AMC 10

제 22 회

하프 모의고사

해설

정답표 • 출처 • 단계별 풀이

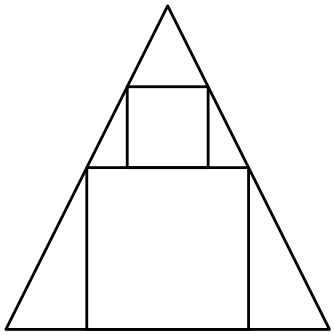
10문항 모두 AMC 10 기출(2000–2025)의 13–23번 문항에서 가져와 원래 번호 순서대로 배열한 것입니다. 원문 © Mathematical Association of America.

정답표와 출처

번호	정답	출처	영역
1	**B**	2021 가을 AMC 10B 13번	기하
2	**C**	2024 AMC 10B 15번	대수
3	**D**	2010 AMC 10A 15번	경우의 수와 확률
4	**C**	2009 AMC 10A 17번	기하
5	**D**	2025 AMC 10B 18번	대수
6	**C**	2021 AMC 10B 18번	경우의 수와 확률
7	**C**	2015 AMC 10A 21번	기하
8	**A**	2020 AMC 10A 22번	대수
9	**B**	2008 AMC 10B 23번	정수론
10	**C**	2020 AMC 10B 23번	경우의 수와 확률

1 기하

출처: 2021 가을 AMC 10B 13번

> 한 변의 길이가 3인 정사각형이 이등변삼각형에 내접해 있고, 이 정사각형의 한 변은 삼각형의 밑변 위에 놓여 있다. 한 변의 길이가 2인 정사각형은 그림과 같이 두 꼭짓점이 다른 정사각형 위에 있고, 나머지 두 꼭짓점이 삼각형의 변 위에 있다. 삼각형의 넓이는?
>
> 
>
> **(A)** $19\frac{1}{4}$ **(B)** $20\frac{1}{4}$ **(C)** $21\frac{3}{4}$ **(D)** $22\frac{1}{2}$ **(E)** $23\frac{3}{4}$

핵심 아이디어. 삼각형을 가로지르는 수평 선분의 길이는 모두 위쪽 꼭짓점으로부터의 거리에 비례합니다(닮은 삼각형). 두 정사각형이 알려진 두 높이에서의 폭을 하나씩 알려 주므로, 삼각형의 높이를 구하기에 충분합니다.

삼각형의 높이를 H, 밑변을 B라 하고, 밑변이 바닥에 놓여 있다고 합시다.

1단계. 큰 정사각형은 밑변 위에 서 있으므로, 그 윗변은 높이 3에 있고 길이는 3입니다. 작은 정사각형은 그 위에 놓여 있으므로, 그 윗변은 높이 $3+2=5$에 있고 길이는 2입니다. 두 윗변 모두 양 끝이 삼각형의 비스듬한 두 변 위에 있습니다.

2단계. 높이 h에서의 수평 선분은 위쪽에 높이가 $H-h$인 작은 삼각형을 잘라 내는데, 이 삼각형은 전체 삼각형과 닮음입니다. 따라서 폭은 $H-h$에 비례합니다.

$$\frac{3}{H-3}=\frac{2}{H-5}.$$

분모를 교차하여 곱하면 $3(H-5)=2(H-3)$, 즉 $3H-15=2H-6$이므로 $H=9$입니다.

3단계. 밑변 전체와 큰 정사각형의 윗변을 비교하면 $\frac{B}{H}=\frac{3}{H-3}$이므로 $\frac{B}{9}=\frac{3}{6}$, 즉 $B=\frac{9}{2}$입니다.

확인해 봅시다. 높이 5에서의 폭은 $\frac{9}{2}\cdot\frac{9-5}{9}=2$로, 맞습니다.

4단계. 넓이는 다음과 같습니다.

$$\frac{1}{2}\cdot B\cdot H=\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot 9=\frac{81}{4}=20\tfrac{1}{4}.$$

정답: (B) $20\frac{1}{4}$

2 대수

출처: 2024 AMC 10B 15번

> 9개의 실수로 이루어진 목록이 $1, 2.2, 3.2, 5.2, 6.2, 7$, 그리고 $x \le y \le z$인 x, y, z로 이루어져 있다. 이 목록의 범위는 7이고, 평균과 중앙값은 모두 양의 정수이다. 가능한 순서쌍 (x, y, z)의 개수는?
>
> **(A)** 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 무수히 많다

핵심 아이디어. 고정된 여섯 수는 이미 1부터 7까지 걸쳐 있어 폭이 6입니다. 범위가 7이 되려면 가장 작은 수가 1보다 작아지거나, 가장 큰 수가 7보다 커지거나, 둘 다여야 하므로 세 경우가 생깁니다. 각 경우에 평균이 정수라는 조건이 미지수의 합을 정하고, 중앙값이 정수라는 조건이 값을 확정합니다.

고정된 수의 합은 $1+2.2+3.2+5.2+6.2+7 = 24.8$입니다. 평균을 정수 k라 하면 $x+y+z = 9k - 24.8$입니다. 중앙값은 아홉 수 중 5번째로 작은 수입니다.

경우 1: $z \le 7$. 가장 큰 수가 7이므로 가장 작은 수는 0이고, $x = 0$입니다. 그러면 $y+z = 9k-24.8$은 0과 14 사이에 있으므로 $k = 3$ 또는 4입니다.

$k = 3$이면 $y+z = 2.2$이므로 $0, 1, y, z$가 모두 2.2 이하이고, 중앙값은 2.2로 정수가 아닙니다.

$k = 4$이면 $y+z = 11.2$이고, $z \le 7$이므로 $y \ge 4.2$입니다. y보다 작은 수가 $0, 1, 2.2, 3.2$의 네 개이므로, 중앙값은 y와 5.2 중 작은 것입니다. 이것이 정수가 되는 것은 $y = 5$일 때뿐이고, 이때 $z = 6.2$입니다. 순서쌍 $(0, 5, 6.2)$를 얻습니다.

경우 2: $x \ge 1$. 가장 작은 수가 1이므로 $z = 8$입니다. 그러면 $x+y = 9k-32.8$은 2와 16 사이에 있으므로 $k = 4$ 또는 5입니다.

$k = 4$이면 $x+y = 3.2$이므로 $x, y \le 2.2$이고, 중앙값은 3.2로 정수가 아닙니다.

$k = 5$이면 $x+y = 12.2$이고 $y \le 8$이므로 $4.2 \le x \le 6.1 \le y$입니다. x보다 작은 수는 $1, 2.2, 3.2$뿐이므로, 중앙값은 $x, y, 5.2, 6.2, 7, 8$ 중 두 번째로 작은 수입니다. $x \le 5.2$이면 그 수는 5.2이고, $x > 5.2$이면 x 자신입니다. 따라서 $x = 6$, $y = 6.2$이고, 순서쌍 $(6, 6.2, 8)$을 얻습니다.

경우 3: $x < 1$이고 $z > 7$. 이제 $z = x+7$이고 $x > 0$입니다. 합 $31.8 + 2x + y$는 31.8보다 크고 $31.8+2+8 = 41.8$보다 작으므로 36이어야 합니다. 즉 $k = 4$이고 $y = 4.2 - 2x$이며, y는 2.2와 4.2 사이(양 끝 제외)에 있습니다. 가장 작은 네 수는 $x, 1, 2.2$와, y와 3.2 중 작은 것이므로, 중앙값은 y와 3.2 중 큰 것입니다. 이것이 정수가 되는 것은 $y = 4$일 때뿐이고, 이때 $x = 0.1$, $z = 7.1$입니다. 순서쌍 $(0.1, 4, 7.1)$을 얻습니다.

조건을 만족하는 순서쌍은 정확히 3개입니다.

주의. 양 끝이 모두 움직이는 경우 3을 빠뜨리기 쉽습니다. 처음 두 경우만 확인하면 2개가 나와 선택지 (B)를 고르게 됩니다.

정답: (C) 3

3 경우의 수와 확률

출처: 2010 AMC 10A 15번

> 어느 마법의 늪에는 말을 하는 양서류가 두 종 있다. 하는 말이 항상 참인 두꺼비와, 하는 말이 항상 거짓인 개구리이다. 네 마리의 양서류 브라이언, 크리스, 르로이, 마이크가 이 늪에 함께 살고 있으며, 이들은 다음과 같이 말한다.
>
> 브라이언: "마이크와 나는 서로 다른 종이다."
>
> 크리스: "르로이는 개구리이다."
>
> 르로이: "크리스는 개구리이다."
>
> 마이크: "우리 넷 중 적어도 둘은 두꺼비이다."
>
> 이 양서류들 중 개구리는 몇 마리인가?
>
> **(A)** 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

핵심 아이디어. 서로에 대해 말하는 두 마리, 크리스와 르로이부터 시작합시다. 이 둘을 먼저 정리하면 그중 두꺼비가 몇 마리인지 알 수 있고, 나머지는 저절로 정해집니다.

1단계. 크리스와 르로이가 둘 다 개구리라면 "르로이는 개구리이다"는 참이 됩니다. 하지만 개구리는 참을 말할 수 없습니다. 둘 다 두꺼비라면 "르로이는 개구리이다"는 거짓이 됩니다. 하지만 두꺼비는 거짓말을 할 수 없습니다. 따라서 크리스와 르로이 중 **정확히 한 마리**가 두꺼비이고, 다른 한 마리는 개구리입니다.

2단계. 브라이언이 두꺼비라고 가정해 봅시다. 그러면 그의 말이 참이므로 마이크는 개구리입니다. 그런데 이때 브라이언과 1단계의 두꺼비, 이렇게 두 마리가 두꺼비이므로 마이크의 말 "적어도 둘은 두꺼비이다"가 참이 됩니다. 개구리에게는 불가능한 일입니다. 따라서 브라이언은 개구리입니다.

3단계. 브라이언의 말은 거짓이므로 마이크는 브라이언과 **같은** 종, 즉 개구리입니다. 마이크의 말도 확인해 봅시다. 두꺼비는 1단계의 한 마리뿐이므로 "적어도 둘은 두꺼비이다"는 거짓이고, 이는 개구리의 말로서 맞습니다. ✓

4단계. 개구리는 브라이언, 마이크, 그리고 크리스와 르로이 중 한 마리로 모두 3마리입니다. (1단계에서 어느 쪽이 두꺼비여도 성립하고, 두 경우 모두 개수는 같습니다.)

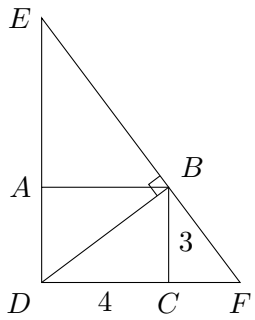
정답: (D) 3

4 기하

출처: 2009 AMC 10A 17번

> 직사각형 $ABCD$에서 $AB = 4$, $BC = 3$이다. 점 B를 지나는 선분 EF를 $EF \perp DB$이고 A와 C가 각각 DE와 DF 위에 있도록 그린다. EF의 길이는?
>
> **(A)** 9 **(B)** 10 **(C)** $\frac{125}{12}$ **(D)** $\frac{103}{9}$ **(E)** 12

핵심 아이디어. 대각선에 B에서 수직인 직선을 그으면 B에 직각이 생기고, 직사각형의 변들은 B에서 DE와 DF에 내린 수선이 됩니다. 직각삼각형 안에 높이가 있으면 닮은 삼각형이 생깁니다.



1단계. 대각선의 길이는 $DB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$입니다. A가 DE 위에, C가 DF 위에 있으므로, 점 E는 직선 DA 위에서 A를 지나 더 나아간 곳에 있고, 점 F는 직선 DC 위에서 C를 지나 더 나아간 곳에 있습니다.

2단계. 삼각형 EBD는 B에서 직각이고 $BA \perp ED$이므로, BA는 이 삼각형의 높이입니다. 그러면 삼각형 EAB와 BAD는 닮음입니다(둘 다 $\triangle EBD$와 예각 하나를 공유합니다). 대응은 $E \leftrightarrow B$, $A \leftrightarrow A$, $B \leftrightarrow D$입니다. 따라서 다음을 얻습니다.

$$\frac{EB}{BD} = \frac{AB}{AD} \quad \Longrightarrow \quad \frac{EB}{5} = \frac{4}{3} \quad \Longrightarrow \quad EB = \frac{20}{3}.$$

3단계. 같은 방법으로, 삼각형 FBD는 B에서 직각이고 높이가 BC이므로 $\triangle FCB \sim \triangle BCD$입니다. 따라서

$$\frac{BF}{BD} = \frac{BC}{CD} \quad \Longrightarrow \quad \frac{BF}{5} = \frac{3}{4} \quad \Longrightarrow \quad BF = \frac{15}{4}.$$

4단계. B는 E와 F 사이에 있으므로 다음과 같습니다.

$$EF = EB + BF = \frac{20}{3} + \frac{15}{4} = \frac{80}{12} + \frac{45}{12} = \frac{125}{12}.$$

다른 풀이. 좌표를 $D = (0,0)$, $C = (4,0)$, $B = (4,3)$, $A = (0,3)$으로 잡습니다. 직선 DB의 기울기는 $\frac{3}{4}$이므로 직선 EF의 기울기는 $-\frac{4}{3}$이고, 그 방정식은 $y - 3 = -\frac{4}{3}(x-4)$입니다. $x = 0$을 대입하면 $E = \left(0, \frac{25}{3}\right)$,

$y=0$을 대입하면 $F=\left(\frac{25}{4},0\right)$ 입니다. 따라서

$$EF=\sqrt{\left(\frac{25}{4}\right)^2+\left(\frac{25}{3}\right)^2}=25\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{9}}=25\cdot\frac{5}{12}=\frac{125}{12}.$$

정답: (C) $\frac{125}{12}$

---

5 대수

출처: 2025 AMC 10B 18번

> 다음 합 $\lfloor\sqrt{1}\rfloor+\lfloor\sqrt{2}\rfloor+\lfloor\sqrt{3}\rfloor+\cdots+\lfloor\sqrt{2024}\rfloor+\lfloor\sqrt{2025}\rfloor$의 일의 자리 숫자는? (단, $\lfloor x\rfloor$는 x보다 작거나 같은 최대의 정수를 나타낸다.)
>
> **(A)** 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 5 **(E)** 8

핵심 아이디어. $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$의 값은 꽤 긴 구간 동안 일정하다가 완전제곱수에서만 한 칸씩 올라갑니다. 각 값을 주는 n이 몇 개인지 세어서 묶음별로 더해 봅시다. $2025=45^2$임을 알아채면 묶음이 어디서 끝나는지 알 수 있습니다.

1단계: 묶음. $\lfloor\sqrt{n}\rfloor=m$인 것은 $m^2\le n\le(m+1)^2-1$일 때와 정확히 같습니다. 이 묶음에는 $(m+1)^2-m^2=2m+1$개의 정수가 들어 있습니다. 예를 들어 $m=1$인 묶음은 $n=1,2,3$(세 항)입니다.

2단계: 끝나는 곳. $44^2=1936$이고 $45^2=2025$이므로, 묶음 $m=1,2,\ldots,44$가 $n=1$부터 2024까지를 빈틈없이 채우고, 마지막 항 $n=2025$가 혼자서 45를 더합니다.

3단계: 더하기. 전체 합은 다음과 같습니다.

$$\sum_{m=1}^{44}m(2m+1)+45=2\sum_{m=1}^{44}m^2+\sum_{m=1}^{44}m+45.$$

$\sum m^2=\frac{44\cdot45\cdot89}{6}=29370$과 $\sum m=\frac{44\cdot45}{2}=990$을 이용하면

$$2\cdot29370+990+45=58740+990+45=59775.$$

따라서 일의 자리 숫자는 5입니다.

주의. 마지막에 혼자 남은 항 $\lfloor\sqrt{2025}\rfloor=45$를 빠뜨리면 59730이 되는데, 그 일의 자리 숫자 0은 선택지에 없습니다.

정답: (D) 5

6 경우의 수와 확률

출처: 2021 AMC 10B 18번

> 공정한 6면체 주사위를 홀수가 나올 때까지 반복하여 던진다. 처음으로 홀수가 나오기 전에 모든 짝수가 적어도 한 번씩 나올 확률은?
>
> **(A)** $\frac{1}{120}$ **(B)** $\frac{1}{32}$ **(C)** $\frac{1}{20}$ **(D)** $\frac{3}{20}$ **(E)** $\frac{1}{6}$

핵심 아이디어. 여기서는 같은 수가 반복되는 것은 상관없습니다. 4가 두 번 나오는 것은 한 번 나오는 것과 같습니다. 그러니 반복은 무시하고 **새로운 수가 처음 나타나는 순서**만 지켜봅시다. 그러면 질문은 "처음 나오는 새로운 수 세 개가 모두 짝수인가?"가 됩니다.

1단계: 새로운 수만 중요합니다. 이미 나온 수가 다시 나온 경우는 모두 버립니다. 남는 것은 수들을 처음 나타난 순서대로 적은 목록입니다. 사건이 일어나는 것은 2, 4, 6이 모두 홀수보다 먼저 나올 때, 즉 처음 세 개의 **새로운** 수가 어떤 순서로든 2, 4, 6일 때이고, 그때뿐입니다.

2단계: 새로운 수는 아직 안 나온 면 중 하나가 같은 확률로 나옵니다. 새로운 수가 나타날 때, 주사위가 공정하므로 그 수는 아직 나오지 않은 면 중 어느 것이든 될 확률이 같습니다.

- 첫 번째 새로운 수: 6개의 면 중 3개가 짝수이므로 확률은 $\frac{3}{6}$입니다.
- 두 번째 새로운 수: 아직 안 나온 5개의 면 중 2개가 짝수이므로 확률은 $\frac{2}{5}$입니다.
- 세 번째 새로운 수: 아직 안 나온 4개의 면 중 1개가 짝수이므로 확률은 $\frac{1}{4}$입니다.

3단계. 모두 곱합니다.

$$\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4}=\frac{6}{120}=\frac{1}{20}.$$

다른 풀이. 여섯 수가 처음 나타나는 순서 $6!=720$가지는 모두 같은 확률로 일어납니다. 조건을 만족하는 경우는 세 짝수가 먼저 오고($3!$가지) 세 홀수가 그 뒤에 오는($3!$가지) 경우이므로, 확률은 $\frac{3!\cdot 3!}{6!}=\frac{36}{720}=\frac{1}{20}$입니다.

주의. 짝수는 **어떤** 순서로 나와도 됩니다. 2, 4, 6처럼 특정한 순서를 고집하면 $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{120}$이 되어 선택지 (A)를 고르게 됩니다.

정답: (C) $\frac{1}{20}$

7 기하

출처: 2015 AMC 10A 21번

> 사면체 $ABCD$에서 $AB=5$, $AC=3$, $BC=4$, $BD=4$, $AD=3$, $CD=\frac{12}{5}\sqrt{2}$이다. 이 사면체의 부피는?
>
> **(A)** $3\sqrt{2}$ **(B)** $2\sqrt{5}$ **(C)** $\frac{24}{5}$ **(D)** $3\sqrt{3}$ **(E)** $\frac{24}{5}\sqrt{2}$

핵심 아이디어. 수 $3,4,5$가 두 번 나타납니다. 삼각형 ABC와 ABD는 빗변 $\overline{AB}$를 공유하는 합동인 3-4-5 직각삼각형입니다. 그래서 C와 D에서 $\overline{AB}$에 수선을 내려 볼 생각이 듭니다. 게다가 어색해 보이는 길이 $CD=\frac{12}{5}\sqrt{2}$는 두 수선이 직각으로 만난다는 힌트입니다.

1단계. $3^2+4^2=5^2$이므로 삼각형 ABC는 C에서 직각입니다. C에서 내린 수선이 $\overline{AB}$와 만나는 점을 P라 하면 다음과 같습니다.

$$CP=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{3\cdot 4}{5}=\frac{12}{5},\qquad AP=\frac{AC^2}{AB}=\frac{9}{5}.$$

(첫 번째 식은 넓이의 두 배를 두 가지 방법으로 계산한 것이고, 두 번째 식은 닮은 삼각형 $APC\sim ACB$에서 나옵니다.)

2단계. 삼각형 ABD도 변의 길이가 같으므로($AD=3$, $BD=4$), D에서 내린 수선의 길이도 $\frac{12}{5}$이고 수선의 발은 A에서 $\frac{9}{5}$만큼 떨어져 있습니다. 즉 **같은** 점 P입니다. 따라서 $CP\perp AB$, $DP\perp AB$이고 $CP=DP=\frac{12}{5}$입니다.

3단계. 삼각형 CPD를 봅시다.

$$CP^2+DP^2=\frac{144}{25}+\frac{144}{25}=\frac{288}{25}=\left(\frac{12}{5}\sqrt{2}\right)^2=CD^2.$$

피타고라스 정리의 역에 의해 $\angle CPD=90^\circ$입니다.

4단계. 이제 $\overline{CP}$는 평면 ABD 위의 평행하지 않은 두 직선 $\overline{AB}$와 $\overline{PD}$에 모두 수직입니다. 따라서 $\overline{CP}$는 평면 ABD에 수직이고, $CP=\frac{12}{5}$는 밑면 ABD에 대한 사면체의 높이입니다.

5단계. 밑면은 직각을 낀 두 변이 3과 4인 직각삼각형이므로 $[ABD]=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4=6$입니다. 따라서 부피는 다음과 같습니다.

$$V=\frac{1}{3}\cdot[ABD]\cdot CP=\frac{1}{3}\cdot 6\cdot\frac{12}{5}=\frac{24}{5}.$$

주의. 높이는 밑면에 수직이어야 하는데, $\overline{CD}$는 그렇지 않습니다. $CD=\frac{12}{5}\sqrt{2}$를 높이로 쓰면 $\frac{1}{3}\cdot 6\cdot\frac{12}{5}\sqrt{2}=\frac{24}{5}\sqrt{2}$, 즉 (E)가 됩니다.

다른 풀이. 좌표를 이용해 봅시다. $A=(0,0,0)$, $B=(5,0,0)$, $C=\left(\frac{9}{5},\frac{12}{5},0\right)$(확인: $AC=3$, $BC=4$), $D=(x,y,z)$로 둡니다. $AD^2=9$에서 $BD^2=16$을 빼면 $x^2-(x-5)^2=-7$이므로 $10x-25=-7$, 즉 $x=\frac{9}{5}$입니다. 그러면 $y^2+z^2=9-\frac{81}{25}=\frac{144}{25}$이고, 다음이 성립합니다.

$$CD^2=\left(y-\tfrac{12}{5}\right)^2+z^2=\tfrac{288}{25}-\tfrac{24}{5}y,$$

그런데 이 값이 $\frac{288}{25}$이 되는 것은 $y=0$일 때뿐입니다. 따라서 $z=\pm\frac{12}{5}$입니다. 즉 점 D는 삼각형 ABC가 놓인 평면으로부터 $\frac{12}{5}$만큼 떨어져 있습니다. 이 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4=6$이므로 역시 $V=\frac{1}{3}\cdot 6\cdot\frac{12}{5}=\frac{24}{5}$입니다.

정답: (C) $\frac{24}{5}$

---

8 대수

출처: 2020 AMC 10A 22번

> 양의 정수 $n\le 1000$ 중에서
>
> $$\left\lfloor\frac{998}{n}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{999}{n}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{1000}{n}\right\rfloor$$
>
> 의 값이 3으로 나누어떨어지지 않는 것은 몇 개인가? (단, $\lfloor x\rfloor$는 x보다 작거나 같은 가장 큰 정수이다.)
>
> **(A)** 22 **(B)** 23 **(C)** 24 **(D)** 25 **(E)** 26

핵심 아이디어. 세 분자가 연속한 수이므로 세 항의 값은 거의 항상 같고, 같은 세 수의 합은 3의 배수입니다. 합이 어긋날 수 있는 것은 998, 999, 1000 사이에 n의 배수가 끼어 있을 때뿐이므로, 1000을 n으로 나눈 나머지에 주목합시다.

1단계. 나눗셈을 $1000=qn+r$, $0\le r<n$으로 쓰면 $\left\lfloor\frac{1000}{n}\right\rfloor=q$입니다.

2단계. 나머지가 $r\ge 2$일 때. 이때 $999=qn+(r-1)$, $998=qn+(r-2)$이고, 두 나머지는 모두 0 이상 $n-1$ 이하입니다. 세 항이 모두 q이므로 합 $3q$는 3으로 **나누어떨어집니다**.

3단계. 나머지가 $r=1$일 때 (따라서 $n\ge 2$). 이때 $999=qn$이므로 그 항은 q이고, $998=(q-1)n+(n-1)$이므로 그 항은 $q-1$입니다. 합은 $3q-1$이므로 3으로 나누어떨어지지 않습니다.

4단계. 나머지가 $r=0$일 때. 이때 $999=(q-1)n+(n-1)$이므로 그 항은 $q-1$입니다. $n\ge 2$이면 $998=(q-1)n+(n-2)$이므로 그 항도 $q-1$이고, 합은 $3q-2$로 3으로 나누어떨어지지 않습니다. 그러나 $n=1$이면 합이 $998+999+1000=2997=3\cdot 999$로 3으로 **나누어떨어집니다**.

5단계. 세기. 1000 또는 999를 나누는 $n\ge 2$를 세면 됩니다(각각 $r=0$, $r=1$인 경우입니다. 1000과 999는 연속한 수이므로 둘을 모두 나누는 $n\ge 2$는 없습니다).

- $1000=2^3\cdot 5^3$의 약수는 $4\cdot 4=16$개이고, $n=1$을 빼면 15개입니다.
- $999=3^3\cdot 37$의 약수는 $4\cdot 2=8$개이고, $n=1$을 빼면 7개입니다.

모두 $15+7=22$개입니다.

주의. $n=1$이 조건을 만족하지 않는다는 것을 잊으면 안 됩니다. 약수 $16+8=24$개를 모두 세면 (C), $n=1$을 한 번만 세면 23, 즉 선택지 (B)가 됩니다.

정답: (A) 22

9 정수론

출처: 2008 AMC 10B 23번

> 두 변의 길이가 각각 a 피트, b 피트인 직사각형 모양의 바닥이 있다. 여기서 a와 b는 $b > a$인 양의 정수이다. 한 화가가 바닥 위에 변이 바닥의 변과 평행한 직사각형을 칠한다. 칠하지 않은 부분은 칠한 직사각형을 둘러싸는 폭 1 피트의 테두리를 이루고, 그 넓이는 바닥 전체 넓이의 절반이다. 순서쌍 (a, b)로 가능한 것은 모두 몇 개인가?
>
> **(A)** 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5

핵심 아이디어. 테두리의 폭이 1이므로 칠한 직사각형은 $(a-2)\times(b-2)$입니다. "바닥의 절반"이라는 조건은 ab 항이 있는 a, b에 관한 방정식을 줍니다. 이런 방정식은 완전제곱식을 만들 때처럼 (무엇)×(무엇) = (상수) 꼴로 인수분해하는 것이 정석입니다.

1단계. 폭 1 피트의 테두리는 각 변에서 1 피트씩 잘라 내므로, 칠한 직사각형의 두 변의 길이는 $(a-2)$ 피트와 $(b-2)$ 피트입니다(그리고 $a > 2$여야 합니다). 칠하지 않은 테두리가 바닥의 절반이므로, 칠한 부분이 나머지 절반입니다.

$$(a-2)(b-2) = \frac{ab}{2} \quad \Longrightarrow \quad 2(ab - 2a - 2b + 4) = ab.$$

2단계. 전개하고 정리하면 $2ab - 4a - 4b + 8 = ab$이므로 $ab - 4a - 4b + 8 = 0$입니다. 양변에 8을 더하면 좌변이 인수분해됩니다.

$$ab - 4a - 4b + 16 = 8 \quad \Longrightarrow \quad (a-4)(b-4) = 8.$$

3단계. $a-4$가 음수라면 ($a \geq 3$이므로) -1이어야 하고, 그러면 $b - 4 = -8$, 즉 $b = -4$가 되어 불가능합니다. 또 $a = 4$이면 $0 = 8$이 됩니다. 따라서 $a-4$와 $b-4$는 곱이 8인 양의 정수이고, ($b > a$이므로) $a - 4 < b - 4$입니다.

$$1 \cdot 8 \;\Rightarrow\; (a,b) = (5,12), \qquad 2 \cdot 4 \;\Rightarrow\; (a,b) = (6,8).$$

확인: $3 \cdot 10 = 30 = \frac{60}{2}$, $4 \cdot 6 = 24 = \frac{48}{2}$입니다.

따라서 가능한 것은 2개입니다.

주의. $b > a$라는 조건이 중요합니다. $(8,6)$과 $(12,5)$까지 세면 4개가 되어 선택지 (D)를 고르게 됩니다.

정답: (B) 2

10 경우의 수와 확률

출처: 2020 AMC 10B 23번

> 좌표평면 위의 정사각형 $ABCD$의 꼭짓점은 점 $A(1,1)$, $B(-1,1)$, $C(-1,-1)$, $D(1,-1)$이다. 다음 네 가지 변환을 생각하자.
>
> - L: 원점을 중심으로 시계 반대 방향으로 90° 회전;
> - R: 원점을 중심으로 시계 방향으로 90° 회전;
> - H: x축에 대한 대칭이동;
> - V: y축에 대한 대칭이동.
>
> 이 변환들은 각각 정사각형을 자기 자신으로 옮기지만, 이름이 붙은 꼭짓점들의 위치는 바뀐다. 예를 들어 R을 적용한 다음 V를 적용하면 $(1,1)$에 있는 꼭짓점 A는 $(-1,-1)$로 옮겨지고, $(-1,1)$에 있는 꼭짓점 B는 자기 자신으로 옮겨진다. $\{L,R,H,V\}$에서 고른 20개의 변환으로 이루어진 열 중에서, 이름이 붙은 꼭짓점들을 모두 원래 위치로 되돌려 놓는 것은 몇 개인가? (예를 들어 R,R,V,H는 꼭짓점들을 원래 위치로 되돌려 놓는 4개의 변환으로 이루어진 열 중 하나이다.)
>
> **(A)** 2^{37} **(B)** $3\cdot 2^{36}$ **(C)** 2^{38} **(D)** $3\cdot 2^{37}$ **(E)** 2^{39}

핵심 아이디어. 4^{20}개의 열을 직접 세는 것은 불가능하므로, 마지막 변환이 **강제되는** 이유를 찾아봅시다. 네 변환 모두 각 꼭짓점을 이웃한 모퉁이로 보내므로, 모퉁이를 체스판처럼 칠하고 홀짝성을 추적하자는 생각이 떠오릅니다.

1단계: 홀짝성 색칠. 모퉁이 $(1,1)$과 $(-1,-1)$은 검은색, $(-1,1)$과 $(1,-1)$은 흰색으로 칠합니다. L,R,H,V는 각각 모든 꼭짓점을 이웃한 모퉁이로 보내는데, 이웃한 모퉁이는 색이 다릅니다. 예를 들어 L은 $(1,1)$을 $(-1,1)$로 보내고, H는 $(1,1)$을 $(1,-1)$로 보냅니다.

따라서 홀수 번 변환한 뒤에는 이름이 붙은 모든 꼭짓점이 처음과 반대 색의 모퉁이에 있으며, 정사각형에서 이것은 이웃한 모퉁이라는 뜻입니다.

2단계: 19번 변환한 뒤의 위치. 처음 19번의 변환을 아무렇게나 정합니다. 정사각형의 대칭을 합성하면 정사각형의 대칭이 되므로, 이를 g라 합시다. 1단계에 의하여 g는 모든 꼭짓점을 이웃한 모퉁이로 보냅니다. 정사각형의 대칭은 항등변환, L, R, 반 바퀴 회전, H, V, 두 대각선에 대한 대칭이동의 여덟 가지입니다. 항등변환은 모든 꼭짓점을 고정하고, 반 바퀴 회전은 각 꼭짓점을 맞은편 모퉁이로 보내며, 대각선에 대한 대칭이동은 꼭짓점 두 개를 고정합니다. 따라서 g는 L, R, H, V 중 하나입니다.

3단계: 마지막 변환은 강제된다. 20번째 변환 t는 g를 되돌려야 하므로, t는 g의 역변환이어야 합니다. 역변환은 $L\leftrightarrow R$, $H\leftrightarrow H$, $V\leftrightarrow V$로 모두 목록 안에 있습니다. 따라서 처음 19번의 변환을 어떻게 정하든 알맞은 20번째 변환은 정확히 하나입니다.

4단계: 세기. 처음 19번의 변환은 자유롭게 4^{19}가지로 정할 수 있으므로, 열의 개수는 다음과 같습니다.

$$4^{19}=(2^2)^{19}=2^{38}.$$

예시로 확인해 봅시다. R,R은 반 바퀴 회전이고, 여기에 V를 하면 3번 변환한 뒤 $g=H$가 되며, 실제로 강제되는 4번째 변환은 H입니다.

주의. 4^{20} 개의 열이 8가지 대칭에 고르게 퍼져 있다고 가정하면 $\frac{4^{20}}{8} = 2^{37}$, 즉 (A)가 됩니다. 실제로는 그렇지 않습니다. 짝수 번 변환한 뒤에는 "짝수" 위치 4가지(항등변환, 반 바퀴 회전, 두 대각선 대칭 이동)만 가능하므로, 올바른 비율은 $\frac{1}{4}$입니다.

정답: (C) 2^{38}