AMC 10

제 23 회

하프 모의고사

해설

정답표 • 출처 • 단계별 풀이

10문항 모두 AMC 10 기출(2000–2025)의 13–23번 문항에서 가져와 원래 번호 순서대로 배열한 것입니다. 원문 © Mathematical Association of America.

정답표와 출처

번호	정답	출처	영역
1	**B**	2021 AMC 10B 13번	정수론
2	**D**	2022 AMC 10A 15번	기하
3	**C**	2010 AMC 10B 15번	대수
4	**C**	2020 AMC 10B 17번	경우의 수와 확률
5	**B**	2018 AMC 10B 17번	기하
6	**E**	2024 AMC 10A 19번	대수
7	**E**	2021 가을 AMC 10B 21번	경우의 수와 확률
8	**E**	2014 AMC 10A 21번	대수
9	**D**	2009 AMC 10A 22번	경우의 수와 확률
10	**E**	2014 AMC 10B 23번	기하

1 정수론

출처: 2021 AMC 10B 13번

> n은 양의 정수이고 d는 한 자리 숫자이다. n진법으로 나타낸 수 $\underline{32d}$의 값은 263이고, n진법으로 나타낸 수 $\underline{324}$의 값은 6진법으로 나타낸 수 $\underline{11d1}$의 값과 같다. $n+d$의 값은?
>
> **(A)** 10 **(B)** 11 **(C)** 13 **(D)** 15 **(E)** 16

핵심 아이디어. 각 수를 밑의 거듭제곱의 합으로 써 봅시다. n진법 수 $\underline{32d}$와 $\underline{324}$는 마지막 자리만 다르므로, 두 식을 빼면 모든 n이 한꺼번에 사라집니다.

1단계. n진법에서 $\underline{32d} = 3n^2 + 2n + d$이므로 다음이 성립합니다.

$$3n^2 + 2n + d = 263.$$

2단계. n진법에서 $\underline{324} = 3n^2 + 2n + 4$입니다. 6진법에서는 다음과 같습니다.

$$\underline{11d1} = 1 \cdot 6^3 + 1 \cdot 6^2 + d \cdot 6 + 1 = 216 + 36 + 6d + 1 = 253 + 6d.$$

따라서 $3n^2 + 2n + 4 = 253 + 6d$입니다.

3단계. 첫째 식에서 둘째 식을 빼면 $d - 4 = 263 - (253 + 6d) = 10 - 6d$입니다. 따라서 $7d = 14$이고 $d = 2$입니다(6진법에서도 쓸 수 있는 숫자입니다).

4단계. 이제 $3n^2 + 2n + 2 = 263$이므로 $3n^2 + 2n = 261$, 즉 $n(3n+2) = 261 = 9 \cdot 29$입니다. $n = 9$를 넣어 보면 $9 \cdot 29 = 261$입니다. $n(3n+2)$는 n이 커질수록 커지므로 양의 해는 이것 하나뿐입니다. (숫자 4가 쓰이려면 $n > 4$여야 하는데, $n = 9$는 이를 만족합니다.)

따라서 $n + d = 9 + 2 = 11$입니다.

정답: (B) 11

2 기하

출처: 2022 AMC 10A 15번

> 변의 길이가 $AB = 7, BC = 24, CD = 20, DA = 15$인 사각형 $ABCD$가 원에 내접한다. 원의 내부이면서 사각형의 외부인 영역의 넓이는 $\frac{a\pi - b}{c}$ 꼴로 나타낼 수 있다. 여기서 a, b, c는 양의 정수이고, a와 c는 공통인 소인수를 갖지 않는다. $a + b + c$의 값은?
>
> **(A)** 260 **(B)** 855 **(C)** 1235 **(D)** 1565 **(E)** 1997

핵심 아이디어. 원의 반지름이 필요한데, 변의 길이들이 수상하게도 피타고라스 수처럼 보입니다. $7^2 + 24^2 = 625 = 25^2$이고 $15^2 + 20^2 = 625 = 25^2$입니다. 이것은 대각선 $\overline{AC}$의 길이가 25이고 지름이라는 것을 암시합니다. 코사인법칙과, 원에 내접하는 사각형의 성질 $\angle B + \angle D = 180^\circ$를 이용해 이를 증명해 봅시다.

1단계. 대각선 $\overline{AC}$는 $ABCD$를 $\triangle ABC$와 $\triangle ADC$로 나눕니다. 각 삼각형에서 코사인법칙을 쓰면 다음과 같습니다.

$$AC^2 = 7^2 + 24^2 - 2 \cdot 7 \cdot 24 \cos B = 625 - 336 \cos B,$$

$$AC^2 = 15^2 + 20^2 - 2 \cdot 15 \cdot 20 \cos D = 625 - 600 \cos D.$$

$ABCD$는 원에 내접하므로 $\angle B + \angle D = 180^\circ$이고, 따라서 $\cos D = -\cos B$입니다. 두 식을 같게 놓으면 $-336 \cos B = 600 \cos B$이므로 $\cos B = 0$입니다.

2단계. 따라서 $\angle B = \angle D = 90^\circ$이고 $AC = 25$입니다. 원주각이 직각이면 그 각이 마주 보는 현은 지름이므로 $\overline{AC}$는 지름이고, 반지름은 $\frac{25}{2}$, 원의 넓이는 $\pi \left(\frac{25}{2}\right)^2 = \frac{625\pi}{4}$입니다.

3단계. 사각형은 직각을 낀 두 변의 길이가 각각 $7, 24$와 $15, 20$인 두 직각삼각형으로 이루어져 있습니다.

$$[ABCD] = \tfrac{1}{2} \cdot 7 \cdot 24 + \tfrac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 = 84 + 150 = 234.$$

4단계. 원의 내부이면서 $ABCD$의 외부인 영역의 넓이는 다음과 같습니다.

$$\frac{625\pi}{4} - 234 = \frac{625\pi - 936}{4}.$$

여기서 $625 = 5^4$과 $4 = 2^2$은 공통인 소인수가 없으므로 $a = 625$, $b = 936$, $c = 4$이고, $a + b + c = 1565$입니다.

주의. $AC = 25$를 지름이 아닌 **반지름**으로 잡으면 넓이가 $625\pi - 234$가 되어 $a + b + c = 860$인데, 이것은 선택지에 없습니다. 원에 내접하는 직각삼각형의 빗변이 지름입니다.

정답: (D) 1565

3 대수

출처: 2010 AMC 10B 15번

> 50문항으로 된 객관식 수학 경시대회에서 학생은 정답 하나에 4점, 비워 둔 답 하나에 0점, 오답 하나에 -1점을 받는다. 제시의 이 대회 총점은 99점이었다. 제시가 맞혔을 수 있는 문항 수의 최댓값은?
>
> **(A)** 25 **(B)** 27 **(C)** 29 **(D)** 31 **(E)** 33

핵심 아이디어. 25개를 넘어서 하나 더 맞힐 때마다 점수를 99로 맞추려면 그만큼 오답으로 "값을 치러야" 하고, 오답도 문항을 차지합니다. 결국 우리를 막는 것은 50문항이라는 한계이므로, 이것을 부등식으로 써 봅시다.

1단계. 맞힌 문항 수를 x, 틀린 문항 수를 y라 합시다. 점수에서 $4x - y = 99$이므로 $y = 4x - 99$입니다. 답한 문항 수는 50을 넘을 수 없으므로 $x + y \le 50$입니다.

2단계. 대입하면 $x + (4x - 99) \le 50$이므로 $5x \le 149$, 즉 $x \le 29.8$입니다. x는 정수이므로 $x \le 29$입니다.

3단계. 29가 실제로 가능한지 확인합니다. 오답은 $y = 4 \cdot 29 - 99 = 116 - 99 = 17$개이고, $29 + 17 = 46 \le 50$이므로 4문항은 비워 둡니다. 점수는 $116 - 17 = 99$입니다. 하나 더 맞혀 $x = 30$이 되면 $y = 21$이 필요하고 모두 51문항이 되므로 너무 많습니다.

주의. 가장 먼저 떠오르는 조합은 25개 정답, 1개 오답$(100 - 1 = 99)$으로 (A)입니다. 가능한 조합이긴 하지만 최댓값은 아닙니다. 문항을 더 많이 오답으로 돌리면 x를 29까지 올릴 수 있습니다.

정답: (C) 29

---

4 경우의 수와 확률

출처: 2020 AMC 10B 17번

> 10명의 사람이 원 위에 같은 간격으로 서 있다. 각 사람은 나머지 9명 중 정확히 3명을 아는데, 바로 자신의 양옆에 서 있는 2명과 원의 정반대편에 서 있는 한 사람이다. 10명이 5개의 짝으로 나뉘되 각 짝의 두 사람이 서로 아는 사이가 되도록 하는 방법의 수는?
>
> **(A)** 11 **(B)** 12 **(C)** 13 **(D)** 14 **(E)** 15

핵심 아이디어. 각 짝은 이웃한 두 사람이거나 정반대편에 선 두 사람입니다. 짝짓기를 **정반대 짝을 몇 개 쓰는지**에 따라 분류합시다. 정반대 짝이 정해지면 나머지 사람은 이웃과 짝을 지어야 하고, 이것은 세기 쉽습니다.

원을 따라 사람들에게 $0, 1, \ldots, 9$의 번호를 붙입니다. 다섯 개의 정반대 짝은 다음과 같습니다.

$$\{0,5\}, \quad \{1,6\}, \quad \{2,7\}, \quad \{3,8\}, \quad \{4,9\};$$

정반대 짝 $\{i, i+5\}$를 "지름 i"라고 부릅시다.

핵심 사실. 지름 몇 개를 쓰고 나면, 남은 사람들은 원을 따라 연속해서 서 있는 사람들의 구간으로 나뉩니다. 한 구간 안에서는 이웃끼리 짝을 지어야 하는데, 이것은 구간의 인원이 짝수일 때만 가능하고, 그때 방법은 정확히 한 가지입니다(처음 두 사람, 그다음 두 사람, ... 하는 식으로 짝을 짓습니다).

지름을 쓰지 않을 때. 10명 모두가 원 전체를 따라 이웃과 짝을 짓습니다. $\{0,1\},\{2,3\},\dots$ 또는 $\{1,2\},\{3,4\},\dots,\{9,0\}$의 2가지입니다.

지름이 하나일 때. 지름을 고르는 방법은 5가지입니다. 예를 들어 0과 5를 빼면 $1,2,3,4$와 $6,7,8,9$의 두 구간이 남고, 각 구간은 4명이므로 한 가지 방법으로 짝을 짓습니다. 따라서 5가지입니다.

지름이 둘 또는 넷일 때. 사용한 지름을 $i_1 < \cdots < i_k$(0부터 4까지의 수)라 합시다. 원을 따라 돌면 빠진 사람은 $i_1,\dots,i_k,i_1+5,\dots,i_k+5$입니다. i_j와 i_{j+1} 사이의 구간에는 $i_{j+1}-i_j-1$명이 있고, i_k와 i_1+5 사이의 구간에는 i_1+5-i_k-1명이 있습니다. 이들이 모두 짝수가 되려면 다음 k개의 간격이 모두 홀수여야 합니다.

$$i_2-i_1,\ \dots,\ i_k-i_{k-1},\ i_1+5-i_k$$

이 간격들의 합은 정확히 5로 홀수입니다. 그런데 k개의 홀수의 합이 홀수가 되는 것은 k가 홀수일 때뿐입니다. 따라서 $k=2$와 $k=4$는 불가능합니다.

지름이 셋일 때. 이제 세 간격은 모두 홀수이고 합이 5이므로, 순서를 생각하지 않으면 $1,1,3$입니다. 즉 0–4를 원형으로 읽을 때(4 다음에 0이 오도록) 고른 세 지름이 연속해야 하며, $\{0,1,2\}$나 $\{4,0,1\}$이 그 예입니다. 이런 선택은 5가지입니다. $\{0,1,2\}$의 경우 남은 구간은 $3,4$와 $8,9$이고, 각각 한 가지 방법으로 짝을 짓습니다. 따라서 5가지입니다.

지름이 다섯일 때. 모든 사람이 정반대편 사람과 짝을 짓는 1가지입니다.

합계. $2+5+5+1=13$입니다.

> **주의.** 10명이 이루는 원 전체에서 모두 이웃끼리 짝짓는 방법은 한 가지가 아니라 **두** 가지입니다. 사람 0부터 짝을 지을 수도 있고, 사람 1부터 지을 수도 있습니다. 하나만 세면 $1+5+5+1=12$로 (B)가 됩니다.

정답: (C) 13

5 기하

출처: 2018 AMC 10B 17번

> 직사각형 $PQRS$에서 $PQ = 8$, $QR = 6$이다. 점 A와 B는 PQ 위에, 점 C와 D는 QR 위에, 점 E와 F는 RS 위에, 점 G와 H는 SP 위에 있고, $AP = BQ < 4$이며 볼록팔각형 $ABCDEFGH$는 모든 변의 길이가 같다. 이 팔각형의 한 변의 길이는 $k + m\sqrt{n}$ 꼴로 나타낼 수 있다. 단, k, m, n은 정수이고 n은 어떤 소수의 제곱으로도 나누어떨어지지 않는다. $k + m + n$의 값은?
>
> **(A)** 1 **(B)** 7 **(C)** 21 **(D)** 92 **(E)** 106

핵심 아이디어. 팔각형은 직사각형의 네 귀퉁이를 직각삼각형 모양으로 잘라 낸 것입니다. 잘라 낸 삼각형의 직각을 낀 두 변에 이름을 붙이고, "모든 변의 길이가 s로 같다"를 식으로 씁시다. 비스듬한 변은 피타고라스 정리로 나타냅니다.

1단계: 잘라 낸 네 귀퉁이는 합동입니다. 한 변의 길이를 s, $x = AP = BQ$라 합시다. $PQ = AP + AB + BQ = 2x + s = 8$이므로 $x = \frac{8-s}{2}$입니다.

직각삼각형 APH와 BQC는 빗변이 모두 s이고 한 변이 x이므로, 나머지 한 변의 길이도 같습니다. 이를 $PH = QC = y$라 합시다. 변 QR 위에서 $DR = 6 - y - s$이고, 변 SP 위에서도 $GS = 6 - y - s$입니다. 따라서 R과 S에 있는 직각삼각형은 빗변이 s이고 한 변 $DR = GS$가 같으므로 $RE = SF$입니다. $RE + EF + FS = 8$이고 $EF = s$이므로 이 두 길이는 각각 $\frac{8-s}{2} = x$이고, 따라서 $DR = GS = \sqrt{s^2 - x^2} = y$입니다. 그러므로 네 직각삼각형은 모두 긴 변을 따라 길이 x, 짧은 변을 따라 길이 y인 두 변을 가집니다.

2단계: 변의 길이가 같습니다. 가로 변, 세로 변, 비스듬한 변의 길이는 각각 $8 - 2x$, $6 - 2y$, $\sqrt{x^2 + y^2}$이므로

$$8 - 2x = 6 - 2y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

첫 번째 등식에서 $y = x - 1$입니다. 양 끝의 두 식이 같다는 등식을 제곱하면

$$(8 - 2x)^2 = x^2 + (x - 1)^2 \implies 64 - 32x + 4x^2 = 2x^2 - 2x + 1,$$

즉 $2x^2 - 30x + 63 = 0$입니다.

3단계: 풀기. 근의 공식에 의해 $x = \dfrac{30 \pm \sqrt{900 - 504}}{4} = \dfrac{30 \pm 6\sqrt{11}}{4} = \dfrac{15 \pm 3\sqrt{11}}{2}$입니다. $x < 4$이므로 빼기 부호를 택하면 $x = \frac{15-3\sqrt{11}}{2} \approx 2.53$이고, 이때 $y = x - 1 \approx 1.53 > 0$이므로 팔각형이 실제로 존재합니다.

4단계. 한 변의 길이는 $s = 8 - 2x = 8 - (15 - 3\sqrt{11}) = -7 + 3\sqrt{11} \approx 2.95$입니다. 따라서 $k = -7$, $m = 3$, $n = 11$이고

$$k + m + n = -7 + 3 + 11 = 7.$$

주의. 한 변의 길이는 $3\sqrt{11} - 7$로 쓰는 것이 자연스러워서, 7, 3, 11을 그대로 읽어 더한 21, 즉 (C)를 고르기 쉽습니다. 꼴이 $k + m\sqrt{n}$이므로 상수항은 7이 아니라 $k = -7$입니다.

정답: (B) 7

6 대수

출처: 2024 AMC 10A 19번

> 등비수열의 처음 세 항은 정수 a, 720, b이고, $a < 720 < b$이다. b의 값이 될 수 있는 가장 작은 수의 각 자리의 숫자의 합은?
>
> **(A)** 9 **(B)** 12 **(C)** 16 **(D)** 18 **(E)** 21

핵심 아이디어. 등비수열에서 가운데 항의 제곱은 양옆 항의 곱과 같으므로 $ab = 720^2$입니다. 그러면 문제는 정수론 문제로 바뀝니다. b는 720^2의 **약수**여야 하고, 우리는 720보다 큰 약수 중 가장 작은 것을 찾으면 됩니다.

1단계. 핵심 등식. 공비를 r이라 하면 $720 = ar$, $b = 720r$이므로

$$ab = \frac{720}{r} \cdot 720r = 720^2.$$

또한 $r > 0$입니다. 공비가 음수이면 b가 음수가 되는데, $b > 720$이기 때문입니다. 따라서 a와 b는 양수입니다.

2단계. 바꾸어 말하기. $a = \dfrac{720^2}{b}$가 정수여야 하므로 b는 720^2의 약수여야 합니다. 거꾸로, b가 $b > 720$인 720^2의 약수이면 $a = \dfrac{720^2}{b}$는 720보다 작은 양의 정수이고, $a, 720, b$는 등비수열을 이룹니다. 따라서 720 **보다 큰** 720^2 **의 약수 중 가장 작은 것**을 찾으면 됩니다.

3단계. 720 바로 위에서 찾기. 소인수분해하면 $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$이므로

$$720^2 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2.$$

약수는 소수 $2, 3, 5$만 쓸 수 있고, 2는 최대 여덟 개, 3은 최대 네 개, 5는 최대 두 개까지 쓸 수 있습니다. 721부터 768까지의 수 중 2, 3, 5만으로 이루어진 수는 다음과 같습니다.

$$729 = 3^6, \qquad 750 = 2 \cdot 3 \cdot 5^3, \qquad 768 = 2^8 \cdot 3.$$

729는 3이 너무 많고 750은 5가 너무 많지만, $768 = 2^8 \cdot 3$은 조건에 맞습니다.

4단계. 마무리. 따라서 가장 작은 b는 768이고, 공비는 $\frac{768}{720} = \frac{16}{15}$, $a = \frac{720^2}{768} = 675$입니다. 확인하면 $675 \cdot \frac{16}{15} = 720$, $720 \cdot \frac{16}{15} = 768$입니다. ✓

각 자리의 숫자의 합은 $7 + 6 + 8 = 21$입니다.

주의. 공비가 정수일 필요는 없습니다. 정수라고 가정하면 가장 작은 공비는 $r = 2$이고, $b = 1440$, 각 자리의 숫자의 합은 $1 + 4 + 4 + 0 = 9$, 즉 선택지 (A)가 됩니다. $\frac{16}{15}$ 같은 분수 공비를 쓰면 b가 훨씬 작아집니다.

정답: (E) 21

7 경우의 수와 확률

출처: 2021 가을 AMC 10B 21번

> 변의 개수가 $5, 6, 7, 8$인 정다각형들이 같은 원에 내접한다. 어느 두 다각형도 꼭짓점을 공유하지 않으며, 어느 세 변도 한 점에서 만나지 않는다. 원의 내부에서 이 다각형들의 두 변이 만나는 점은 모두 몇 개인가?
>
> **(A)** 52 **(B)** 56 **(C)** 60 **(D)** 64 **(E)** 68

핵심 아이디어. **같은** 볼록다각형의 두 변은 절대 교차하지 않으므로, 모든 교점은 서로 다른 두 다각형의 쌍에서 생깁니다. 그런 쌍은 $\binom{4}{2} = 6$개뿐이므로, $k < n$인 k각형과 n각형 한 쌍의 교점 수를 세어 더하면 됩니다. 머릿속에 그릴 그림은 이렇습니다. 작은 다각형의 각 변은 원에서 얇은 조각(활꼴)을 잘라 내고, 큰 다각형은 반드시 그 조각 안으로 파고듭니다.

1단계: 두 현은 언제 교차할까? 모든 변은 원의 현입니다. 끝점이 네 개 모두 다른 두 현이 (원의 내부에서) 교차할 필요충분조건은 끝점들이 원 위에서 번갈아 놓이는 것, 즉 첫 번째 현이 나누는 두 호 위에 두 번째 현의 끝점이 하나씩 놓이는 것입니다. 어떤 다각형도 꼭짓점을 공유하지 않으므로 모든 끝점은 서로 다릅니다.

2단계: 작은 다각형의 변 하나. k각형의 한 변 s를 잡읍시다. 이 변이 잘라 내는 호는 $\frac{360^\circ}{k}$이고, n각형의 이웃한 꼭짓점 사이의 간격은 $\frac{360^\circ}{n}$입니다. $k < n$이므로 호가 이 간격보다 길어서, 호 위에는 n각형의 꼭짓점이 적어도 하나 있습니다. 반면 꼭짓점이 모두 그 호 위에 있을 수는 없습니다(원의 나머지 부분이 훨씬 더 길기 때문입니다). 이 호 위에 있는 n각형의 꼭짓점들은 연속해 있어 하나의 묶음을 이루고, n각형의 둘레는 한 변을 통해 이 묶음으로 들어갔다가 다른 한 변을 통해 나옵니다.

1단계에 의하여, n각형의 변이 s와 교차하는 것은 그 변의 한 끝점은 호 위에, 다른 끝점은 호 밖에 있을 때뿐입니다. n각형을 한 바퀴 돌면 이런 일은 정확히 두 번, 묶음으로 들어갈 때 한 번과 나올 때 한 번 일어납니다. 따라서 k각형의 각 변은 n각형과 정확히 2개의 점에서 만납니다.

3단계: 한 쌍. k각형의 변은 k개이므로, 이 쌍에서 생기는 교점은 $2k$개입니다. 여기서 k는 **작은** 다각형의 변의 개수입니다.

4단계: 여섯 쌍을 모두 더하기. 어느 세 변도 한 점에서 만나지 않으므로 이 교점들은 모두 서로 다른 점입니다.

- 오각형과 6각형, 7각형, 8각형 각각: $3 \cdot (2 \cdot 5) = 30$.
- 육각형과 7각형, 8각형 각각: $2 \cdot (2 \cdot 6) = 24$.
- 칠각형과 팔각형: $2 \cdot 7 = 14$.

합은 $30 + 24 + 14 = 68$입니다.

정답: (E) 68

8 대수

출처: 2014 AMC 10A 21번

> 양의 정수 a, b에 대하여 $y = ax + 5$의 그래프와 $y = 3x + b$의 그래프가 x축과 같은 점에서 만난다. 이러한 교점의 x좌표가 될 수 있는 값을 모두 더한 값은?
>
> **(A)** -20 **(B)** -18 **(C)** -15 **(D)** -12 **(E)** -8

핵심 아이디어. 직선은 $y = 0$인 곳에서 x축과 만납니다. 두 x절편을 같다고 놓으면 기하 문제가 양의 정수 a, b에 관한 하나의 방정식이 됩니다. 곱이 일정한 수와 같다는 방정식은 해가 유한 개뿐입니다.

1단계. 각 식에 $y = 0$을 대입합니다.

$$0 = ax + 5 \implies x = -\frac{5}{a}, \qquad 0 = 3x + b \implies x = -\frac{b}{3}.$$

2단계. 두 절편이 같은 점이므로 다음이 성립합니다.

$$\frac{5}{a} = \frac{b}{3} \quad \implies \quad ab = 15.$$

3단계. a와 b가 양의 정수이므로 a는 15의 양의 약수이어야 하고, 그러면 $b = 15/a$입니다. 가능한 쌍은 다음과 같습니다.

$$(a, b) = (1, 15),\ (3, 5),\ (5, 3),\ (15, 1).$$

4단계. 이때 공통인 절편 $x = -5/a$는 각각 다음과 같습니다.

$$-5, \quad -\frac{5}{3}, \quad -1, \quad -\frac{1}{3}.$$

이 네 점은 모두 다르고, 그 합은 다음과 같습니다.

$$-5 - 1 - \frac{5}{3} - \frac{1}{3} = -6 - \frac{6}{3} = -6 - 2 = -8.$$

주의. x좌표가 정수여야 한다는 조건은 어디에도 없습니다. $-\frac{5}{3}$와 $-\frac{1}{3}$을 빠뜨리면 합이 -6이 되는데, 이것은 선택지에 없습니다. 무언가를 놓쳤다는 신호입니다.

정답: (E) -8

9 경우의 수와 확률

출처: 2009 AMC 10A 22번

> 두 개의 정육면체 주사위에는 각각 떼어 낼 수 있는 숫자 1부터 6까지가 붙어 있다. 두 주사위에 붙은 열두 개의 숫자를 떼어 내어 주머니에 넣은 다음, 하나씩 꺼내어 정육면체의 면에 한 면에 숫자 하나씩 임의로 다시 붙인다. 그런 다음 두 주사위를 던져 두 윗면의 수를 더한다. 그 합이 7일 확률은?
>
> **(A)** $\frac{1}{9}$ **(B)** $\frac{1}{8}$ **(C)** $\frac{1}{6}$ **(D)** $\frac{2}{11}$ **(E)** $\frac{1}{5}$

핵심 아이디어. 숫자를 다시 붙이는 과정이 복잡해 보이지만, 중요한 것은 열두 개의 숫자 조각 중 어느 두 개가 윗면에 오느냐뿐입니다. 조각은 임의로 붙여졌고 주사위도 임의로 던져지므로, 그 두 조각은 주머니에서 임의로 고른 서로 다른 두 조각일 뿐입니다. 그러니 주사위가 아니라 조각을 생각합시다.

1단계 (실제로 무엇이 무작위인가). 열두 조각을 실제 물건으로 생각합시다. 1이 두 개, 2가 두 개, ..., 6이 두 개입니다. 임의로 붙이고 던진 뒤 첫 번째 주사위의 윗면에는 조각 하나가 있고, 열두 조각 각각이 그 자리에 올 가능성은 모두 같습니다. 두 번째 주사위의 윗면에는 **다른** 조각이 있고, 첫 번째 조각이 정해졌을 때 나머지 열한 조각 각각이 올 가능성은 모두 같습니다.

2단계 (첫 번째 주사위로 조건 걸기). 첫 번째 주사위에 N이 나왔다고 합시다. 합이 7이 되려면 두 번째 주사위에는 $7-N$이 나와야 합니다. 7이 홀수이므로 $7-N \neq N$이고, 따라서 $7-N$이 적힌 두 조각은 모두 남은 열한 조각 안에 있습니다.

3단계. 그러므로 N이 무엇이든 두 번째 조각에 $7-N$이 적혀 있을 확률은 $\frac{2}{11}$입니다. 따라서 합이 7일 확률은 $\frac{2}{11}$입니다.

확인 (세어 보기). (첫 번째 주사위의 윗면, 두 번째 주사위의 윗면)에 오는 서로 다른 두 조각의 순서쌍은 $12 \cdot 11 = 132$가지이고, 모두 같은 가능성을 가집니다. 첫 번째 조각을 고르는 12가지 각각에 대해 알맞은 짝은 정확히 2개이므로 조건을 만족하는 순서쌍은 24개이고, $\frac{24}{132} = \frac{2}{11}$입니다.

보통 주사위와 비교해 봅시다. 보통 주사위에서는 두 번째 주사위가 첫 번째와 독립이므로 $7-N$이 나올 확률이 $\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$이고, 36가지 결과 중 6가지에서 합이 7입니다. 여기서는 두 번째 수를 N이 하나 빠진 주머니에서 꺼내는데, 빠진 그 수는 결코 도움이 될 수 없는 유일한 수입니다. 그래서 확률이 $\frac{2}{12}$에서 $\frac{2}{11}$로 **올라갑니다**.

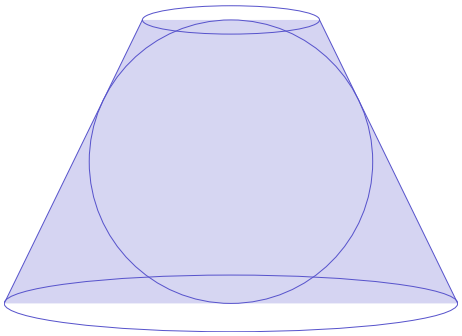
주의. 숫자를 다시 붙이는 과정을 무시하고 보통 주사위 두 개처럼 답하면 $\frac{1}{6}$로 선택지 (C)를 고르게 됩니다. 두 윗면의 수를 주머니에서 독립적으로(복원하여) 뽑은 것으로 보아도 똑같이 $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$이 나옵니다. 하지만 두 윗면의 조각은 항상 서로 다른 조각이므로, 비복원 추출입니다.

정답: (D) $\frac{2}{11}$

10 기하

출처: 2014 AMC 10B 23번

구가 그림과 같이 원뿔대에 내접해 있다. 원뿔대의 부피는 구의 부피의 두 배이다. 원뿔대의 윗면의 반지름에 대한 아랫면의 반지름의 비의 값은?



(A) $\frac{3}{2}$ **(B)** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ **(C)** $\sqrt{3}$ **(D)** 2 **(E)** $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

핵심 아이디어. 축을 지나는 평면으로 잘라 봅시다. 단면은 원이 내접한 등변사다리꼴이고, **한 점에서 그은 두 접선의 길이가 같다**는 성질에서 핵심 관계, 즉 구의 반지름의 제곱이 두 밑면의 반지름의 곱과 같다는 사실이 나옵니다. 그러면 부피 조건은 이차방정식이 됩니다.

1단계: 단면. 입체를 축을 지나는 평면으로 자릅니다. 그러면 평행한 두 변의 길이가 $2r$(위)와 $2R$(아래)인 등변사다리꼴과, 네 변에 모두 접하는 반지름 a인 원이 생깁니다. 원이 두 밑변에 모두 접하므로 높이는 $h = 2a$입니다.

2단계: 접선의 길이. 원은 윗변과 아랫변에 각각 그 중점에서 접합니다. 한 점에서 그은 두 접선의 길이는 같으므로, 위쪽 꼭짓점에서 그은 두 접선의 길이는 모두 r이고, 아래쪽 꼭짓점에서 그은 두 접선의 길이는 모두 R입니다. 따라서 비스듬한 옆변의 길이는 $R + r$입니다.

3단계: 피타고라스 정리. 위쪽 꼭짓점에서 아랫변에 수선을 내립니다. 그러면 빗변이 $R + r$, 높이가 $2a$, 가로 변이 $R - r$인 직각삼각형이 생깁니다.

$$(R+r)^2 = (R-r)^2 + (2a)^2 \quad \Longrightarrow \quad 4Rr = 4a^2 \quad \Longrightarrow \quad a^2 = Rr.$$

4단계: 부피 조건. $r = 1$이 되도록 축척을 정합시다. 그러면 $a^2 = R$이고, R이 바로 구하는 비입니다. 원뿔대의 부피는 다음과 같습니다.

$$\frac{\pi h}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right) = \frac{2\pi a}{3}\left(R^2 + R + 1\right).$$

이것을 구의 부피 $\frac{4}{3}\pi a^3$의 두 배와 같게 놓으면 다음을 얻습니다.

$$\frac{2\pi a}{3}\left(R^2 + R + 1\right) = \frac{8\pi a^3}{3} \quad \Longrightarrow \quad R^2 + R + 1 = 4a^2 = 4R.$$

5단계: 풀기. $R^2 - 3R + 1 = 0$에서 $R = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$입니다. 아랫면이 더 크므로 $R > 1$이고, 따라서

$$R = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \approx 2.618.$$

확인해 봅시다. $r = 1$, $R = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$이면 $a = \sqrt{R} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$이고, 원뿔대의 부피를 구의 부피로 나누면 정확히 2가 됩니다. ✓

> **주의.** 구의 반지름에 대한 식을 세우면($r = 1$로 두고) $a^4 - 3a^2 + 1 = 0$과 $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$를 얻습니다. 이것은 선택지 (B)이지만, 구의 반지름일 뿐 비 R이 아닙니다. 구하는 비는 $R = a^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$입니다.

정답: (E) $\dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$