AMC 10

제 21 회

하프 모의고사

해설

정답표 • 출처 • 단계별 풀이

10문항 모두 AMC 10 기출(2000–2025)의 13–23번 문항에서 가져와 원래 번호 순서대로 배열한 것입니다. 원문 © Mathematical Association of America.

정답표와 출처

번호	정답	출처	영역
1	**D**	2016 AMC 10B 13번	대수
2	**C**	2011 AMC 10B 14번	기하
3	**B**	2021 AMC 10B 15번	대수
4	**D**	2022 AMC 10A 17번	정수론
5	**C**	2007 AMC 10A 18번	기하
6	**C**	2019 AMC 10B 19번	정수론
7	**A**	2010 AMC 10A 21번	대수
8	**C**	2008 AMC 10B 22번	경우의 수와 확률
9	**E**	2022 AMC 10B 22번	기하
10	**D**	2021 가을 AMC 10B 23번	경우의 수와 확률

1 대수

출처: 2016 AMC 10B 13번

> 어느 해 메가폴리스 병원의 다태아 출생 통계는 다음과 같았다. 쌍둥이, 세쌍둥이, 네쌍둥이로 태어난 아기는 모두 1000명이었다. 세쌍둥이의 쌍 수는 네쌍둥이의 쌍 수의 네 배였고, 쌍둥이의 쌍 수는 세쌍둥이의 쌍 수의 세 배였다. 이 1000명의 아기 중 네쌍둥이로 태어난 아기는 몇 명인가?
>
> **(A)** 25 **(B)** 40 **(C)** 64 **(D)** 100 **(E)** 160

핵심 아이디어. 모든 것이 네쌍둥이의 쌍 수를 기준으로 설명되어 있으므로, 그것을 q라 하고 나머지를 q로 나타냅니다. 그다음 쌍이 아니라 **아기**를 셉니다. 예를 들어 쌍둥이 한 쌍은 아기 2명입니다.

1단계: 쌍 수 세기. 네쌍둥이의 쌍 수를 q라 합시다. 세쌍둥이는 그 네 배이므로 $4q$쌍입니다. 쌍둥이는 세쌍둥이의 세 배이므로 $3 \cdot 4q = 12q$쌍입니다.

2단계: 아기 수 세기. 쌍둥이에서 $2 \cdot 12q = 24q$명, 세쌍둥이에서 $3 \cdot 4q = 12q$명, 네쌍둥이에서 $4 \cdot q = 4q$명의 아기가 나옵니다. 모두 합하면

$$24q + 12q + 4q = 40q = 1000,$$

이므로 $q = 25$입니다.

3단계: 실제 질문에 답하기. 네쌍둥이는 25**쌍**이고 한 쌍에 아기가 4명이므로, 네쌍둥이로 태어난 아기는 $4 \cdot 25 = 100$명입니다.

확인: 쌍둥이 $12 \cdot 25 = 300$쌍(아기 600명), 세쌍둥이 100쌍(아기 300명), 네쌍둥이 25쌍(아기 100명)이고 $600 + 300 + 100 = 1000$입니다. ✓

주의. $q = 25$에서 멈추고 **(A)**를 고르는 실수. 이것은 네쌍둥이의 **쌍** 수이고, 문제는 아기 수를 묻고 있습니다.

정답: (D) 100

2 기하

출처: 2011 AMC 10B 14번

> 직사각형 모양의 주차장의 대각선의 길이는 25 미터이고, 넓이는 168 제곱미터이다. 이 주차장의 둘레의 길이는 몇 미터인가?
>
> **(A)** 52 **(B)** 58 **(C)** 62 **(D)** 68 **(E)** 70

핵심 아이디어. 둘레를 구하는 데에는 l과 w 각각의 값이 아니라 $l+w$만 필요합니다. 대각선에서 l^2+w^2을, 넓이에서 lw를 얻을 수 있고, $(l+w)^2 = l^2+2lw+w^2$은 바로 이 두 값을 결합합니다.

1단계. 두 변의 길이를 l과 w라 합시다. 피타고라스 정리에 의해 $l^2+w^2 = 25^2 = 625$입니다. 넓이에서 $lw = 168$입니다.

2단계. 그러면 다음이 성립합니다.

$$(l+w)^2 = l^2+w^2+2lw = 625 + 2\cdot 168 = 625+336 = 961 = 31^2.$$

$l+w>0$이므로 $l+w = 31$입니다.

3단계. 둘레의 길이는 $2(l+w) = 2\cdot 31 = 62$입니다.

주의. $l+w=31$에서 멈추는 실수. 이것은 둘레의 절반일 뿐이며 선택지에도 없습니다. 두 배를 해야 합니다.

다른 풀이. 25는 7–24–25 직각삼각형의 빗변이고, $7\cdot 24 = 168$은 넓이와 일치합니다. 따라서 주차장은 가로 7, 세로 24인 직사각형이고, 둘레의 길이는 $2(7+24) = 62$입니다.

정답: (C) 62

3 대수

출처: 2021 AMC 10B 15번

> 실수 x가 다음 방정식을 만족시킨다.
>
> $$x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}.$$
>
> $x^{11} - 7x^7 + x^3$의 값은?
>
> **(A)** -1 **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** 2 **(E)** $\sqrt{5}$

핵심 아이디어. 지수 $11, 7, 3$은 7을 중심으로 같은 간격으로 놓여 있으므로 x^7을 묶어 냅니다. 그러면 식은 $x^7\left(x^4 - 7 + \frac{1}{x^4}\right)$이 됩니다. $x^4 + \frac{1}{x^4}$ 같은 식은 $x + \frac{1}{x}$을 거듭 제곱하면 나옵니다.

1단계: 묶어 내기. $x = \frac{\sqrt{5}\pm 1}{2}$에서 x^{11}을 직접 계산하는 것은 고통스러우니, 대신 식의 구조를 봅시다. 지수 11과 3은 7에서 각각 4만큼 떨어져 있으므로, x^7을 묶어 내면 x^4과 x^{-4}이 남습니다.

$$x^{11} - 7x^7 + x^3 = x^7\left(x^4 - 7 + \frac{1}{x^4}\right).$$

(다시 곱해서 확인: $x^7 \cdot x^4 = x^{11}$이고 $x^7 \cdot \frac{1}{x^4} = x^3$입니다.) 따라서 $x^4 + \frac{1}{x^4}$이 필요한데, 이것은 바로 $x + \frac{1}{x}$을 제곱할 때 나오는 종류의 대칭식입니다.

2단계: 한 번 제곱하기. $x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}$의 양변을 제곱하면

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 5, \qquad \text{따라서} \qquad x^2 + \frac{1}{x^2} = 3.$$

(가운데 항 2는 $2 \cdot x \cdot \frac{1}{x}$입니다.)

3단계: 다시 제곱하기.

$$x^4 + 2 + \frac{1}{x^4} = 9, \qquad \text{따라서} \qquad x^4 + \frac{1}{x^4} = 7.$$

(이번에도 가운데 항은 $2 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x^2} = 2$입니다.)

4단계. 그러면 $x^4 - 7 + \frac{1}{x^4} = 7 - 7 = 0$이고, 주어진 식의 값은 $x^7 \cdot 0 = 0$입니다. 문제의 7은 $x^4 + \frac{1}{x^4}$을 정확히 지우도록 고른 수이고, 그것을 알아차리는 것이 이 문제의 전부입니다.

이런 실수 x는 실제로 존재합니다. $x^2 - \sqrt{5}\,x + 1 = 0$의 판별식은 $5 - 4 = 1 > 0$이고, $x = \frac{\sqrt{5}\pm 1}{2}$입니다. 두 값 모두 0이 아니므로 x로 나누어도 괜찮았고, 두 값 모두 같은 답 0을 줍니다.

주의. 교차항을 빼먹고 $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$인 것처럼 제곱하면 3과 7 대신 5와 25가 나와서, 식이 더 이상 깔끔하게 정리되지 않습니다. $+2$를 꼭 넣으세요.

정답: (B) 0

4 정수론

출처: 2022 AMC 10A 17번

> 0이 아닌 자릿수 a, b, c가 다음 식을 만족하는 세 자리 양의 정수 $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}$는 몇 개인가
>
> $$0.\overline{\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}} = \frac{1}{3}(0.\overline{a} + 0.\overline{b} + 0.\overline{c})?$$
>
> (막대는 반복을 나타낸다. 즉, $0.\overline{\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}}$는 무한 순환소수 $0.\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}\,\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}\cdots$ 이다.)
>
> **(A)** 9 **(B)** 10 **(C)** 11 **(D)** 13 **(E)** 14

핵심 아이디어. 순환소수는 사실 분수입니다. 한 자리가 반복되면 그 숫자를 9로 나눈 것이고, 세 자리가 반복되면 그 세 자리 수를 999로 나눈 것입니다. 이렇게 바꾸면 낯설어 보이는 조건이 자릿수에 대한 평범한 일차방정식이 되고, $999 = 27 \cdot 37$이므로 분모도 깔끔하게 정리됩니다.

1단계. $0.\overline{\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}} = \dfrac{100a + 10b + c}{999}$이고 $0.\overline{a} = \dfrac{a}{9}$, $0.\overline{b} = \dfrac{b}{9}$, $0.\overline{c} = \dfrac{c}{9}$입니다. 따라서 조건은 다음과 같이 바뀝니다.

$$\frac{100a + 10b + c}{999} = \frac{a + b + c}{27}.$$

2단계. 양변에 $999 = 27 \cdot 37$을 곱하면 $100a + 10b + c = 37(a + b + c) = 37a + 37b + 37c$입니다. 항을 정리하면 $63a = 27b + 36c$이고, 양변을 9로 나누면 다음을 얻습니다.

$$7a = 3b + 4c, \qquad \text{또는} \qquad 3(b - a) = 4(a - c).$$

3단계. $a = b = c$이면 양변이 모두 0이므로 $111, 222, \ldots, 999$의 아홉 수가 모두 조건을 만족합니다. 그렇지 않으면 $b - a$는 4의 배수, $a - c$는 3의 배수여야 하므로 $t \neq 0$에 대해 $b - a = 4t$, $a - c = 3t$로 쓸 수 있습니다. 두 자릿수의 차는 많아야 8이므로 $|t| \leq 2$입니다.

- $t = 1$: $b = a + 4$, $c = a - 3$이므로 $4 \leq a \leq 5$가 필요합니다. 481과 592입니다.
- $t = -1$: $b = a - 4$, $c = a + 3$이므로 $5 \leq a \leq 6$이 필요합니다. 518과 629입니다.
- $t = \pm 2$: $|b - a| = 8$이면 $\{a, b\} = \{1, 9\}$일 수밖에 없고, 이때 $c = a \mp 6$은 -5 또는 15가 되어 자릿수가 아닙니다.

예를 들어 $7 \cdot 4 = 28 = 3 \cdot 8 + 4 \cdot 1$이므로 481이 조건을 만족함을 확인할 수 있습니다. 모두 $9 + 4 = 13$개입니다.

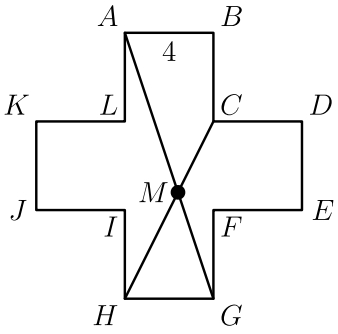
주의. 등식이 뻔히 성립하는, 같은 숫자로만 이루어진 수 $111, \ldots, 999$만 찾으면 9개가 되어 선택지 (A)를 고르게 됩니다.

정답: (D) 13

5 기하

출처: 2007 AMC 10A 18번

그림과 같은 12각형 $ABCDEFGHIJKL$을 생각하자. 각 변의 길이는 4이고, 이웃한 두 변은 모두 직각을 이룬다. $\overline{AG}$와 $\overline{CH}$가 M에서 만날 때, 사각형 $ABCM$의 넓이는?



(A) $\frac{44}{3}$ **(B)** 16 **(C)** $\frac{88}{5}$ **(D)** 20 **(E)** $\frac{62}{3}$

핵심 아이디어. B, C, G는 모두 한 세로 직선 위에 있으므로, $ABCM$은 큰 삼각형 ABG에서 삼각형 CMG를 잘라 낸 것입니다. 그러면 모든 것은 M이 그 직선에서 얼마나 떨어져 있는지에 달려 있고, 평행한 두 세로 선분 $\overline{AH}$와 $\overline{CG}$를 보면 닮은 삼각형이 떠오릅니다.

1단계: 뼈대. 이 십자 모양의 높이는 4×4 정사각형 세 개만큼이므로, A, L, I, H는 한 세로 직선 위에 있고, B, C, F, G는 그보다 4만큼 오른쪽에 있는 다른 세로 직선 위에 있습니다. 따라서 $ABGH$는 4×12 직사각형이고, $AH = 12$, $CG = 8$(C는 B보다 4만큼 아래에, G는 B보다 12만큼 아래에 있음), $AB = 4$입니다.

2단계: M의 위치. $\overline{AH} \parallel \overline{CG}$이므로 삼각형 MAH와 MGC는 닮음입니다(M에서의 맞꼭지각, 평행선의 엇각). 닮음비는 $AH : GC = 12 : 8 = 3 : 2$이므로, M에서 두 세로 직선까지의 거리의 비는 $3 : 2$입니다. 두 거리의 합이 4이므로, M은 직선 BG에서 $\frac{2}{5} \cdot 4 = \frac{8}{5}$만큼 떨어져 있습니다.

3단계: 넓이. 삼각형 ABG는 직각을 낀 두 변이 $AB = 4$, $BG = 12$이므로 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 12 = 24$입니다. 삼각형 CMG는 밑변 $CG = 8$이 직선 BG 위에 있고 높이가 $\frac{8}{5}$이므로 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \frac{8}{5} = \frac{32}{5}$입니다. 따라서 다음을 얻습니다.

$$[ABCM] = 24 - \frac{32}{5} = \frac{88}{5}.$$

다른 풀이. 십자의 중심을 원점으로 하여 좌표를 잡으면 $A = (-2, 6)$, $B = (2, 6)$, $C = (2, 2)$, $G = (2, -6)$, $H = (-2, -6)$입니다. 직선 AG는 $y = -3x$, 직선 CH는 $y = 2x - 2$이고, 두 직선은 $M = \left(\frac{2}{5}, -\frac{6}{5}\right)$에서 만납니다. A, B, C, M에 신발끈 공식을 적용하면 $\frac{88}{5}$를 얻습니다.

주의. 그림만 보면 M을 십자의 중심으로 생각하기 쉽습니다. 중심은 $\overline{AG}$ 위에 있지만 $\overline{CH}$ 위에는 있지 않습니다. 그런데도 중심을 쓰면 $24 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 = 16$, 즉 선택지 (B)가 나옵니다.

정답: (C) $\frac{88}{5}$

---

6 정수론

출처: 2019 AMC 10B 19번

> $100{,}000$의 양의 약수 전체의 집합을 S라 하자. S의 서로 다른 두 원소의 곱으로 나타낼 수 있는 수는 몇 개인가?
>
> **(A)** 98 **(B)** 100 **(C)** 117 **(D)** 119 **(E)** 121

핵심 아이디어. $100{,}000 = 2^5 \cdot 5^5$의 약수는 지수의 쌍으로 나타낼 수 있으므로, 약수의 곱은 지수의 **합**이 됩니다. 가능한 지수의 합을 모두 센 다음, 어떤 약수를 자기 자신과 곱해야만 만들어지는 몇 개를 빼 봅시다.

1단계. $100{,}000 = 10^5 = 2^5 \cdot 5^5$이므로 S의 모든 원소는 $0 \le a \le 5$, $0 \le b \le 5$인 $2^a 5^b$ 꼴입니다(따라서 $|S| = 36$). 두 원소의 곱은 다음과 같습니다.

$$2^a 5^b \cdot 2^c 5^d = 2^{a+c}\, 5^{b+d}, \qquad 0 \le a+c \le 10,\ \ 0 \le b+d \le 10.$$

따라서 모든 곱은 $0 \le s \le 10$, $0 \le t \le 10$인 $11 \cdot 11 = 121$개의 수 $2^s 5^t$ 중 하나입니다(지수의 쌍이 다르면 수도 다릅니다).

2단계. 이 121개의 수 $2^s 5^t$ 중 어느 것을 **서로 다른** 두 약수로 만들 수 있을까요? $1 \le s \le 9$이면 $0 \le a, c \le 5$이고 $a \ne c$가 되도록 $s = a + c$로 나눌 수 있습니다(예를 들어 $s = 1 = 0+1$, $s = 9 = 4+5$이고, 일반적으로 s가 홀수이면 $a = \lfloor s/2 \rfloor$, $c = \lceil s/2 \rceil$, s가 짝수이면 $a = s/2 - 1$, $c = s/2 + 1$로 잡으면 됩니다). 여기에 $0 \le b, d \le 5$를 만족시키면서 $b + d = t$가 되도록 아무렇게나 고르면, $a \ne c$이므로 두 약수는 서로 다릅니다. $1 \le t \le 9$일 때도 두 소수의 역할을 바꾸면 같은 방법이 통합니다.

3단계. $s \in \{0, 10\}$이면서 동시에 $t \in \{0, 10\}$이면 나누는 방법이 하나로 정해집니다. $s = 0$이면 $a = c = 0$, $s = 10$이면 $a = c = 5$이어야 하고, t도 마찬가지입니다. 그러면 두 약수가 같아지므로

$$1, \quad 2^{10} = 1024, \quad 5^{10}, \quad 10^{10},$$

이 네 수는 서로 다른 원소로 만들 수 없습니다.

4단계. 구하는 개수는 $121 - 4 = 117$입니다.

주의. **서로 다른**이라는 조건을 무시하면 121, 즉 선택지 (E)가 됩니다. 눈에 잘 띄는 제곱 $1 = 1 \cdot 1$과 $10^{10} = 100{,}000 \cdot 100{,}000$만 빼면 119, 즉 선택지 (D)가 됩니다. $2^{10} = 32 \cdot 32$와 $5^{10} = 3125 \cdot 3125$도 자기 자신과의 곱으로만 만들어지는 수입니다.

정답: (C) 117

7 대수

출처: 2010 AMC 10A 21번

> 다항식
>
> $$x^3 - ax^2 + bx - 2010$$
>
> 이 양의 정수인 근 세 개를 가진다. 가능한 a의 값 중 가장 작은 값은?
>
> **(A)** 78 **(B)** 88 **(C)** 98 **(D)** 108 **(E)** 118

핵심 아이디어. 근이 주어진 다항식은 근과 계수의 관계(비에타 공식)로 결정됩니다. 상수항은 근의 **곱**을, a는 근의 **합**을 알려 줍니다. 따라서 문제는 "2010을 세 양의 정수의 곱으로 나타내되, 그 합이 가장 작게 하라"가 됩니다.

1단계. 근을 양의 정수 r, s, t라 합시다. 그러면 다음과 같이 쓸 수 있고,

$$x^3 - ax^2 + bx - 2010 = (x - r)(x - s)(x - t),$$

계수를 비교하면 $r + s + t = a$, $rst = 2010$을 얻습니다.

2단계. 소인수분해하면 $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$입니다. 소수 67은 근 중 하나를 나누어야 하므로 그 근을 t라 합시다. 그러면 $t = 67$이거나 $t \geq 2 \cdot 67 = 134$입니다.

3단계. $t \geq 134$이면 이미 $a > 134$로, 아래에서 얻을 값 78보다 훨씬 큽니다.

$t = 67$이면 $rs = 30$이고, 30의 약수 쌍에 대해 $r + s$를 최소로 만들어 봅시다.

$$1 + 30 = 31, \quad 2 + 15 = 17, \quad 3 + 10 = 13, \quad 5 + 6 = 11.$$

가장 작은 것은 $5 + 6 = 11$이므로 $a = 5 + 6 + 67 = 78$입니다.

4단계. 이 값은 실제로 얻어집니다. 근이 $5, 6, 67$이면 다음과 같이 전개되어,

$$(x - 5)(x - 6)(x - 67) = x^3 - 78x^2 + 767x - 2010,$$

$a = 78$, $b = 767$인 주어진 꼴이 됩니다. 다른 모든 인수분해는 더 큰 합을 주므로 최솟값은 78입니다.

주의. $2010 = 30 \cdot 67$로 쓰고 세 번째 근으로 1을 쓰면 근이 $1, 30, 67$이 되어 $a = 98$, 즉 선택지 (C)가 됩니다. $t = 67$을 정하고 나면 나머지 두 근은 가능한 한 서로 가까워야 합니다. 곱이 일정한 두 수는 서로 가까울수록 합이 작아지기 때문입니다.

정답: (A) 78

8 경우의 수와 확률

출처: 2008 AMC 10B 22번

> 빨간 구슬 세 개, 흰 구슬 두 개, 파란 구슬 한 개를 임의의 순서로 한 줄로 늘어놓는다. 이웃한 두 구슬의 색이 같은 경우가 하나도 없을 확률은?
>
> **(A)** $\frac{1}{12}$ **(B)** $\frac{1}{10}$ **(C)** $\frac{1}{6}$ **(D)** $\frac{1}{3}$ **(E)** $\frac{1}{2}$

핵심 아이디어. 색의 배열을 셉니다. 세 빨간 구슬을 떼어 놓는 것이 가장 어려우므로, 먼저 빨간 구슬을 서로 이웃하지 않는 자리에 놓고, 그다음 두 흰 구슬과 파란 구슬이 흰 구슬끼리 붙지 않게 빈자리를 어떻게 채울 수 있는지 살펴봅시다.

1단계. 전체 배열의 수. 자리에 1부터 6까지 번호를 붙입니다. 색의 배열은 빨간 구슬 3개의 자리를 고른 다음, 나머지 3자리 중 파란 구슬의 자리를 고르면 정해집니다.

$$\binom{6}{3} \cdot 3 = 20 \cdot 3 = 60 = \frac{6!}{3!\,2!\,1!}.$$

60가지 배열은 모두 같은 확률로 나옵니다.

2단계. 빨간 구슬 놓기. 빨간 구슬끼리는 이웃하면 안 됩니다. 1–6에서 어느 두 자리도 이웃하지 않는 세 자리의 집합은 다음과 같습니다.

$$\{1,3,5\},\quad \{2,4,6\},\quad \{1,3,6\},\quad \{1,4,6\}.$$

(이것이 전부입니다. 첫 번째 빨간 구슬이 1에 있으면 나머지 둘은 $3,4,5,6$에서 간격을 두고 골라야 하므로 $\{3,5\},\{3,6\},\{4,6\}$이고, 첫 번째 빨간 구슬이 2에 있으면 가능한 것은 $\{4,6\}$뿐이며, 첫 번째 빨간 구슬이 3 이후에 있으면 자리가 부족합니다.)

3단계. 흰 구슬, 흰 구슬, 파란 구슬 놓기.

- 빨간 구슬이 $\{1,3,5\}$에 있을 때: 빈자리 $2,4,6$은 서로 떨어져 있으므로 파란 구슬은 그중 어디에나 놓을 수 있습니다. 3가지.
- 빨간 구슬이 $\{2,4,6\}$에 있을 때: 빈자리 $1,3,5$이므로 역시 3가지.
- 빨간 구슬이 $\{1,3,6\}$에 있을 때: 빈자리 $2,4,5$. 자리 4와 5가 이웃하므로 둘 다 흰 구슬일 수는 없습니다. 파란 구슬은 4나 5에 있어야 하므로 2가지.
- 빨간 구슬이 $\{1,4,6\}$에 있을 때: 빈자리 $2,3,5$. 자리 2와 3이 이웃하므로 파란 구슬은 2나 3에 있어야 합니다. 2가지.

좋은 배열은 $3+3+2+2=10$가지입니다.

4단계. 확률은 $\frac{10}{60}=\frac{1}{6}$입니다.

주의. 빨간 구슬이 완전히 번갈아 놓이는 $\{1,3,5\}$와 $\{2,4,6\}$만 세는 실수를 하기 쉽습니다. 그러면 $\frac{6}{60} = \frac{1}{10}$, 즉 선택지 (B)가 나옵니다. 양 끝에 빨간 구슬이 있는 $\{1,3,6\}$과 $\{1,4,6\}$이 4가지를 더해 줍니다.

정답: (C) $\frac{1}{6}$

---

9 기하

출처: 2022 AMC 10B 22번

좌표평면에서 방정식이 다음과 같은 세 원에 모두 접하는 원 전체의 집합을 S라 하자.

$$x^2+y^2=4, \qquad x^2+y^2=64,$$
$$\text{그리고} \qquad (x-5)^2+y^2=3.$$

S에 속하는 모든 원의 넓이의 합은?

(A) 48π **(B)** 68π **(C)** 96π **(D)** 102π **(E)** 136π

핵심 아이디어. 주어진 원 중 두 개는 중심이 $O=(0,0)$으로 같습니다. 두 동심원에 모두 접하는 원은 반지름과 O로부터의 거리가 완전히 정해지므로, 이 두 원을 먼저 처리합시다. 그러면 세 번째 원이 각 크기의 원이 몇 군데에 놓일 수 있는지를 결정합니다.

1단계: 바깥 원과 접하기. S에 속하는 원의 반지름을 r, 중심을 P라 하고 $OP=d$라 합시다. 주어진 원 중 두 개는 O를 중심으로 하는 반지름 2와 8인 원이고, 작은 원은 큰 원의 내부에 완전히 들어 있습니다. 큰 원의 바깥에 있는 원이나 큰 원을 둘러싸는 원은 작은 원에 결코 닿을 수 없습니다. 따라서 우리 원은 큰 원의 내부에 있으면서 안쪽에서 큰 원에 접합니다.

$$d+r=8.$$

2단계: 안쪽 원과 접하기. 우리 원은 O로부터 거리 8인 곳까지 뻗어 있으므로 반지름 2인 원의 내부에 있지 않습니다. 따라서 그 원에 바깥에서 접하거나($d-r=2$), 그 원을 둘러싸면서 접합니다($r-d=2$).

- $d+r=8,\ d-r=2$: $r=3,\ d=5$.
- $d+r=8,\ r-d=2$: $r=5,\ d=3$.

따라서 S에 속하는 모든 원은 반지름이 3이고 중심이 O로부터 5만큼 떨어져 있거나, 반지름이 5이고 중심이 O로부터 3만큼 떨어져 있습니다.

3단계: 세 번째 원과 접하기. 세 번째 원은 중심이 $Q=(5,0)$이고 반지름이 $\sqrt{3}$입니다(주의: 반지름은 3이 아니라 $\sqrt{3}$입니다). $r>\sqrt{3}$이므로, $PQ=q$라 하면 접하는 경우는 $q=r+\sqrt{3}$(바깥에서 접할 때) 또는 $q=r-\sqrt{3}$(그 원을 둘러쌀 때)입니다. 따라서 P는 O를 중심으로 하는 반지름 d인 원과 Q를 중심으로 하는 반지름 q인 원 위에 동시에 있고, $OQ=5$입니다. 두 원은 $|d-q|<5<d+q$일 때 정확히 두 점에서 만납니다.

$(r,d)=(3,5)$이고 $q=3\pm\sqrt{3}$일 때 $|d-q|=2\mp\sqrt{3}$, $d+q=8\pm\sqrt{3}$입니다. $(r,d)=(5,3)$이고 $q=5\pm\sqrt{3}$일 때 $|d-q|=2\pm\sqrt{3}$, $d+q=8\pm\sqrt{3}$입니다. 네 경우 모두 $|d-q|\le 2+\sqrt{3}<4<5$이고 $d+q\ge 8-\sqrt{3}>6>5$이므로, 각 경우마다 x축에 대하여 서로 대칭인 두 중심이 생깁니다.

4단계. 따라서 반지름이 3인 원이 4개, 반지름이 5인 원이 4개이고, 넓이의 합은 다음과 같습니다.

$$4\cdot 9\pi+4\cdot 25\pi=36\pi+100\pi=136\pi.$$

주의. 각 경우에 중심을 하나만 찾고 x축에 대한 대칭점을 잊으면 $2\cdot 9\pi+2\cdot 25\pi=68\pi$, 즉 선택지 (B)가 됩니다.

정답: (E) 136π

---

10 경우의 수와 확률

출처: 2021 가을 AMC 10B 23번

정오각형의 5개의 변과 5개의 대각선을 각각 빨간색 또는 파란색으로 같은 확률로, 서로 독립적으로 임의로 칠한다. 세 꼭짓점이 모두 정오각형의 꼭짓점 중에 있고 세 변이 모두 같은 색인 삼각형이 존재할 확률은?

(A) $\frac{2}{3}$ **(B)** $\frac{105}{128}$ **(C)** $\frac{125}{128}$ **(D)** $\frac{253}{256}$ **(E)** 1

핵심 아이디어. "한 가지 색으로만 된 삼각형이 생긴다"는 거의 확실한 사건이므로, 반대로 10개의 선분을 칠했을 때 한 가지 색으로만 된 삼각형이 **하나도 없는** 경우를 셉시다. 그런 색칠은 매우 제한적이어서 개수가 적습니다.

1단계: 상황 정리. 5개의 변과 5개의 대각선은 5개의 꼭짓점을 잇는 $\binom{5}{2}=10$개의 선분 전부이고, 꼭짓점 세 개를 고를 때마다 삼각형이 하나 생깁니다. 각 선분의 색은 2가지이므로, 같은 확률로 일어나는 색칠은 모두 $2^{10}=1024$가지입니다.

2단계: 각 꼭짓점에는 각 색이 두 개씩. 어떤 색칠에 한 가지 색으로만 된 삼각형이 없고, 어떤 꼭짓점 V에서 X, Y, Z로 가는 선분 3개가 같은 색, 예를 들어 빨간색이라고 합시다. XY, YZ, ZX 중 하나라도 빨간색이면 V와 함께 빨간 삼각형을 이룹니다. 따라서 셋 모두 파란색인데, 그러면 XYZ가 파란 삼각형이 됩니다. 이는 불가능하므로 각 꼭짓점에는 빨간 선분이 많아야 2개, 파란 선분이 많아야 2개입니다. 각 꼭짓점에는 선분이 4개 있으므로 각 색이 정확히 2개씩입니다.

3단계: 빨간 선분들은 5-사이클을 이룹니다. 모든 꼭짓점이 빨간 선분 정확히 2개와 만나므로, 빨간 선분을 따라 꼭짓점에서 꼭짓점으로 이동하면 닫힌 고리를 돌게 되고, 각 고리는 꼭짓점을 적어도 3개 사용합니다. 5개의 꼭짓점을 그런 고리 두 개로 나눌 수는 없으므로($3+2$는 안 됩니다), 빨간 선분들은 5개의 꼭짓점을 모두 지나는 하나의 고리를 이룹니다. 파란 선분은 나머지 5개이고, 이들도 5개의 꼭짓점을 모두 지나는 고리를 이룹니다(정오각형과 그 안의 별 모양처럼).

거꾸로, 이런 색칠은 조건을 만족합니다. 꼭짓점이 5개인 고리에는 삼각형이 없으므로 어느 색에도 한 가지 색으로만 된 삼각형이 없습니다.

4단계: 세기. 이름 붙은 5개의 꼭짓점을 지나는 고리는 5개의 꼭짓점 중 어디에서 시작하든, 2가지 방향 중 어느 쪽으로 나열하든 같은 고리이므로, 고리의 개수는 $\frac{5!}{5 \cdot 2} = 12$입니다. 따라서 한 가지 색으로만 된 삼각형이 없는 색칠은 12가지이고,

$$P = 1 - \frac{12}{1024} = 1 - \frac{3}{256} = \frac{253}{256}.$$

정답: (D) $\frac{253}{256}$