로 나뉜다. 각 조에서 키가 가장 큰 사람을 그 조의 주장으로 정한다. 세 조의 주장이 키가 가장 큰 세 선수일 확률은?
>
> **(A)** $\dfrac{2}{9}$ **(B)** $\dfrac{2}{7}$ **(C)** $\dfrac{9}{28}$ **(D)** $\dfrac{1}{3}$ **(E)** $\dfrac{3}{8}$

핵심 아이디어. 조건을 키가 가장 큰 세 선수가 어느 조에 들어가는지에 대한 조건으로 바꿉시다. 세 주장이 키가 가장 큰 세 선수인 것은 이 세 명이 서로 다른 조에 들어가는 것과 같습니다. 그러면 이 세 명만 따라가면 됩니다.

1단계: 조건 바꾸어 말하기. 키가 가장 큰 세 명이 서로 다른 조에 있으면, 각자 자기 조의 다른 누구보다도 키가 큽니다(자기보다 큰 사람은 나머지 두 명뿐인데, 그들은 다른 조에 있습니다). 따라서 세 명 모두 주장이 됩니다. 그중 두 명이 같은 조에 있으면, 그 두 명 중 한 명만 그 조의 주장이 될 수 있으므로 세 주장이 정확히 키가 가장 큰 세 명일 수 없습니다.

2단계: 한 명씩 배치하기. 색깔마다 3개씩 모두 9개의 자리가 있고, 선수들이 무작위로 자리에 배정된다고 생각합시다. 가장 큰 선수는 어딘가에 들어갑니다. 두 번째로 큰 선수는 남은 8개의 자리 중 하나에 같은 확률로 들어가는데, 그중 6개가 가장 큰 선수의 조 밖에 있으므로 확률은 $\frac{6}{8}$입니다.

세 번째로 큰 선수는 남은 7개의 자리 중 하나에 들어가는데, 아직 아무도 들어가지 않은 색깔의 3개 자리만 가능하므로 확률은 $\frac{3}{7}$입니다.

3단계. 곱하면 $\frac{6}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{18}{56} = \frac{9}{28}$입니다.

주의. 각 선수의 색깔이 독립적으로 $\frac{1}{3}$의 확률로 정해진다고 보면 $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$, 즉 (A)가 나옵니다. 그러나 밴드는 **다시 넣지 않고** 뽑습니다. 밴드 하나를 뽑으면 그 색깔의 밴드가 줄어들므로, 두 번째와 세 번째로 큰 선수가 같은 색깔을 다시 뽑을 가능성은 더 낮아집니다.

정답: (C) $\frac{9}{28}$

---

12 기하

출처: 2021 가을 AMC 10A 14번

다음 연립방정식을 만족하는 실수의 순서쌍 (x, y)의 개수는?

$$x^2 + 3y = 9,$$
$$(|x| + |y| - 4)^2 = 1.$$

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 5 **(E)** 7

핵심 아이디어. 제곱한 값이 1이므로 $|x| + |y| - 4 = \pm 1$, 즉 $|x| + |y| = 3$ 또는 $|x| + |y| = 5$입니다. 절댓값이 있으니 $y \geq 0$인 경우와 $y < 0$인 경우로 나누어 봅시다. 또 $|x|$와 x^2만 등장하므로 $t = |x| \geq 0$으로 놓고 풀어서, 마지막에 $t > 0$인 해는 두 배로 세면 됩니다.

첫째 식에서 $y = 3 - \frac{t^2}{3}$입니다. 따라서 $y \geq 0$인 것은 $t \leq 3$일 때와 같고, $y < 0$인 것은 $t > 3$일 때와 같습니다.

경우 1: $y \geq 0$ ($0 \leq t \leq 3$). 이때 $|y| = y$입니다. $t + y = 3$이면 $t + 3 - \frac{t^2}{3} = 3$에서 $t\left(1 - \frac{t}{3}\right) = 0$이므로 $t = 0$ 또는 $t = 3$입니다. 이로부터 $(0, 3)$, $(3, 0)$, $(-3, 0)$의 세 점을 얻습니다.

$t + y = 5$이면 $t + 3 - \frac{t^2}{3} = 5$에서 $t^2 - 3t + 6 = 0$인데, 판별식이 $9 - 24 < 0$이므로 해가 없습니다.

경우 2: $y < 0$ ($t > 3$). 이때 $|y| = -y = \frac{t^2}{3} - 3$입니다. $t - y = 3$이면 $t + \frac{t^2}{3} - 3 = 3$에서 $t^2 + 3t - 18 = 0$, 즉 $(t + 6)(t - 3) = 0$입니다. 그런데 $t = 3$은 > 3을 만족하지 않으므로 새로운 해는 없습니다.

$t-y=5$이면 $t^2+3t-24=0$에서 $t=\frac{-3+\sqrt{105}}{2}\approx 3.62>3$입니다 (다른 근은 음수입니다). $t>0$이므로 $x=\pm t$로 두 점을 얻습니다.

합계. 순서쌍은 모두 $3+2=5$개입니다.

> **주의.** $y\ge 0$인 경우만 보고 멈추면 3, 즉 C가 됩니다. 포물선 $y=3-\frac{x^2}{3}$은 x축 아래로 내려가서 그곳에서도 바깥쪽 마름모 $|x|+|y|=5$와 만납니다.

정답: (D) 5

---

13 대수

출처: 2020 AMC 10B 15번

> 스티브는 숫자 1, 2, 3, 4, 5를 차례대로 왼쪽에서 오른쪽으로 반복하여 써서 123451234512...로 시작하는 10,000개의 숫자로 이루어진 목록을 만들었다. 그런 다음 그는 이 목록에서 세 번째 숫자마다 지웠고(즉, 왼쪽에서 3번째, 6번째, 9번째, ... 숫자), 이어서 남은 목록에서 네 번째 숫자마다 지웠으며(즉, 남은 것 중 왼쪽에서 4번째, 8번째, 12번째, ... 숫자), 마지막으로 그 시점에 남은 것에서 다섯 번째 숫자마다 지웠다. 그때 2019번째, 2020번째, 2021번째 자리에 있던 세 숫자의 합은?
>
> **(A)** 7 **(B)** 9 **(C)** 10 **(D)** 11 **(E)** 12

핵심 아이디어. 각 목록은 주기적이며, 주기가 p인 목록에서 m번째 숫자마다 지우면 새로운 주기적 목록이 됩니다. 숫자의 패턴과 지우는 리듬이 함께 맞아떨어지는 $\operatorname{lcm}(m,p)$개의 숫자마다 패턴이 반복되기 때문입니다. 그러니 10,000개의 숫자 대신 한 주기만 세 번의 지우기를 거치며 따라가 봅시다.

1단계: 세 번째 숫자마다 지우기. 목록 12345 12345...의 주기는 5입니다. 세 번째 숫자마다 지우므로, 남는 숫자의 패턴은 $\operatorname{lcm}(3,5)=15$개의 숫자마다 반복됩니다. 처음 15개의 숫자 123451234512345에서 3, 6, 9, 12, 15번째 자리(숫자 3, 1, 4, 2, 5)를 지웁니다. 남는 것은 다음 10자리 블록입니다.

$$1245235134.$$

2단계: 네 번째 숫자마다 지우기. 이제 주기가 10이므로, 새 패턴은 $\operatorname{lcm}(4,10)=20$개의 숫자마다 반복됩니다. 블록을 두 번 이어 쓴 12452351341245235134에서 4, 8, 12, 16, 20번째 자리를 지웁니다. 남는 숫자는 다음 15자리 블록을 이룹니다.

$$124235341452513.$$

3단계: 다섯 번째 숫자마다 지우기. 주기는 15이고 $\operatorname{lcm}(5,15)=15$입니다. 124235341452513에서 5, 10, 15번째 자리를 지우면 다음 12자리 블록을 얻습니다.

$$124253415251.$$

4단계: 자리 찾기. 최종 목록은 124253415251이 반복됩니다. $2016=12\cdot 168$이므로 2017–2028번째 자리에는 블록 하나가 온전히 들어 있습니다. 따라서 2019, 2020, 2021번째 자리는 블록의 3번째, 4번째, 5번째 숫자인 4, 2, 5입니다. (최종 목록은 4001개의 숫자로 이루어져 있으므로 이 자리들은 실제로 존재합니다.)

이들의 합은 $4+2+5=11$입니다.

정답: (D) 11

---

14 경우의 수와 확률

출처: 2008 AMC 10B 16번

> 공정한 동전 두 개를 한 번 던진다. 앞면이 하나 나올 때마다 공정한 주사위를 하나씩 던진다. 던진 주사위의 눈의 합이 홀수일 확률은? (단, 주사위를 하나도 던지지 않으면 합은 0이다.)
>
> **(A)** $\frac{3}{8}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{43}{72}$ **(D)** $\frac{5}{8}$ **(E)** $\frac{2}{3}$

핵심 아이디어. 앞면의 개수로 경우를 나눕니다. 주사위를 적어도 하나 던지면 마지막 주사위 하나가 홀짝을 결정하므로, 합이 홀수일 확률은 정확히 $\frac{1}{2}$입니다.

1단계. 앞면의 개수가 0, 1, 2일 확률은 각각 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$입니다.

2단계. 앞면이 없으면 주사위를 던지지 않으므로 합은 0이고, 이는 짝수입니다. 홀수일 확률은 0입니다.

3단계. 앞면이 하나 또는 둘이면, 다른 주사위의 눈이 무엇이든 마지막 주사위는 6개의 면 중 3개에서 홀수, 나머지 3개에서 짝수가 나오고, 마지막 주사위의 홀짝이 바뀌면 전체 합의 홀짝도 바뀝니다. 따라서 합이 홀수일 확률은 $\frac{1}{2}$입니다.

4단계. 모두 합하면 다음과 같습니다.

$$P(\text{홀수}) = \tfrac{1}{4}\cdot 0 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8} = \tfrac{3}{8}.$$

주의. 주사위를 던지지 않는 경우를 잊고 "주사위 눈의 합은 절반의 확률로 홀수"라고 하면 $\frac{1}{2}$, 즉 선택지 (B)가 됩니다. 두 동전이 모두 뒷면일 확률 $\frac{1}{4}$의 경우에는 합이 항상 짝수인 0입니다.

정답: (A) $\frac{3}{8}$

15 기하

출처: 2009 AMC 10B 18번

> 직사각형 $ABCD$에서 $AB = 8$, $BC = 6$이다. 점 M은 대각선 $\overline{AC}$의 중점이고, E는 $\overline{AB}$ 위의 점으로 $\overline{ME} \perp \overline{AC}$이다. $\triangle AME$의 넓이는?
>
> **(A)** $\frac{65}{8}$ **(B)** $\frac{25}{3}$ **(C)** 9 **(D)** $\frac{75}{8}$ **(E)** $\frac{85}{8}$

핵심 아이디어. $\triangle AME$는 M에서 직각이고, 직각삼각형 ABC와 A에서의 각을 공유합니다. 예각 하나를 공유하는 두 직각삼각형은 닮음이므로, ME는 이미 아는 변 AB와 BC로부터 바로 구할 수 있습니다.

1단계. 피타고라스 정리에 의해 $AC = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$이므로 $AM = \frac{10}{2} = 5$입니다.

2단계. 삼각형 AME는 M에서 직각이고, 삼각형 ABC는 B에서 직각입니다. 두 삼각형 모두 $\angle A$($\overline{AB}$와 $\overline{AC}$가 이루는 각)를 포함하므로 $\triangle AME \sim \triangle ABC$이고, AM은 AB에, ME는 BC에 대응합니다. 따라서 다음과 같습니다.

$$\frac{ME}{AM} = \frac{BC}{AB} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \qquad ME = \frac{3}{4} \cdot 5 = \frac{15}{4}.$$

(이때 $AE = \sqrt{5^2 + \left(\frac{15}{4}\right)^2} = \frac{25}{4} < 8$이므로 E는 실제로 변 $\overline{AB}$ 위에 있습니다.)

3단계. 직각삼각형 AME에서 직각을 낀 두 변은 AM과 ME이므로 넓이는 다음과 같습니다.

$$[\triangle AME] = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{15}{4} = \frac{75}{8}.$$

주의. 대응하는 변을 잘못 짝지어 $\frac{ME}{AM} = \frac{AB}{BC} = \frac{8}{6}$로 쓰면 $ME = \frac{20}{3}$, 넓이는 $\frac{50}{3}$이 되는데, 이것은 선택지에 없습니다. $\triangle AME$에서 $\angle A$의 대변은 ME이고, $\triangle ABC$에서는 BC입니다.

정답: (D) $\frac{75}{8}$

16 기하

출처: 2024 AMC 10B 19번

다음 표에서 각 물음표를 "가능" 또는 "불가능"으로 바꾸어, 주어진 기울기를 갖는 수직이 아닌 직선이 주어진 개수의 격자점(두 좌표가 모두 정수인 점)을 포함할 수 있는지를 나타내려고 한다. 12개의 칸 중 "가능"인 것은 몇 개인가?

	zero	exactly one	exactly two	more than two
zero slope	?	?	?	?
nonzero rational slope	?	?	?	?
irrational slope	?	?	?	?

(A) 4 **(B)** 5 **(C)** 6 **(D)** 7 **(E)** 9

핵심 아이디어. 직선 위의 격자점 **두** 개가 무엇을 강제하는지 생각해 봅시다. 두 격자점 사이의 기울기는 정수의 비이므로 유리수입니다. 이 사실 하나로 표가 "유리수" 행들과 "무리수" 행으로 나뉩니다.

1단계. 무리수 기울기. 이런 직선이 두 격자점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 포함한다면 기울기는 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$로 유리수가 됩니다. 따라서 격자점은 **많아야 하나**이고, "정확히 두 개"(exactly two)와 "두 개보다 많음"(more than two)은 불가능입니다. 나머지 두 칸은 모두 실제로 일어납니다.

- $y = \sqrt{2}\,x$는 $(0,0)$을 포함하고, 다른 격자점은 포함하지 않습니다($x \neq 0$일 때 y가 정수이면 $\sqrt{2} = \frac{y}{x}$가 유리수가 되기 때문입니다). 즉 "정확히 하나"(exactly one)입니다.
- $y = \sqrt{2}\,x + \frac{1}{2}$은 격자점을 하나도 포함하지 않습니다. $x = 0$이면 $y = \frac{1}{2}$이고, $x \neq 0$이면 $\sqrt{2} = \frac{y-1/2}{x}$가 유리수가 되기 때문입니다. 즉 "없음"(zero)입니다.

2단계. 유리수 기울기(영인 경우 포함). 기울기를 $\frac{p}{q}$로 씁니다. 여기서 p, q는 정수이고 $q > 0$입니다(기울기가 영이면 $p = 0,\ q = 1$). 직선이 격자점 (x_0, y_0) 하나를 포함한다면, 오른쪽으로 q, 위로 p만큼 움직여도 직선 위에 있으므로 모든 정수 k에 대해 $(x_0 + kq,\ y_0 + kp)$도 포함합니다. 즉 격자점이 무수히 많습니다. 따라서 "정확히 하나"와 "정확히 두 개"는 불가능입니다.

각 행에서 나머지 두 칸은 모두 실제로 일어납니다. $y = 0$과 $y = x$는 격자점을 무수히 많이 포함하고, $y = \frac{1}{2}$과 $y = x + \frac{1}{2}$은 격자점을 하나도 포함하지 않습니다(y좌표가 정수에 $\frac{1}{2}$을 더한 값이 되기 때문입니다).

3단계. 세 행 모두 "가능"인 칸이 정확히 두 개씩이므로, 모두 $2 + 2 + 2 = 6$개입니다.

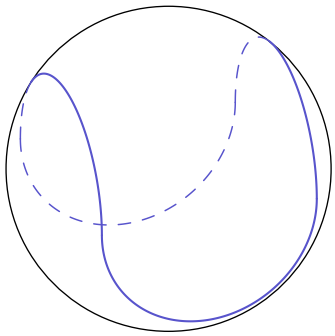
주의. 기울기가 유리수인 직선이 언제나 격자점을 지난다고 생각하면 안 됩니다. 두 유리수 행에서 "없음" 칸($y = \frac{1}{2}$ 같은 직선)을 놓치면 $1 + 1 + 2 = 4$, 즉 선택지 (A)가 됩니다.

정답: (C) 6

17 기하

출처: 2023 AMC 10B 20번

반지름이 2인 구의 표면 위에 그림과 같이 합동인 반원 네 개를 그려, 구의 표면을 합동인 두 영역으로 나누는 닫힌 곡선을 만들었다. 이 곡선의 길이가 $\pi\sqrt{n}$일 때, n의 값은?



(A) 32 **(B)** 12 **(C)** 48 **(D)** 36 **(E)** 27

핵심 아이디어. 이 곡선은 테니스공의 솔기처럼 생겼습니다. 각 조각은 구 위에 있는 작은 원의 절반이므로 길이는 $\pi \times$ (반지름)입니다. 반지름은 반원의 두 끝점 사이의 직선 거리, 즉 그 원의 지름으로부터 구합니다.

1단계. 네 반원은 네 점에서 만납니다. 네 호가 합동이고 두 영역도 합동이므로, 그림처럼 이 이음점들은 대원(반지름이 2인 "적도") 위에 같은 간격으로 놓여 있습니다. 원 위에 같은 간격으로 놓인 네 점은 정사각형을 이루고, 이웃한 두 점은 중심 O에서 볼 때 90° 떨어져 있습니다.

2단계. 각 반원은 이웃한 두 이음점, 예를 들어 P와 Q를 잇습니다. 반원의 두 끝점은 그 원의 지름의 양 끝이므로, 그 원의 지름은 선분 PQ입니다. $OP = OQ = 2$이고 $\angle POQ = 90^\circ$이므로 다음을 얻습니다.

$$PQ = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

따라서 각 반원의 반지름은 $\sqrt{2}$입니다.

3단계. **이런 원이 실제로 구 위에 있는지 확인해 봅시다.** $\overline{PQ}$의 중점 M은 O로부터 $\sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$ 만큼 떨어져 있습니다. $\overline{PQ}$를 지나고 $\overline{OM}$에 수직인 평면은 구와 만나서, M을 중심으로 하고 반지름이 $\sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$인 원을 만듭니다. 이것이 바로 지름이 $\overline{PQ}$인 원입니다.

4단계. 반원 하나의 길이는 $\frac{1}{2} \cdot 2\pi\sqrt{2} = \pi\sqrt{2}$이므로, 곡선의 길이는 다음과 같습니다.

$$4\pi\sqrt{2} = \pi\sqrt{16 \cdot 2} = \pi\sqrt{32}.$$

따라서 $n = 32$입니다.

주의. 반원은 대원의 절반이 **아닙니다**. 각 반원의 반지름을 2로 쓰면 $4 \cdot 2\pi = 8\pi = \pi\sqrt{64}$가 되는데, 이것은 선택지에 없습니다.

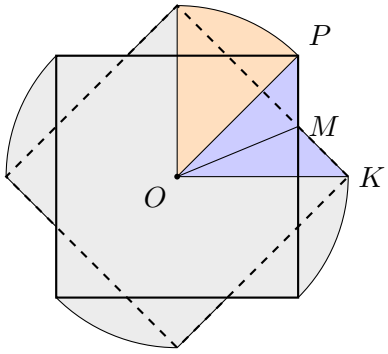
정답: (A) 32

18 기하

출처: 2013 AMC 10A 20번

> 단위정사각형을 그 중심을 기준으로 45° 회전시킨다. 정사각형의 내부가 쓸고 지나간 영역의 넓이는?
>
> **(A)** $1-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{4}$ **(B)** $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$ **(C)** $2-\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}$ **(D)** $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{4}$ **(E)** $1+\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\pi}{8}$

핵심 아이디어. 중심 O를 기준으로 평면을 45°씩 여덟 개의 영역으로 나눕시다. 그중 네 영역에서는 정사각형의 꼭짓점 하나가 원호를 그리며 지나가고, 나머지 네 영역에서는 꼭짓점이 지나가지 않으므로 가장 멀리 닿는 곳은 처음 정사각형이나 마지막 정사각형이 정합니다. 그러면 각 영역은 단순한 부채꼴이거나 삼각형 두 개가 됩니다.



O를 원점에 놓고 처음 정사각형의 변이 $x=\pm\frac{1}{2}$, $y=\pm\frac{1}{2}$ 위에 있도록 한 뒤(실선), 시계 반대 방향으로 회전시킵니다. 마지막 정사각형은 점선입니다. 각 꼭짓점은 O에서 $\frac{\sqrt{2}}{2}$만큼 떨어져 있습니다.

1단계: 네 개의 부채꼴. 꼭짓점 $P=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$의 각은 45°이고, 이 꼭짓점은 반지름이 $\frac{\sqrt{2}}{2}$인 원을 따라 각 90°까지 움직입니다. 따라서 45°부터 90°까지의 영역은 중심각이 45°인 온전한 부채꼴(주황색)이고, 그 넓이는

$$\frac{1}{8}\cdot\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{\pi}{16}.$$

네 꼭짓점 모두 마찬가지이므로 합은 $4\cdot\frac{\pi}{16}=\frac{\pi}{4}$입니다.

2단계: 나머지 영역. 0°부터 45°까지의 영역에서는 꼭짓점이 지나가지 않습니다. 고정된 한 방향으로 재면, 그 방향이 꼭짓점 쪽으로 갈수록 O에서 변까지의 거리가 커지므로, 정사각형이 가장 멀리 닿는 것은 회전의 처음이나 마지막입니다. 따라서 이 영역은 두 정사각형의 합집합(파란색)입니다. 즉 처음 정사각형의 삼각형 OMP와 마지막 정사각형의 삼각형 OKM으로 이루어지며, M은 두 정사각형의 변이 22.5° 이등분선 위에서 만나는 점입니다.

마지막 정사각형에서 K를 지나는 변은 직선 $x+y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 위에 있으므로, 이 변이 $x=\frac{1}{2}$과 만나는 점 M의 높이는 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$입니다. 삼각형 OMP는 직선 $x=\frac{1}{2}$ 위의 밑변 $MP=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}-1}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$와 높이 $\frac{1}{2}$을 가지므로 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{8}$입니다. 대칭성에 의해(이등분선에 대하여 대칭이동) OKM의 넓이도 같으므로, 이 영역의 넓이는 $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$입니다. 이런 영역이 네 개이므로 $4\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{4}=2-\sqrt{2}$입니다.

3단계. 따라서 (쓸고 지나간 전체 넓이) $= 2 - \sqrt{2} + \dfrac{\pi}{4}$ 입니다.

주의. 꼭짓점이 지나가지 않는 각 영역에서 처음 정사각형의 삼각형만 세면(마지막 정사각형도 튀어나온다는 것을 잊으면) $4 \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{8} + \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4}$, 즉 (A)가 나옵니다.

정답: (C) $2 - \sqrt{2} + \dfrac{\pi}{4}$

---

19 정수론

출처: 2018 AMC 10A 22번

양의 정수 a, b, c, d가 다음을 만족한다.

$$\gcd(a,b) = 24,$$
$$\gcd(b,c) = 36,$$
$$\gcd(c,d) = 54,$$

그리고

$$70 < \gcd(d,a) < 100.$$

다음 중 반드시 a의 약수인 것은?

(A) 5 **(B)** 7 **(C)** 11 **(D)** 13 **(E)** 17

핵심 아이디어. 최대공약수는 소수별로 결정됩니다. 최대공약수에 들어 있는 각 소수의 지수는 두 수의 지수 중 **작은** 쪽입니다. 주어진 최대공약수에는 소수 2와 3만 나오므로, a, b, c, d를 차례로 따라가며 이 두 소수의 지수를 추적합니다. $\gcd(d,a)$에서 그 밖에 남는 부분은 새로운 소수에서 와야 합니다.

1단계: 소인수분해. $24 = 2^3 \cdot 3$, $36 = 2^2 \cdot 3^2$, $54 = 2 \cdot 3^3$ 입니다.

2단계: a에 들어 있는 소수 3. $\gcd(b,c) = 36$에서 b는 3을 적어도 두 개 가집니다. 그런데 $\gcd(a,b) = 24$에는 3이 하나뿐이므로 두 지수 중 작은 쪽이 1입니다. b의 지수가 적어도 2이므로 a는 3을 정확히 하나 가집니다. 또한 a는 2를 적어도 세 개 가집니다.

3단계: d에 들어 있는 소수 2. $\gcd(b,c) = 36$에서 c는 2를 적어도 두 개 가집니다. 그런데 $\gcd(c,d) = 54$에는 2가 하나뿐이므로 d는 2를 정확히 하나 가집니다. 또한 d는 3을 적어도 세 개 가집니다.

4단계: $\gcd(d,a)$. 2의 지수는 $\min(1, \geq 3) = 1$이고 3의 지수는 $\min(\geq 3, 1) = 1$입니다. 따라서 $\gcd(d,a) = 6n$이고, 여기서 n은 2로도 3으로도 나누어떨어지지 않습니다.

5단계. $70 < 6n < 100$에서 $n \in \{12, 13, 14, 15, 16\}$입니다. 이 중 2와 3을 인수로 갖지 않는 것은 13뿐입니다. 따라서 $\gcd(d,a) = 78$이고, 13은 a의 약수입니다.

나머지 선택지는 반드시 약수인 것은 아닙니다. $a = 312 = 2^3 \cdot 3 \cdot 13$, $b = 72$, $c = 108$, $d = 702 = 2 \cdot 3^3 \cdot 13$으로 잡아 봅시다. 그러면 네 최대공약수는 $24, 36, 54, 78$이고, 312는 5, 7, 11, 17 중 어느 것으로도 나누어떨어지지 않습니다.

주의. d가 2를 **정확히** 하나 가진다는 사실을 잊으면 $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$도 $\gcd(d, a)$가 될 수 있는 것처럼 보여서, 7, 즉 (B)를 고를 수 있습니다.

정답: (D) 13

---

20 경우의 수와 확률

출처: 2011 AMC 10A 22번

> 볼록오각형 $ABCDE$의 각 꼭짓점에 색을 하나씩 칠하려고 한다. 사용할 수 있는 색은 6가지이고, 각 대각선의 양 끝은 서로 다른 색이어야 한다. 가능한 서로 다른 색칠 방법은 몇 가지인가?
>
> **(A)** 2520 **(B)** 2880 **(C)** 3120 **(D)** 3250 **(E)** 3750

핵심 아이디어. 오각형에서 각 꼭짓점은 이웃하지 않은 두 꼭짓점과 대각선으로 연결됩니다. 따라서 두 꼭짓점이 같은 색일 수 있는 것은 **이웃할 때뿐**이고, 문제는 꼭짓점들을 같은 색끼리의 묶음으로 나누는 방법을 세는 것으로 바뀝니다.

1단계. 같은 색 묶음의 모양. 꼭짓점들을 색에 따라 묶습니다. 한 묶음 안의 어떤 두 꼭짓점도 서로 이웃해야 합니다. 세 꼭짓점이 같은 색일 수는 없는데, 오각형의 어떤 세 꼭짓점을 골라도 그중 두 개는 이웃하지 않기 때문입니다. 따라서 각 묶음은 꼭짓점 하나이거나 이웃한 두 꼭짓점(한 변)이고, 서로 다른 묶음은 서로 다른 색을 받습니다. 거꾸로, 이런 묶음에 서로 다른 색을 칠하면 언제나 조건을 만족합니다. 대각선의 양 끝은 결코 같은 묶음에 속하지 않기 때문입니다.

2단계. 경우: 다섯 꼭짓점이 모두 혼자. 모든 색이 다른 경우로, $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$가지입니다.

3단계. 경우: 쌍이 하나. 변을 고르는 방법은 5가지입니다. 그러면 4개의 묶음에 서로 다른 색을 칠해야 하므로 $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$가지입니다. 합하면 $5 \cdot 360 = 1800$가지입니다.

4단계. 경우: 쌍이 둘. 두 변은 꼭짓점을 공유하면 안 됩니다. 혼자 남는 꼭짓점을 고르면(5가지), 나머지 네 꼭짓점은 한 줄로 이어진 경로를 이루고, 이를 두 변으로 나누는 방법은 정확히 한 가지입니다. 그러면 3개의 묶음에 서로 다른 색을 칠하므로 $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$가지입니다. 합하면 $5 \cdot 120 = 600$가지입니다. (쌍이 셋이려면 꼭짓점이 여섯 개 필요합니다.)

5단계. 모두 더하면 $720 + 1800 + 600 = 3120$입니다.

다른 풀이. 대각선들은 하나의 닫힌 고리 $A-C-E-B-D-A$를 이루고, 이 고리에서 이웃한 꼭짓점끼리 색이 달라야 합니다. 고리를 따라 A, C, E, B, D 순서로, 각 꼭짓점을 바로 앞 꼭짓점과 다른 색으로 칠하면 $6 \cdot 5^4 = 3750$가지입니다. 하지만 이것은 마지막 조건 $D \neq A$를 무시한 것입니다. $D = A$인 나쁜 경우는 정확히 더 짧은 고리 $A-C-E-B-A$에서 이웃끼리 색이 다른 색칠이고, 같은 방법으로 그 수는 $6 \cdot 5^3 - 6 \cdot 5 \cdot 4 = 750 - 120 = 630$입니다($A, C, E, B$ 경로의 색칠에서 $B = A$인 것, 즉 A, C, E를 세 가지 서로 다른 색으로 칠한 것을 뺀 값). 따라서 답은 $3750 - 630 = 3120$입니다.

주의. 고리를 따라 $6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3750$으로 세고, 마지막 꼭짓점이 첫 꼭짓점과도 달라야 한다는 것을 잊으면 (E)가 됩니다.

정답: (C) 3120

---

21 정수론

출처: 2011 AMC 10B 23번

2011^{2011}의 백의 자리 숫자는?

(A) 1 **(B)** 4 **(C)** 5 **(D)** 6 **(E)** 9

핵심 아이디어. 백의 자리 숫자는 마지막 세 자리에만 달려 있으므로 1000으로 나눈 나머지를 생각합니다. 그러면 2011은 $11 = 10+1$처럼 행동하고, $10+1$의 거듭제곱은 이항정리를 쓰기에 딱 알맞습니다. 10^3 이상을 포함하는 항은 1000으로 나눈 나머지에서 모두 사라지기 때문입니다.

1단계: 밑을 간단히 하기. 곱의 마지막 세 자리는 곱하는 수들의 마지막 세 자리에만 달려 있습니다. $2011 \equiv 11 \pmod{1000}$이므로

$$2011^{2011} \equiv 11^{2011} \pmod{1000}.$$

2단계: 전개하기. 이항정리에 의하여

$$11^{2011} = (1+10)^{2011} = 1 + \binom{2011}{1}10 + \binom{2011}{2}10^2 + \binom{2011}{3}10^3 + \cdots.$$

$\binom{2011}{3}10^3$부터의 모든 항은 1000의 배수이므로, 처음 세 항만 중요합니다.

3단계: 세 항을 1000으로 나눈 나머지.

- $\binom{2011}{1} \cdot 10 = 20110 \equiv 110.$
- $\binom{2011}{2} = \dfrac{2011 \cdot 2010}{2} = 2011 \cdot 1005 = 2021055.$ 여기에 100을 곱하면 이 수의 일의 자리 숫자 5만 백의 자리에 남습니다. 즉 $2021055 \cdot 100 \equiv 500.$

더하면 $11^{2011} \equiv 1 + 110 + 500 = 611 \pmod{1000}$입니다.

4단계. 2011^{2011}의 마지막 세 자리는 611이므로 백의 자리 숫자는 6입니다.

주의. 전개를 두 항에서 멈추면 $1 + 20110 = 20111 \equiv 111$이 되어 백의 자리 숫자가 1, 즉 (A)가 됩니다. 10^2 항도 백의 자리에 영향을 주므로, 버릴 수 있는 것은 10^3 이상의 항뿐입니다.

정답: (D) 6

22 경우의 수와 확률

출처: 2022 AMC 10A 24번

> 숫자 $0, 1, 2, 3, 4$로 만든 길이가 5인 문자열 중에서, 각 $j \in \{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 j보다 작은 숫자가 적어도 j개 들어 있는 것은 몇 개인가?
>
> (예를 들어 02214는 1보다 작은 숫자가 적어도 1개, 2보다 작은 숫자가 적어도 2개, 3보다 작은 숫자가 적어도 3개, 4보다 작은 숫자가 적어도 4개 들어 있으므로 이 조건을 만족시킨다. 문자열 23404는 2보다 작은 숫자가 적어도 2개 들어 있지는 않으므로 이 조건을 만족시키지 않는다.)
>
> **(A)** 500 **(B)** 625 **(C)** 1089 **(D)** 1199 **(E)** 1296

핵심 아이디어. "j보다 작은 항목이 적어도 j개"라는 꼴의 조건은 일방통행 주차장에서 모든 차가 자리를 찾기 위한 조건과 정확히 같습니다. 문자열을 주차 희망 칸으로 바꾸어 생각하면, 깔끔한 원형 대칭이 개수 세기를 대신해 줍니다.

1단계: 주차 모형. 일방통행 길에 주차 칸 $0, 1, 2, 3, 4$가 있습니다. 차 다섯 대가 차례로 도착하고, k번째 차는 k번째 숫자가 나타내는 칸을 원합니다. 그 칸이 비어 있으면 거기에 주차하고, 아니면 오른쪽으로 가다가 처음 나오는 빈칸에 주차합니다. 그런 칸이 없으면 주차에 실패합니다. 모든 차가 주차하는 문자열을 **좋은** 문자열이라 부릅시다.

2단계: 좋은 문자열이 바로 구하는 문자열입니다. 모든 차가 주차하면 칸 $0, \dots, j-1$이 모두 차 있습니다. 차는 오른쪽으로만 움직이므로, 이 j개의 칸은 번호가 $< j$인 칸을 원한 차들이 채운 것입니다. 즉 j보다 작은 숫자가 적어도 j개 있습니다. 거꾸로, 어떤 차가 주차에 실패했다고 합시다. 그러면 어떤 칸 k가 끝까지 비어 있습니다. 번호가 $\le k$인 칸을 원한 차는 늦어도 칸 k에서는 멈췄을 것이므로, 이런 차들은 모두 칸 $0, \dots, k-1$에 주차했고 그 수는 많아야 k대입니다. $k = 4$이면 다섯 개의 숫자 중 ≤ 4인 것이 많아야 4개라는 뜻인데, 이는 거짓입니다. 따라서 $k \le 3$이고, $k+1$보다 작은 숫자가 많아야 k개이므로 $j = k+1$일 때 조건이 깨집니다.

3단계: 원을 따라 돌기. 칸 5를 추가하고 길을 구부려 원 $0 \to 1 \to \cdots \to 5 \to 0$으로 만듭시다. 이제 각 숫자가 $0, \dots, 5$ 중 아무것이나 될 수 있게 하면 문자열은 6^5개입니다. 칸이 여섯 개이고 차가 다섯 대이므로 모든 차가 주차하고, 정확히 한 칸이 비게 됩니다.

모든 숫자에 1을 더하면($5+1$은 0으로 읽습니다) 주차 상태 전체가 한 칸씩 돌아가므로, 빈칸도 한 칸 이동합니다. 따라서 이렇게 반복해서 이동시켜 얻는 여섯 개의 문자열은 빈칸의 위치가 모두 다르고, 각 위치가 한 번씩 나옵니다. 그러므로 전체 문자열 중 정확히 6분의 1이 칸 5를 비워 둡니다.

$$\frac{6^5}{6} = 6^4 = 1296.$$

4단계: 다시 직선 길로. 칸 5가 비어 있으면 칸 5를 원한 차도, 그 칸을 지나간 차도 없으므로 숫자는 모두 $0, \dots, 4$ 중에 있고, 차들은 직선 길에서와 똑같이 주차한 것입니다. 즉 그 문자열은 좋은 문자열입니다. 거꾸로, 좋은 문자열은 칸 5를 사용하지도, 지나가지도 않습니다. 따라서 좋은 문자열은 1296개입니다.

정답: (E) 1296

23 대수

출처: 2012 AMC 10A 24번

> 양의 정수 a, b, c가 $a \geq b \geq c$를 만족하고, 다음 두 등식이 성립한다.
>
> $$a^2 - b^2 - c^2 + ab = 2011$$
>
> 그리고
>
> $$a^2 + 3b^2 + 3c^2 - 3ab - 2ac - 2bc = -1997.$$
>
> a의 값은?
>
> **(A)** 249 **(B)** 250 **(C)** 251 **(D)** 252 **(E)** 253

핵심 아이디어. 식은 두 개, 미지수는 세 개이고 답은 정수입니다. 두 식을 결합해 정수해가 아주 적은 식을 만들어 봅시다. 두 식을 더하면 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ 꼴의 "섞인" 항들만 남는데, 이것은 제곱의 합이 모습을 바꾼 유명한 식입니다.

1단계. 더하기. 두 식을 더하면 다음과 같습니다.

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc = 2011 - 1997 = 14.$$

좌변은 $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2$으로 다시 묶을 수 있으므로 다음을 얻습니다.

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 = 14.$$

2단계. 제곱수. 14 이하의 제곱수는 $0, 1, 4, 9$입니다. 14를 이 중 세 개의 합으로 나타내는 방법은 $9+4+1$ 뿐입니다. $a \geq b \geq c$이므로 세 차는 모두 음이 아니고, $a - c = (a-b) + (b-c)$가 가장 크므로 $a - c = 3$, $\{a-b,\ b-c\} = \{1, 2\}$입니다.

3단계. $a-b=1, b-c=2$인 경우. 이때 $b = a-1$, $c = a-3$이므로 첫 번째 식은

$$a^2 - (a-1)^2 - (a-3)^2 + a(a-1) = 7a - 10 = 2011,$$

즉 $7a = 2021$이 됩니다. 그런데 $2021 = 7 \cdot 288 + 5$이므로 a는 정수가 아닙니다.

4단계. $a-b=2, b-c=1$인 경우. 이때 $b = a-2$, $c = a-3$이므로

$$a^2 - (a-2)^2 - (a-3)^2 + a(a-2) = 8a - 13 = 2011,$$

즉 $8a = 2024$이고 $a = 253$, $b = 251$, $c = 250$입니다.

확인: $253^2 - 251^2 - 250^2 + 253 \cdot 251 = 2011$이고, 두 번째 식의 값도 -1997입니다(두 식의 합이 성립하므로 당연히 그렇습니다).

정답: (E) 253

24 정수론

출처: 2016 AMC 10A 25번

> 다음을 만족시키는 양의 정수의 순서쌍 (x, y, z)는 몇 개인가
>
> $$\operatorname{lcm}(x, y) = 72,$$
> $$\operatorname{lcm}(x, z) = 600,$$
>
> 그리고
>
> $$\operatorname{lcm}(y, z) = 900?$$
>
> **(A)** 15 **(B)** 16 **(C)** 24 **(D)** 27 **(E)** 64

핵심 아이디어. 최소공배수는 소수마다 더 큰 지수를 택합니다. 그러니 모두 소인수분해하고, 문제를 소수마다 하나씩 작고 독립적인 퍼즐로 나눈 뒤 경우의 수를 곱합시다.

1단계: 소인수분해.

$$72 = 2^3 \cdot 3^2, \qquad 600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2, \qquad 900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2.$$

다른 소수는 나타나지 않으므로 x, y, z는 2, 3, 5만을 소인수로 가집니다.

2단계: 소수 5. $\operatorname{lcm}(x, y) = 72$는 인수 5를 갖지 않으므로 x와 y 모두 5를 인수로 갖지 않습니다. 그러면 $\operatorname{lcm}(x, z)$가 5^2을 가지려면 z가 정확히 5^2을 가져야 합니다. 경우는 한 가지입니다.

3단계: 소수 2. x, y, z에서 2의 지수를 각각 a, c, e라 합시다. $\max(a, c) = 3$, $\max(a, e) = 3$, $\max(c, e) = 2$가 성립해야 합니다. 마지막 조건에서 $c \le 2$, $e \le 2$이므로, 첫째 조건에 의해 $a = 3$이어야 합니다(그러면 둘째 조건도 성립합니다). 이제 $\{0, 1, 2\}$에서 $\max(c, e) = 2$인 쌍 (c, e)를 세면 됩니다. 전체 $3^2 = 9$쌍에서 둘 다 1 이하인 $2^2 = 4$쌍을 빼면 5가지입니다.

4단계: 소수 3. 지수를 각각 b, d, f라 합시다. $\max(b, d) = 2$, $\max(b, f) = 1$, $\max(d, f) = 2$가 성립해야 합니다. 가운데 조건에서 $b \le 1$, $f \le 1$이므로, 첫째 조건에 의해 $d = 2$입니다(그러면 셋째 조건도 성립합니다). $\{0, 1\}$에서 $\max(b, f) = 1$인 쌍 (b, f)는 $4 - 1 = 3$가지입니다.

5단계: 곱하기. 소수들은 서로 독립이므로 순서쌍의 개수는 $1 \cdot 5 \cdot 3 = 15$입니다.

주의. "$\max(c, e) = 2$"를 "$c = 2$(3가지) 또는 $e = 2$(3가지)"로 세면 $(2, 2)$를 두 번 세어 6이 됩니다. 3의 지수도 똑같이 세면 4가 됩니다. 곱 $6 \cdot 4 = 24$는 선택지 (C)입니다.

정답: (A) 15

25 경우의 수와 확률

출처: 2019 AMC 10B 25번

> 0과 1로 이루어진 길이가 19인 수열 중에서 0으로 시작하고, 0으로 끝나며, 연속한 두 개의 0을 포함하지 않고, 연속한 세 개의 1을 포함하지 않는 것은 몇 개인가?
>
> **(A)** 55 **(B)** 60 **(C)** 65 **(D)** 70 **(E)** 75

핵심 아이디어. "연속하지 않는다"는 두 조건은 이웃한 두 0 사이에 무엇이 올 수 있는지를 정확히 알려줍니다. 1 하나 또는 1 두 개뿐입니다. 따라서 수열은 몇 가지 블록으로 만들어지고, 수열을 세는 문제는 블록을 배열하는 방법을 세는 문제가 됩니다.

1단계. 블록으로 나누기. 두 0이 이웃하지 않으므로 연속한 두 0 사이에는 1이 적어도 하나 있습니다. 세 1이 이웃하지 않으므로 그 개수는 많아야 두 개입니다. 수열은 0으로 시작하고 끝나므로 다음과 같은 모양입니다.

$$0\ [1 \text{ 또는 } 11]\ 0\ [1 \text{ 또는 } 11]\ 0 \cdots 0\ [1 \text{ 또는 } 11]\ 0.$$

다시 말해, 수열은 0 하나 뒤에 블록들이 이어진 것이고, 각 블록은 10 또는 110입니다. 거꾸로, 이런 블록들을 어떻게 이어 붙여도 조건을 만족하는 수열이 됩니다.

2단계. 블록 세기. 블록 110이 x개, 블록 10이 y개라 하면 길이에 대해 다음이 성립합니다.

$$1 + 3x + 2y = 19, \qquad \text{따라서} \qquad 3x + 2y = 18.$$

$3x = 18 - 2y$는 짝수이므로 x는 짝수이고, 다음을 얻습니다.

$$(x, y) = (0, 9),\ (2, 6),\ (4, 3),\ (6, 0).$$

3단계. 블록 배열하기. $x + y$개의 블록을 한 줄로 놓을 때 110이 들어갈 자리 x개를 고르는 방법은 $\binom{x+y}{x}$가지입니다. 네 경우를 모두 더하면 다음과 같습니다.

$$\binom{9}{0} + \binom{8}{2} + \binom{7}{4} + \binom{6}{6} = 1 + 28 + 35 + 1 = 65.$$

다른 풀이. 길이가 n인 (0으로 시작하고 끝나는) 조건을 만족하는 수열의 개수를 a_n이라 합시다. 마지막 0 앞에는 1 또는 11이 있고, 그 앞에는 길이가 $n-2$ 또는 $n-3$인 조건을 만족하는 수열의 끝을 이루는 0이 옵니다. 따라서 다음이 성립합니다.

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-3}, \qquad a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = 1.$$

그러면 $a_4, a_5, \ldots, a_{19}$는 차례로 다음과 같습니다.

$$1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37, 49, 65.$$

정답: (C) 65