AMC 10

제 24 회

하프 모의고사

해설

정답표 • 출처 • 단계별 풀이

10문항 모두 AMC 10 기출(2000–2025)의 13–23번 문항에서 가져와 원래 번호 순서대로 배열한 것입니다. 원문 © Mathematical Association of America.

정답표와 출처

번호	정답	출처	영역
1	**D**	2018 AMC 10B 14번	대수
2	**C**	2023 AMC 10B 15번	정수론
3	**D**	2013 AMC 10A 15번	기하
4	**A**	2019 AMC 10B 16번	기하
5	**D**	2005 AMC 10A 17번	경우의 수와 확률
6	**D**	2025 AMC 10B 19번	기하
7	**C**	2020 AMC 10A 21번	정수론
8	**D**	2023 AMC 10A 21번	대수
9	**B**	2019 AMC 10A 22번	경우의 수와 확률
10	**C**	2015 AMC 10A 23번	대수

1 대수

출처: 2018 AMC 10B 14번

> 양의 정수 2018개로 이루어진 목록에 유일한 최빈값이 있고, 이 최빈값은 정확히 10번 나타난다. 이 목록에 나타날 수 있는 서로 다른 값의 개수의 최솟값은?
>
> **(A)** 202 **(B)** 223 **(C)** 224 **(D)** 225 **(E)** 234

핵심 아이디어. 서로 다른 값을 되도록 적게 쓰려면 각 값을 허용되는 만큼 최대한 많이 반복해야 합니다. 최빈값이 유일하다는 조건 때문에 나머지 값은 각각 최대 9번까지만 쓸 수 있습니다.

1단계 (한계). 목록에 서로 다른 값이 d개 있다고 합시다. 최빈값은 10번 나타납니다. 다른 값은 모두 10번보다 적게(그렇지 않으면 최빈값과 같아지므로), 즉 최대 9번 나타나야 합니다. 따라서 다음이 성립합니다.

$$2018 \le 10 + 9(d-1).$$

이로부터 $9(d-1) \ge 2008$, 즉 $d - 1 \ge \frac{2008}{9} = 223.1\ldots$입니다. $d-1$은 정수이므로 $d - 1 \ge 224$이고, $d \ge 225$입니다.

2단계 (실제로 가능함). 한 값을 10번, 다른 값 223개를 각각 9번, 그리고 또 다른 값 하나를 한 번 씁니다. 그러면

$$10 + 223 \cdot 9 + 1 = 10 + 2007 + 1 = 2018$$

개의 수가 되고, 10번 나타나는 유일한 최빈값이 있으며, 서로 다른 값은 $1 + 223 + 1 = 225$개입니다.

두 단계를 합치면 가능한 최솟값은 225입니다.

주의. 1단계의 224는 최빈값을 **제외한** 값의 개수입니다. 최빈값 자체를 더하는 것을 잊으면 224, 즉 (C)를 고르게 됩니다.

정답: (D) 225

2 정수론

출처: 2023 AMC 10B 15번

> $m \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 5! \cdots 16!$이 완전제곱수가 되도록 하는 가장 작은 양의 정수 m의 값은?
>
> **(A)** 30 **(B)** 30030 **(C)** 70 **(D)** 1430 **(E)** 1001

핵심 아이디어. 어떤 수가 완전제곱수일 필요충분조건은 모든 소인수의 지수가 짝수인 것이므로, m은 홀수 번 나타나는 소수를 모두 채워 주어야 합니다. 이웃한 팩토리얼은 거의 모든 인수를 공유합니다. $(2k+1)! = (2k)! \cdot (2k+1)$이므로, 둘씩 짝지으면 거대한 제곱 인수를 한꺼번에 떼어 낼 수 있습니다.

1단계: 팩토리얼 짝짓기. 각 k에 대하여 다음이 성립합니다.

$$(2k)!\,(2k+1)! = \big((2k)!\big)^2\,(2k+1).$$

곱을 $(2!\,3!)(4!\,5!)\cdots(14!\,15!)\cdot 16!$로 묶으면 각 쌍은 완전제곱수와 홀수의 곱입니다. 따라서 전체 곱은 완전제곱수에 다음 수를 곱한 것입니다.

$$(3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13\cdot 15)\cdot 16!.$$

2단계: 홀수 나머지. $3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13\cdot 15 = 3^4\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13$입니다. 지수가 홀수인 소수는 7, 11, 13입니다.

3단계: 마지막 팩토리얼. 배수의 개수를 세면 $16! = 2^{15}\cdot 3^6\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13$입니다($2$의 지수: $8+4+2+1=15$, 3의 지수: $5+1=6$, 5의 지수: 3, 7의 지수: 2). 지수가 홀수인 소수는 2, 5, 11, 13입니다.

4단계: 합치기. 두 결과를 곱하면 11과 13은 짝수 번 나타나지만, 2, 5, 7은 여전히 각각 홀수 번 나타납니다. 따라서 m은 $2\cdot 5\cdot 7 = 70$으로 나누어떨어져야 하고, $m = 70$이면 모든 지수가 짝수가 됩니다. 가장 작은 m은 70입니다.

주의. 짝짓기만 하고 짝이 없는 $16!$을 잊으면 $7\cdot 11\cdot 13 = 1001$, 즉 선택지 (E)가 나옵니다. $16!$만 보면 $2\cdot 5\cdot 11\cdot 13 = 1430$, 즉 선택지 (D)가 나옵니다.

정답: (C) 70

3 기하

출처: 2013 AMC 10A 15번

> 삼각형의 두 변의 길이가 10과 15이다. 세 번째 변에 대한 높이의 길이는 주어진 두 변에 대한 높이의 길이의 평균이다. 세 번째 변의 길이는?
>
> **(A)** 6 **(B)** 8 **(C)** 9 **(D)** 12 **(E)** 18

핵심 아이디어. 어느 변과 그 변에 대한 높이를 짝지어도 넓이는 같으므로, (변)×(높이)는 세 변 모두에서 같은 값입니다. 문제가 높이에 대해서만 말하고 있다는 점이, 각 높이를 넓이로 나타내라는 신호입니다.

1단계. 넓이를 K라 합시다. 변 s와 그 변에 대한 높이 h에 대하여 $K = \frac{1}{2}sh$이므로 $h = \frac{2K}{s}$입니다. 따라서

$$h_{10} = \frac{2K}{10} = \frac{K}{5}, \qquad h_{15} = \frac{2K}{15}.$$

2단계. 세 번째 변에 대한 높이는 이 둘의 평균입니다. $\frac{K}{5} = \frac{3K}{15}$로 고쳐 쓰면

$$h_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{3K}{15} + \frac{2K}{15}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5K}{15} = \frac{K}{6}.$$

3단계. 세 번째 변의 길이를 x라 하면 $x \cdot h_3 = 2K$이므로 $x \cdot \frac{K}{6} = 2K$이고 $x = 12$입니다.

세 변의 길이가 $10, 15, 12$인 삼각형은 실제로 존재하므로$(10 + 12 > 15)$ 답은 모순이 없습니다.

다른 풀이. 높이는 변의 길이의 **역수**에 비례하므로, 조건은 $\frac{1}{x}$이 $\frac{1}{10}$과 $\frac{1}{15}$의 평균이라는 뜻입니다. 즉 $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{30} = \frac{1}{12}$입니다. 세 번째 변의 길이는 10과 15의 조화평균입니다.

주의. 높이 대신 변의 길이를 평균하면 12.5가 나오는데, 이것은 선택지에 없습니다. 변이 길수록 높이는 **짧아집니다**.

정답: (D) 12

4 기하

출처: 2019 AMC 10B 16번

> C에서의 각이 직각인 $\triangle ABC$에서 점 D는 $\overline{AB}$의 내부에, 점 E는 $\overline{BC}$의 내부에 있고, $AC = CD$, $DE = EB$이며 비 $AC : DE = 4 : 3$이다. 비 $AD : DB$는?
>
> **(A)** $2 : 3$ **(B)** $2 : \sqrt{5}$ **(C)** $1 : 1$ **(D)** $3 : \sqrt{5}$ **(E)** $3 : 2$

핵심 아이디어. 조건 $AC = CD$와 $DE = EB$에서 이등변삼각형이 두 개 생기는데, 그 밑각이 바로 직각삼각형의 두 예각이고, 두 예각의 합은 90°입니다. 그래서 D에 직각이 생기고, 길이 계산은 피타고라스 정리로 바뀝니다.

비만 중요하므로 $AC = CD = 4$, $DE = EB = 3$이 되도록 그림의 크기를 정합시다. $\triangle ABC$의 두 예각을 $\angle A$, $\angle B$라 하면, $\angle C = 90^\circ$이므로 $\angle A + \angle B = 90^\circ$입니다.

1단계. D에서의 직각. 삼각형 ACD는 $CA = CD$인 이등변삼각형이므로 두 밑각이 같습니다. 즉 $\angle CDA = \angle A$입니다. 삼각형 DEB는 $ED = EB$인 이등변삼각형이므로 $\angle EDB = \angle B$입니다. D는 선분 AB 위에 있으므로, 직선을 따라 D에 모인 세 각의 합은 180°입니다.

$$\angle CDE = 180^\circ - \angle A - \angle B = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

2단계. BC와 AB 구하기. 직각삼각형 CDE에서 $CE = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$입니다. 그러면 $BC = CE + EB = 5 + 3 = 8$이고, $\triangle ABC$에서

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

3단계. AD 구하기. C에서 $\overline{AB}$에 수선 CH를 내립니다. $\triangle ACD$가 이등변삼각형이므로 H는 $\overline{AD}$의 중점입니다. 직각삼각형 AHC와 ACB는 $\angle A$를 공유하므로 닮음이고, $\dfrac{AH}{AC} = \dfrac{AC}{AB}$입니다.

$$AH = \frac{AC^2}{AB} = \frac{16}{4\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}, \qquad AD = 2\,AH = \frac{8}{\sqrt{5}}.$$

4단계. DB와 비 구하기.

$$DB = AB - AD = \frac{20}{\sqrt{5}} - \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}}, \qquad AD : DB = 8 : 12 = 2 : 3.$$

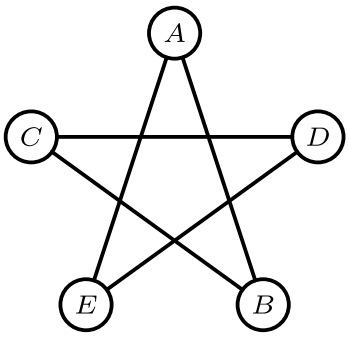
확인. $C = (0,0)$, $A = (0,4)$, $B = (8,0)$, $E = (5,0)$이라 하면, $\overline{AB}$ 위의 점 $D = \left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}\right)$는 $CD = 4$, $DE = 3$을 만족하여 조건에 맞습니다.

정답: (A) $2 : 3$

5 경우의 수와 확률

출처: 2005 AMC 10A 17번

그림과 같은 오각별에서 문자 A, B, C, D, E를 수 3, 5, 6, 7, 9로 하나씩 바꾸어 넣는다. 단, 이 순서대로일 필요는 없다. 선분 AB, BC, CD, DE, EA의 양 끝에 있는 수의 합들은 등차수열을 이룬다. 단, 이 순서대로일 필요는 없다. 이 등차수열의 가운데 항은?



(A) 9 **(B)** 10 **(C)** 11 **(D)** 12 **(E)** 13

핵심 아이디어. 배치를 실제로 찾을 필요는 없습니다. 항이 다섯 개인 등차수열의 가운데 항은 다섯 항의 평균입니다. 그리고 각 문자는 정확히 두 선분의 끝점이므로, 다섯 선분의 합의 **총합**은 정해져 있습니다.

1단계. 각 문자는 선분 AB, BC, CD, DE, EA 중 정확히 두 개에 나타납니다 (예를 들어 A는 AB와 EA에 있습니다). 따라서 다섯 선분의 합을 모두 더하면 모든 수가 두 번씩 더해집니다.

$$2(3+5+6+7+9) = 2 \cdot 30 = 60.$$

2단계. 등차수열의 다섯 항을 $m-2d$, $m-d$, m, $m+d$, $m+2d$로 쓰면 그 합은 $5m$입니다. 따라서 $5m = 60$이고 $m = 12$입니다.

확인. 실제로 이런 배치가 존재합니다. $A=3$, $B=7$, $C=6$, $D=5$, $E=9$로 놓으면 선분의 합은 $10, 13, 11, 14, 12$이고, 순서를 바꾸면 $10, 11, 12, 13, 14$입니다.

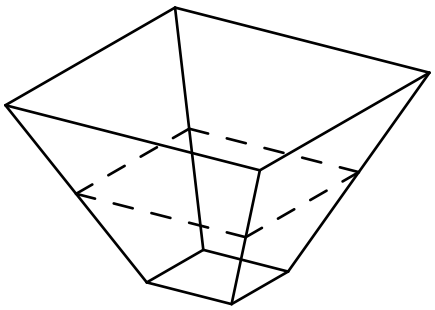
주의. 각 수가 두 번씩 세어진다는 것을 잊으면 총합이 30, 평균이 6이 되는데, 이것은 선택지에 없습니다.

정답: (D) 12

6 기하

출처: 2025 AMC 10B 19번

그림과 같이 어떤 용기는 밑면이 1×1인 정사각형이고, 열린 윗면이 3×3인 정사각형이며, 네 옆면이 합동인 사다리꼴이다. 용기가 비어 있는 상태에서 시작하여, 일정한 속도로 물이 나오는 호스로 사다리꼴의 중간선까지 용기를 채우는 데 35분이 걸린다.



용기의 나머지 부분을 채우는 데 몇 분이 더 걸리는가?

(A) 70 **(B)** 85 **(C)** 90 **(D)** 95 **(E)** 105

핵심 아이디어. 이 용기는 아래쪽 꼭짓점이 잘려 나간, 거꾸로 놓인 정사각뿔입니다. 기울어진 옆면을 잘린 꼭짓점까지 연장하면 모든 부피 문제가 "뿔 빼기 뿔"이 되고, 닮은 뿔의 부피의 비는 크기의 **세제곱**의 비입니다.

1단계. 수평 단면의 한 변의 길이는 바닥의 1에서 꼭대기의 3까지 일정하게 늘어나므로, 중간선에서는 $\frac{1+3}{2} = 2$입니다.

2단계. 기울어진 네 옆면을 아래로 연장하여 한 점에서 만나게 합시다. 그러면 (꼭짓점이 아래를 향한) 서로 닮은 세 개의 포개진 뿔이 생기고, 그 윗면은 한 변의 길이가 1, 2, 3인 정사각형입니다. 닮은 입체의 부피는 크기의 세제곱에 비례하므로, 부피의 비는 다음과 같습니다.

$$1^3 : 2^3 : 3^3 = 1 : 8 : 27.$$

가장 작은 뿔의 부피를 1 **단위**라 합시다.

3단계. 중간선까지의 물은 한 변이 2인 뿔에서 한 변이 1인 뿔을 뺀 것이므로 $8 - 1 = 7$단위입니다. 용기의 나머지 부분은 $27 - 8 = 19$단위입니다.

4단계. 처음 7단위에 35분이 걸리므로, 한 단위에는 $35 \div 7 = 5$분이 걸립니다. 나머지 19단위에는 $19 \cdot 5 = 95$분이 걸립니다.

주의. 중간선은 **높이**의 절반이지만 부피의 절반은 아닙니다. 용기는 위로 갈수록 훨씬 넓기 때문입니다. 나머지도 35분이 걸린다고 생각하면 선택지에조차 없는 답이 나옵니다.

정답: (D) 95

7 정수론

출처: 2020 AMC 10A 21번

> 다음 등식을 만족시키는 음이 아닌 정수의 순증가수열 $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$가 유일하게 존재한다.
>
> $$\frac{2^{289}+1}{2^{17}+1} = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_k}.$$
>
> k의 값은?
>
> **(A)** 117 **(B)** 136 **(C)** 137 **(D)** 273 **(E)** 306

핵심 아이디어. 지수들에 공통인수가 있습니다. $289 = 17 \cdot 17$입니다. $X = 2^{17}$로 놓으면 분수는 $\frac{X^{17}+1}{X+1}$이 되고, 이는 부호가 번갈아 나오는 다항식으로 인수분해됩니다. 문제는 이 수를 이진법으로 나타낼 때 1이 몇 개인지 묻고 있으므로, 번갈아 나오는 합을 이진법 자릿수가 쉽게 보이는 음이 아닌 덩어리들의 합으로 바꿔 씁시다.

1단계: 인수분해. $X = 2^{17}$로 놓으면 $2^{289} = X^{17}$입니다. 17은 홀수이므로 $X^{17}+1$은 $X+1$로 나누어떨어집니다.

$$\frac{X^{17}+1}{X+1} = X^{16} - X^{15} + X^{14} - X^{13} + \cdots + X^2 - X + 1.$$

($(X+1)(X^{16} - X^{15} + \cdots - X + 1)$을 전개하면 가운데 항들이 둘씩 소거되어 $X^{17}+1$만 남습니다.)

2단계: 둘씩 묶기. 마지막 $+1$ 앞의 16개 항은 8개의 쌍을 이룹니다.

$$(X^{16} - X^{15}) + (X^{14} - X^{13}) + \cdots + (X^2 - X) + 1.$$

각 쌍은 $j = 1, 2, \ldots, 8$에 대하여 $X^{2j} - X^{2j-1} = X^{2j-1}(X-1) = 2^{17(2j-1)}\,(2^{17}-1)$ 꼴입니다.

3단계: 이진법 자릿수 읽기. 수 $2^{17}-1$은 이진법으로 1이 17개 이어진 수입니다. 여기에 $2^{17(2j-1)}$을 곱하면 자리만 옮겨지므로, j번째 쌍은 $34j-17$번째 자리부터 $34j-1$번째 자리까지 1이 17개 이어진 덩어리입니다. 이웃한 j의 덩어리들 사이에는 빈자리가 있고(j번째 덩어리는 $34j-1$에서 끝나고, $j+1$번째 덩어리는 $34j+17$에서 시작합니다), 마지막 $+1$은 0번째 자리로, 17–33번째 자리에 있는 첫 덩어리보다 아래에 있습니다. 겹치는 곳이 없으므로 받아올림도 없습니다.

4단계. 따라서 이진법 전개에는 1이 $8 \cdot 17 + 1 = 137$개 있고, k는 바로 이 1의 개수이므로 $k = 137$입니다.

주의. 마지막 $+1$을 잊으면 $8 \cdot 17 = 136$이 되어 선택지 (B)를 고르게 됩니다.

정답: (C) 137

8 대수

출처: 2023 AMC 10A 21번

> 최고차항의 계수가 1이고 다음을 모두 만족시키는 차수가 가장 낮은 다항식 $P(x)$가 유일하게 존재한다.
>
> 1은 $P(x)-1$의 근이고, 2는 $P(x-2)$의 근이고, 3은 $P(3x)$의 근이고, 4는 $4P(x)$의 근이다.
>
> $P(x)$의 근은 하나를 제외하고 모두 정수이다. 정수가 아닌 그 하나의 근을 서로소인 양의 정수 m, n에 대하여 $\frac{m}{n}$으로 나타낼 때, $m+n$의 값은?
>
> **(A)** 41 **(B)** 43 **(C)** 45 **(D)** 47 **(E)** 49

핵심 아이디어. 네 조건은 P의 값에 대한 진술을 변장시킨 것입니다. 각 수를 해당 식에 대입하여 모든 조건을 "P(어떤 수) = 값" 꼴로 바꿉시다. 그러면 세 조건은 P의 근이 어디인지 알려 주고, 네 번째 조건이 남은 부분을 결정합니다.

1단계: 조건 해독하기.

- 1은 $P(x)-1$의 근: $P(1)-1=0$이므로 $P(1)=1$.
- 2는 $P(x-2)$의 근: $P(2-2)=0$이므로 $P(0)=0$.
- 3은 $P(3x)$의 근: $P(3\cdot 3)=0$이므로 $P(9)=0$.
- 4는 $4P(x)$의 근: $4P(4)=0$이므로 $P(4)=0$.

2단계: 차수. P는 서로 다른 세 근 0, 4, 9를 가지므로 차수가 적어도 3입니다. 이 근들을 갖는 최고차항의 계수가 1인 삼차식은 $x(x-4)(x-9)$뿐인데, $x=1$에서의 값은 다음과 같습니다.

$$1\cdot(-3)\cdot(-8)=24\neq 1.$$

따라서 삼차식으로는 안 되고, 차수는 적어도 4입니다.

3단계: 사차식. 근 $0,4,9$를 갖고 최고차항의 계수가 1인 사차식은 어떤 수 c에 대하여

$$P(x)=x(x-4)(x-9)(x-c)$$

꼴입니다. 마지막 조건에서

$$P(1)=24(1-c)=1,\quad \text{이므로}\quad 1-c=\frac{1}{24},\quad c=\frac{23}{24}.$$

이 c가 조건을 만족시키는 유일한 값이므로, 문제에서 말한 대로 P는 유일합니다.

4단계: 답 읽기. 근은 0, 4, 9, $\frac{23}{24}$이고, 정수가 아닌 것은 이미 기약분수인 $\frac{23}{24}$뿐입니다. 따라서 $m+n=23+24=47$입니다.

주의. "2는 $P(x-2)$의 근"을 $P(2)=0$으로 읽으면 근이 $2,4,9$가 됩니다. 그러면 $P(1)=(-1)(-3)(-8)(1-c)=-24(1-c)=1$이므로 $c=\frac{25}{24}$, $m+n=49$, 즉 (E)가 됩니다. 수는 항상 식 **전체**에 대입해야 합니다. $x=2$이면 $x-2=0$입니다.

정답: (D) 47

9 경우의 수와 확률

출처: 2019 AMC 10A 22번

> 0 이상 1 이하의 실수를 다음과 같은 방법으로 고른다. 공정한 동전을 던진다. 앞면이 나오면 동전을 한 번 더 던져서, 두 번째에 앞면이 나오면 고른 수는 0이고 뒷면이 나오면 1이다. 한편 처음 던진 동전이 뒷면이면, 닫힌 구간 $[0,1]$에서 수를 균등하게 임의로 고른다. 이 방법으로 두 실수 x와 y를 서로 독립적으로 고른다. $|x-y|>\frac{1}{2}$일 확률은?
>
> **(A)** $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{7}{16}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{9}{16}$ **(E)** $\frac{2}{3}$

핵심 아이디어. 각 수는 정확히 0, 정확히 1, 또는 $[0,1]$에서 균등하게 고른 수, 이렇게 세 종류 중 하나입니다. x와 y의 종류로 경우를 나누면, 두 수가 모두 연속적인 경우만 단위정사각형에서의 기하학적 확률 문제가 됩니다.

1단계. 종류. 수가 0일 확률은 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, 1일 확률은 $\frac{1}{4}$, $[0,1]$에서 균등하게 고른 수일 확률은 $\frac{1}{2}$입니다. 따라서 수가 "이산"(0 또는 1)일 확률은 $\frac{1}{2}$이고, 아래 네 가지 조합의 확률은 각각 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$입니다.

경우 1: 둘 다 이산. x, y는 각각 0 또는 1이고 두 값의 확률은 같습니다. 이때 $|x-y|$는 0 또는 1이고, $|x-y|>\frac{1}{2}$인 것은 정확히 $x\neq y$일 때이므로 확률은 $\frac{1}{2}$입니다.

경우 2: x는 이산, y는 균등. $x=0$이면 $y>\frac{1}{2}$여야 하고, $x=1$이면 $y<\frac{1}{2}$여야 합니다. 어느 쪽이든 확률은 $\frac{1}{2}$입니다.

경우 3: x는 균등, y는 이산. 경우 2와 대칭이므로 확률은 $\frac{1}{2}$입니다.

경우 4: 둘 다 균등. 점 (x,y)는 단위정사각형에서 균등하게 분포합니다. 영역 $|x-y|>\frac{1}{2}$은 $(1,0)$과 $(0,1)$ 근처의 두 구석 삼각형이고, 각각 직각을 낀 두 변의 길이가 $\frac{1}{2}$이므로 넓이의 합은 $2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$입니다. 확률은 $\frac{1}{4}$입니다.

종합. 각 경우의 가중치는 $\frac{1}{4}$입니다.

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{4}=\frac{7}{16}.$$

주의. 경우 1에서 "0과 1은 멀리 떨어져 있으니 이 경우는 항상 성립한다"고 생각하기 쉽습니다. 하지만 x와 y가 둘 다 0이거나 둘 다 1일 수도 있습니다. 경우 1의 확률을 1로 세면 $\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{16}$, 즉 (D)가 됩니다.

정답: (B) $\frac{7}{16}$

10 대수

출처: 2015 AMC 10A 23번

> 함수
>
> $$f(x) = x^2 - ax + 2a$$
>
> 의 영점은 정수이다. 가능한 a의 값의 합은?
>
> **(A)** 7 **(B)** 8 **(C)** 16 **(D)** 17 **(E)** 18

핵심 아이디어. "영점이 정수이다"라는 조건을 보면 영점을 r, s로 놓고 근과 계수의 관계(비에타 공식)를 쓰고 싶어집니다. 두 식을 합치면 $rs = 2(r+s)$가 되는데, 곱이 합의 배수와 같은 이 꼴은 상수를 더하면 인수분해되는 바로 그 꼴입니다("사이먼의 인수분해 기법").

1단계. 비에타 공식. 영점이 정수 r과 s이면 $x^2 - ax + 2a = (x-r)(x-s)$이므로 다음과 같습니다.

$$r + s = a, \qquad rs = 2a.$$

a를 소거하면 $rs = 2(r+s)$입니다.

2단계. 인수분해. 모든 항을 한쪽으로 옮기고 4를 더합니다.

$$rs - 2r - 2s = 0 \implies rs - 2r - 2s + 4 = 4 \implies (r-2)(s-2) = 4.$$

3단계. 인수 쌍 나열하기. 정수 $r-2$와 $s-2$의 곱은 4입니다. 순서를 무시하면(r과 s를 바꿔도 같은 a가 나오므로) 가능한 쌍은 다음과 같습니다.

$$(1,4), \quad (2,2), \quad (-1,-4), \quad (-2,-2).$$

$a = r + s = (r-2) + (s-2) + 4$이므로 각각 다음 값을 얻습니다.

$$a = 1+4+4 = 9, \quad a = 2+2+4 = 8, \quad a = -1-4+4 = -1, \quad a = -2-2+4 = 0.$$

4단계. 하나씩 확인하기.

- $a = 9$: $x^2 - 9x + 18 = (x-3)(x-6)$.
- $a = 8$: $x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$.
- $a = -1$: $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$.
- $a = 0$: x^2이고, 영점 0이 두 번 겹칩니다.

네 값 모두 조건을 만족하고, 3단계에서 다른 경우가 없음을 보였습니다. 따라서 가능한 값의 합은 다음과 같습니다.

$$9 + 8 + (-1) + 0 = 16.$$

주의. 빠뜨리기 쉬운 경우가 두 가지 있습니다. 음수인 인수 쌍을 빠뜨리면 $9+8=17$, 즉 선택지 (D)가 됩니다. 같은 수로 이루어진 쌍 $(2,2)$와 $(-2,-2)$(이중 영점)를 빠뜨리면 $9+(-1)=8$, 즉 선택지 (B)가 됩니다.

정답: (C) 16