AMC 10

제 25 회

하프 모의고사

해설

정답표 • 출처 • 단계별 풀이

10문항 모두 AMC 10 기출(2000–2025)의 13–23번 문항에서 가져와 원래 번호 순서대로 배열한 것입니다. 원문 © Mathematical Association of America.

정답표와 출처

번호	정답	출처	영역
1	**E**	2013 AMC 10B 14번	대수
2	**C**	2006 AMC 10B 15번	기하
3	**D**	2022 AMC 10B 15번	대수
4	**B**	2020 AMC 10A 16번	경우의 수와 확률
5	**B**	2008 AMC 10A 17번	기하
6	**C**	2017 AMC 10A 19번	경우의 수와 확률
7	**D**	2013 AMC 10A 21번	정수론
8	**E**	2021 가을 AMC 10A 21번	경우의 수와 확률
9	**B**	2024 AMC 10B 23번	대수
10	**C**	2019 AMC 10B 23번	기하

1 대수

출처: 2013 AMC 10B 14번

> $a\clubsuit b = a^2b - ab^2$ 으로 정의하자. $x\clubsuit y = y\clubsuit x$ 를 만족하는 점 (x, y) 의 집합을 나타낸 것은?
>
> **(A)** 유한개의 점 **(B)** 직선 한 개 **(C)** 평행한 두 직선
>
> **(D)** 만나는 두 직선 **(E)** 세 직선

핵심 아이디어. 양변을 전개하고 모든 항을 한쪽으로 옮긴 뒤 인수분해해 봅시다. 곱이 0이 되는 것은 인수 중 하나가 0일 때뿐이고, 여기서는 각 인수가 일차식이므로 각각이 하나의 직선이 됩니다.

1단계. 정의에 의해 $x\clubsuit y = x^2y - xy^2$ 입니다. 두 입력의 역할을 바꾸면 $y\clubsuit x = y^2x - yx^2$ 이고, 이는 $xy^2 - x^2y$와 같습니다.

2단계. 둘을 같다고 놓습니다.

$$x^2y - xy^2 = xy^2 - x^2y.$$

모든 항을 왼쪽으로 옮기면 $2x^2y - 2xy^2 = 0$이고, 인수분해하면 다음과 같습니다.

$$2xy(x - y) = 0.$$

3단계. 이 식은 $x = 0$ 또는 $y = 0$ 또는 $x = y$일 때, 그리고 그때에만 성립합니다. 이것은 각각 y축, x축, 직선 $y = x$로, 서로 다른 세 직선입니다(세 직선 모두 원점을 지납니다). 이 직선들 위의 점은 모두 조건을 만족하고, 그 밖의 점은 만족하지 않습니다.

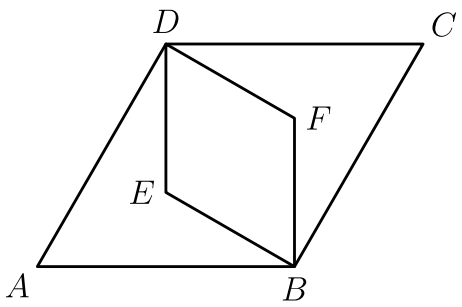
주의. 양변을 xy로 나누지 마세요. 그러면 인수 x와 y가 지워지고 $x = y$만 남아서, "직선 한 개"인 선택지 (B)를 고르고 두 축을 놓치게 됩니다.

정답: (E) 세 직선

2 기하

출처: 2006 AMC 10B 15번

마름모 $ABCD$는 마름모 $BFDE$와 닮음이다. 마름모 $ABCD$의 넓이는 24이고 $\angle BAD = 60^\circ$이다. 마름모 $BFDE$의 넓이는?



(A) 6 **(B)** $4\sqrt{3}$ **(C)** 8 **(D)** 9 **(E)** $6\sqrt{3}$

핵심 아이디어. 한 각이 60°인 마름모는 짧은 대각선 BD를 따라 두 정삼각형을 붙여 놓은 것입니다. 핵심은 BD가 $ABCD$에서는 **짧은** 대각선이지만 $BFDE$에서는 **긴** 대각선이라는 점을 알아차리는 것입니다(그림에서 $BFDE$는 B와 D 쪽이 뾰족합니다).

1단계. $AB = AD$이고 $\angle BAD = 60^\circ$이므로 삼각형 ABD는 정삼각형이고, 삼각형 CBD도 정삼각형입니다. 각각의 넓이는 $\frac{24}{2} = 12$입니다.

2단계. 한 각이 60°인 마름모에서 긴 대각선의 길이는 짧은 대각선의 $\sqrt{3}$배입니다. (두 대각선의 절반이 30°–60°–90° 삼각형의 빗변이 아닌 두 변이 되고, 그 비가 $1 : \sqrt{3}$이기 때문입니다.) $ABCD$의 한 변의 길이를 s라 하면 $BD = s$입니다.

3단계. $BFDE$에서는 B와 D에서의 각이 60°이므로 BD가 긴 대각선입니다. 짧은 대각선의 길이를 t라 하면 $s = \sqrt{3}t$입니다. 따라서 두 마름모의 짧은 대각선의 비는 $t : s = 1 : \sqrt{3}$이고, $BFDE$는 $ABCD$를 $\frac{1}{\sqrt{3}}$배로 축소한 것입니다.

4단계. 넓이는 닮음비의 제곱만큼 변하므로 $24 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{24}{3} = 8$입니다.

다른 풀이. 마름모 $BFDE$에서 $EB = ED$이고 $\angle EBD = 30^\circ$ (B에서의 60° 각의 절반)이므로, E는 정삼각형 ABD의 중심입니다. 따라서 선분 EA, EB, ED는 이 삼각형을 넓이가 $\frac{12}{3} = 4$인 합동인 삼각형 세 개로 나눕니다. 마찬가지로 F는 CBD의 중심입니다. 마름모 $BFDE$는 삼각형 BED와 삼각형 BFD를 합친 것이므로 넓이는 $4 + 4 = 8$입니다.

주의. 제곱을 꼭 해야 합니다. 넓이에 $\frac{1}{3}$ 대신 $\frac{1}{\sqrt{3}}$을 곱하면 $8\sqrt{3}$이 나오는데, 이것은 선택지에 없습니다.

정답: (C) 8

3 대수

출처: 2022 AMC 10B 15번

> 공차가 2인 등차수열의 처음 n개 항의 합을 S_n이라 하자. 몫 $\dfrac{S_{3n}}{S_n}$의 값은 n에 관계없이 일정하다. S_{20}의 값은?
>
> **(A)** 340 **(B)** 360 **(C)** 380 **(D)** 400 **(E)** 420

핵심 아이디어. S_n을 n과 미지의 첫째항 a에 대한 식으로 나타냅시다. "n에 관계없다"는 것은 몫이 $n=1$일 때와 $n=2$일 때 같은 값을 갖는다는 뜻이고, 이 방정식 하나로 a가 정해집니다.

1단계. 항은 $a, a+2, a+4, \ldots$ 이므로 제n항은 $a+2(n-1)$입니다. 합은 (항의 개수) $\times$ (첫째항과 끝항의 평균)으로 구할 수 있습니다.

$$S_n = n \cdot \frac{a + \big(a+2(n-1)\big)}{2} = n(a+n-1).$$

2단계. 그러면 다음과 같습니다.

$$\frac{S_{3n}}{S_n} = \frac{3n(a+3n-1)}{n(a+n-1)} = \frac{3(a+3n-1)}{a+n-1}.$$

3단계. $n=1$일 때의 값과 $n=2$일 때의 값이 같아야 합니다.

$$\frac{3(a+2)}{a} = \frac{3(a+5)}{a+1}.$$

양변을 교차하여 곱하면 $(a+2)(a+1) = a(a+5)$이고, 전개한 식 $a^2+3a+2 = a^2+5a$에서 $a=1$을 얻습니다.

4단계. 확인해 봅시다. $a=1$이면 수열은 $1, 3, 5, \ldots$ 이고 $S_n = n^2$이므로, 모든 n에 대해 $\frac{S_{3n}}{S_n} = \frac{9n^2}{n^2} = 9$입니다. 따라서 $S_{20} = 20^2 = 400$입니다.

주의. 공차가 2라는 이유로 수열을 짝수 $2, 4, 6, \ldots$ 라고 짐작하면 $S_{20} = 420$, 즉 (E)가 나옵니다. 그러나 이때는 $S_n = n(n+1)$이고 $\frac{S_{3n}}{S_n} = \frac{3(3n+1)}{n+1}$의 값은 $n=1$에서 6, $n=2$에서 7이므로 n에 따라 달라집니다.

정답: (D) 400

4 경우의 수와 확률

출처: 2020 AMC 10A 16번

> 좌표평면에서 네 꼭짓점이 $(0,0)$, $(2020,0)$, $(2020,2020)$, $(0,2020)$인 정사각형의 내부에서 임의로 한 점을 택한다. 이 점이 어떤 격자점으로부터 d 단위 거리 이내에 있을 확률이 $\frac{1}{2}$이다. (점 (x,y)는 x와 y가 모두 정수일 때 격자점이다.) d를 소수점 아래 첫째 자리까지 반올림한 값은?
>
> **(A)** 0.3 **(B)** 0.4 **(C)** 0.5 **(D)** 0.6 **(E)** 0.7

핵심 아이디어. 거대한 정사각형은 2020^2개의 똑같은 단위정사각형으로 이루어져 있고, 각 단위정사각형의 네 꼭짓점에 격자점이 있습니다. 따라서 전체 정사각형에서의 확률은 단위정사각형 하나에서의 확률과 같고, 거기서 "가까운" 영역은 사분원 네 개입니다.

1단계. 2020은 정수이므로 정사각형은 2020×2020개의 단위정사각형으로 빈틈없이 덮이고, 모든 단위정사각형은 모습이 같습니다. 네 꼭짓점에 격자점이 있고 내부에는 격자점이 없습니다. 따라서 구하는 확률은 단위정사각형 **하나**에서 꼭짓점으로부터 거리가 d 이내인 부분이 차지하는 비율입니다.

2단계. $d < \frac{1}{2}$라 합시다. 각 꼭짓점 주위에서 가까운 점들은 반지름이 d인 사분원을 이루고, 네 사분원은 겹치지 않습니다(이웃한 두 꼭짓점 사이의 거리는 1로, $2d$보다 큽니다). 이들의 넓이의 합은 $4 \cdot \frac{1}{4}\pi d^2 = \pi d^2$이고 단위정사각형의 넓이는 1이므로, 확률은 πd^2입니다.

3단계. $\pi d^2 = \frac{1}{2}$로 놓으면 $d^2 = \dfrac{1}{2\pi}$이므로 다음과 같습니다.

$$d = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \approx \sqrt{\frac{1}{6.283}} \approx \sqrt{0.159} \approx 0.399.$$

이 값은 실제로 $\frac{1}{2}$보다 작으므로 2단계를 적용할 수 있습니다. (만약 d가 $\frac{1}{2}$ 이상이라면 확률은 이미 적어도 $\pi \cdot \frac{1}{4} \approx 0.785 > \frac{1}{2}$이므로, $d < \frac{1}{2}$일 수밖에 없습니다.)

4단계. $0.35 < 0.399 < 0.45$이므로, d를 소수점 아래 첫째 자리까지 반올림하면 0.4입니다.

주의. 단위정사각형 하나에 닿는 격자점은 하나가 아니라 네 개입니다. 사분원 하나만 써서 $\frac{1}{4}\pi d^2 = \frac{1}{2}$로 놓으면 $d \approx 0.80$이 나오는데, 이것은 선택지에 없습니다.

정답: (B) 0.4

5 기하

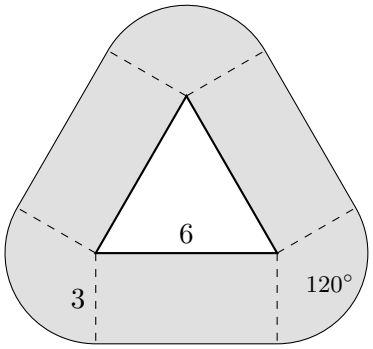
출처: 2008 AMC 10A 17번

한 변의 길이가 6인 정삼각형이 있다. 삼각형의 외부에 있으면서 삼각형 위의 어떤 점으로부터의 거리가 3 이하인 점들 전체로 이루어진 영역의 넓이는?

(A) $36+24\sqrt{3}$ **(B)** $54+9\pi$ **(C)** $54+18\sqrt{3}+6\pi$

(D) $\left(2\sqrt{3}+3\right)^2\pi$ **(E)** $9\left(\sqrt{3}+1\right)^2\pi$

핵심 아이디어. 삼각형의 바깥을 거리 3을 유지하며 한 바퀴 돌아 봅시다. 각 변을 따라서는 영역이 직사각형이고, 각 꼭짓점에서는 원의 일부인 부채꼴입니다. 이 조각들을 더합니다.



1단계. 한 변으로부터 거리가 3 이내인(그리고 삼각형 외부에 있는) 점들은 그 변 위에 6×3 직사각형을 이룹니다. 직사각형 세 개의 넓이는 $3\cdot 6\cdot 3=54$입니다.

2단계. 꼭짓점 근처의 점들은 그 꼭짓점 자체로부터 거리가 3 이내이므로, 반지름이 3인 부채꼴을 이룹니다. 꼭짓점 주위의 360°는 삼각형의 60°, 직사각형이 만드는 두 직각, 그리고 부채꼴로 나뉩니다. 따라서 부채꼴의 중심각은 $360^\circ-60^\circ-90^\circ-90^\circ=120^\circ$입니다.

3단계. 120° 부채꼴 세 개를 합치면 반지름이 3인 원 하나가 되고, 그 넓이는 $\pi\cdot 3^2=9\pi$입니다. 따라서 전체 넓이는 $54+9\pi$입니다.

주의. 각 꼭짓점의 조각을 120°가 아니라 (삼각형의 내각인) 60° 부채꼴로 생각하는 실수. 꼭짓점의 빈틈은 삼각형과 두 직사각형의 **바깥**에 남는 부분입니다.

정답: (B) $54+9\pi$

6 경우의 수와 확률

출처: 2017 AMC 10A 19번

> 앨리스는 밥의 옆에도, 칼라의 옆에도 앉지 않으려 한다. 데릭은 에릭의 옆에 앉지 않으려 한다. 이러한 조건에서 다섯 사람이 한 줄로 놓인 의자 5개에 앉는 방법은 모두 몇 가지인가?
>
> **(A)** 12 **(B)** 16 **(C)** 28 **(D)** 32 **(E)** 40

핵심 아이디어. 제약이 가장 많은 사람은 앨리스이므로 앨리스부터 앉힙니다. 앨리스가 끝자리에 앉는지 가운데에 앉는지에 따라 이웃의 수가 달라지므로, 두 경우로 나눕니다.

경우 1: 앨리스가 가운데 (자리 2, 3, 4 중 하나). 앨리스의 이웃은 두 명이고 둘 다 밥이나 칼라일 수 없으므로, 이웃은 데릭과 에릭입니다. 그러면 데릭과 에릭은 저절로 떨어지게 됩니다(앨리스가 둘 사이에 있습니다). 밥과 칼라는 남은 두 자리에 앉습니다. 앨리스의 자리 3가지, 데릭과 에릭을 앨리스의 양옆에 앉히는 방법 2가지, 밥과 칼라를 앉히는 방법 2가지이므로 $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$입니다.

경우 2: 앨리스가 끝자리 (2가지). 앨리스의 유일한 이웃은 데릭이나 에릭이어야 합니다(2가지). 그 사람을 X라 합시다. X의 옆 사람은 데릭과 에릭 중 나머지 한 사람일 수 없으므로 밥이나 칼라여야 합니다(2가지). 마지막 두 자리에는 남은 두 사람이 어느 순서로든 앉습니다(2가지). 이때 데릭과 에릭 사이에는 적어도 그 밥 또는 칼라가 있으므로 둘은 떨어져 있습니다. 따라서 $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$입니다.

합계. $12 + 16 = 28$입니다. (컴퓨터로 120가지 배치를 모두 확인해도 28입니다.)

주의. 두 경우 중 하나만 세면 16 (B) 또는 12 (A)가 나옵니다. 앨리스의 위치에 따라 개수가 실제로 달라지므로 두 경우를 모두 세어야 합니다.

정답: (C) 28

7 정수론

출처: 2013 AMC 10A 21번

> 12명의 해적이 금화가 든 보물 상자를 다음과 같이 나누어 갖기로 한다. k번째로 몫을 가져가는 해적은 상자에 남아 있는 금화의 $\frac{k}{12}$를 가져간다. 처음 상자에 들어 있던 금화의 개수는 이 방식으로 각 해적이 양의 정수 개의 금화를 받을 수 있게 하는 가장 작은 수이다. 12번째 해적이 받는 금화는 몇 개인가?
>
> **(A)** 720 **(B)** 1296 **(C)** 1728 **(D)** 1925 **(E)** 3850

핵심 아이디어. 12번째 해적은 $\frac{12}{12}$, 즉 남은 금화를 모두 가져갑니다. 그러니 그의 몫을 n이라 하고 **거꾸로** 거슬러 올라가 봅시다. 앞의 각 단계에서는 상자의 금화 수에 알려진 분수가 곱해지므로, 문제는 결국 "어떤 n이어야 그 수들이 모두 정수가 되는가?"로 바뀝니다.

1단계. 해적 k가 몫을 가져가기 직전에 상자에 있는 금화의 수를 R_k라 합시다. 해적 k는 $\frac{k}{12}R_k$를 가져가므로 남는 금화는 다음과 같습니다.

$$R_{k+1} = \frac{12-k}{12}\,R_k, \qquad \text{따라서} \qquad R_k = \frac{12}{12-k}\,R_{k+1}.$$

2단계. 해적 12는 R_{12}를 모두 가져가므로 $R_{12} = n$이 그의 몫입니다. 처음까지 거슬러 올라가면 다음과 같습니다.

$$R_1 = n \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{12}{10} \cdots \frac{12}{1} = n \cdot \frac{12^{11}}{11!}.$$

3단계. 소인수분해하면 $12^{11} = 2^{22} \cdot 3^{11}$이고 $11! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$입니다. 따라서

$$R_1 = n \cdot \frac{2^{14} \cdot 3^7}{5^2 \cdot 7 \cdot 11} = n \cdot \frac{2^{14} \cdot 3^7}{1925}.$$

분자는 1925와 공통인 소인수가 없으므로, R_1이 정수가 되려면 1925가 n을 나누어야 합니다. 즉 $n \geq 1925$입니다. R_1은 n이 클수록 커지므로, 처음 상자의 금화가 가장 적은 경우는 조건을 만족하는 가장 작은 n에서 나옵니다.

4단계. $n = 1925$가 실제로 가능한지 확인합시다. $m = 12 - k$라 쓰면, 해적 k가 가져가기 직전 상자에 있는 금화의 수는 다음과 같습니다.

$$R_k = 1925 \cdot \frac{12^m}{m!} \qquad (1 \leq m \leq 11).$$

$m!$에 들어 있는 인수 5, 7, 11은 $11!$에도 들어 있으므로 모두 1925를 나눕니다. 또 $m!$에서 2의 지수는 m보다 작고 3의 지수는 $\frac{m}{2}$보다 작은데, $12^m = 2^{2m}3^m$이 두 소인수를 넉넉히 공급합니다. 따라서 모든 R_k는 정수입니다.

5단계. 각 몫은 $R_k - R_{k+1}$로 정수끼리의 차이고, 해적 k는 양수 개의 금화 더미에서 $\frac{k}{12} > 0$만큼을 가져가므로 양수입니다. 예를 들어 처음 상자에는 $R_1 = 2^{14} \cdot 3^7 = 35{,}831{,}808$개가 있고, 해적 1은 그 $\frac{1}{12}$인 2,985,984개를 가져가며, 마지막 몇 몫은 21,175(해적 11)와 1925(해적 12)입니다.

따라서 12번째 해적이 받는 금화는 $n = 1925$개입니다.

정답: (D) 1925

8 경우의 수와 확률

출처: 2021 가을 AMC 10A 21번

> 공 20개를 각각 독립적으로 5개의 상자 중 하나에 무작위로 던져 넣는다. 어떤 상자에는 공이 3개, 다른 한 상자에는 공이 5개, 나머지 세 상자에는 각각 공이 4개씩 들어 있게 될 확률을 p라 하자. 모든 상자에 공이 4개씩 들어 있게 될 확률을 q라 하자. $\frac{p}{q}$의 값은?
>
> **(A)** 1 **(B)** 4 **(C)** 8 **(D)** 12 **(E)** 16

핵심 아이디어. p와 q는 모두 "전체 경우의 수에 대한 원하는 경우의 수의 비율"이고, 전체 경우의 수는 5^{20}으로 **같습니다**. 따라서 $\frac{p}{q}$는 두 경우의 수의 비일 뿐이고, 20! 같은 큰 수는 약분됩니다. 문제가 p나 q가 아니라 그 비를 묻는 이유가 바로 이것입니다.

1단계. 표본공간. 공에 1부터 20까지 번호를 붙이고 상자에도 이름을 붙였다고 생각합시다. 공마다 고를 수 있는 상자가 5개이므로, 일어날 가능성이 모두 같은 경우가 5^{20}가지입니다. 따라서 다음과 같습니다.

$$\frac{p}{q} = \frac{\#\{\text{상자별 공의 수가 } 3,5,4,4,4 \text{ (순서 무관)}\}}{\#\{\text{상자별 공의 수가 모두 } 4\}}.$$

2단계. q의 경우의 수. 상자 1에 넣을 공 4개를 고르고, 남은 16개 중 4개를 골라 상자 2에 넣는 식으로 계속하면 다음과 같습니다.

$$\binom{20}{4}\binom{16}{4}\binom{12}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{4} = \frac{20!}{4!\,4!\,4!\,4!\,4!}.$$

3단계. p의 경우의 수. 먼저 공 3개가 들어갈 상자를 정하고(5가지), 공 5개가 들어갈 상자를 정합니다(4가지). 두 역할은 서로 다르므로 순서가 중요하고, 선택하는 방법은 $5\cdot 4 = 20$가지입니다. 각 선택에 대해 2단계와 같은 방법으로 세면 공을 넣는 방법은 $\frac{20!}{3!\,5!\,4!\,4!\,4!}$가지입니다. 따라서 경우의 수는 다음과 같습니다.

$$20 \cdot \frac{20!}{3!\,5!\,4!\,4!\,4!}.$$

4단계. 나누기. 20!과 4! 세 개가 약분되어 다음을 얻습니다.

$$\frac{p}{q} = 20 \cdot \frac{4!\cdot 4!}{3!\cdot 5!} = 20 \cdot \frac{4!}{3!}\cdot\frac{4!}{5!} = 20\cdot 4\cdot \frac{1}{5} = 16.$$

$\frac{4}{5}$의 의미는 이렇게 볼 수 있습니다. 한 쌍의 상자를 $(4,4)$에서 $(3,5)$로 바꾸면 경우의 수가 $\frac{4!\,4!}{3!\,5!} = \frac{24\cdot 24}{6\cdot 120} = \frac{4}{5}$배가 되므로, 특정한 한 쌍의 상자에 대해서는 경우가 조금 **줄어듭니다**. 그러나 그 역할을 맡을 상자를 순서를 생각하여 고르는 방법이 20가지이므로, 전체적으로 p는 q의 16배입니다.

주의. 특별한 두 상자를 고르는 방법을 $5\cdot 4 = 20$ 대신 $\binom{5}{2} = 10$으로 세면 $10\cdot\frac{4}{5} = 8$, 즉 선택지 (C)가 됩니다. "공 3개짜리 상자"와 "공 5개짜리 상자"는 서로 다른 역할이므로, 둘을 맞바꾸면 다른 경우가 됩니다.

정답: (E) 16

9 대수

출처: 2024 AMC 10B 23번

> 피보나치 수는 $F_1 = 1$, $F_2 = 1$이고 $n \geq 3$일 때 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$로 정의된다. 다음 식의 값은
>
> $$\frac{F_2}{F_1} + \frac{F_4}{F_2} + \frac{F_6}{F_3} + \cdots + \frac{F_{20}}{F_{10}}?$$
>
> **(A)** 318 **(B)** 319 **(C)** 320 **(D)** 321 **(E)** 322

핵심 아이디어. 각 항은 $k = 1, \ldots, 10$에 대한 F_{2k}/F_k입니다. 나눗셈 열 번은 많지 않으니 처음 몇 개를 계산해 봅시다. 몫이 피보나치 수열과 비슷한 규칙을 따르는 정수로 나오고, 그 패턴으로 문제가 풀립니다.

1단계: 피보나치 수. $F_1, \ldots, F_{20}$은 다음과 같습니다.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765.$$

2단계: 몫.

$$\tfrac{F_2}{F_1} = 1,\ \tfrac{F_4}{F_2} = 3,\ \tfrac{F_6}{F_3} = \tfrac{8}{2} = 4,\ \tfrac{F_8}{F_4} = \tfrac{21}{3} = 7,\ \tfrac{F_{10}}{F_5} = \tfrac{55}{5} = 11.$$

각 수는 앞의 두 수의 합입니다($1+3=4$, $3+4=7$, $4+7=11$). 이것은 $L_1 = 1$, $L_2 = 3$, $L_k = L_{k-1} + L_{k-2}$로 정의되는 **뤼카 수** L_k입니다. 그 이유는 항등식 $F_{2k} = F_k\,(F_{k-1} + F_{k+1})$($F_0 = 0$으로 둠) 때문입니다. 몫은 $F_{k-1} + F_{k+1}$로, 두 피보나치 수열의 합이므로 같은 규칙을 따릅니다. 계속하면 $L_6, \ldots, L_{10} = 18, 29, 47, 76, 123$이고, 예를 들어 $\frac{F_{20}}{F_{10}} = \frac{6765}{55} = 123$입니다.

3단계: 합. 직접 더하면 다음과 같습니다.

$$1 + 3 + 4 + 7 + 11 + 18 + 29 + 47 + 76 + 123 = 319.$$

망원합으로 구할 수도 있습니다. $L_k = L_{k+2} - L_{k+1}$이므로 $\sum_{k=1}^{10} L_k = L_{12} - L_2 = 322 - 3 = 319$이고, 여기서 $L_{11} = 76 + 123 = 199$, $L_{12} = 123 + 199 = 322$를 이용했습니다.

주의. 피보나치 수의 성질 $F_1 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$을 그대로 빌려 와 $L_{12} - 1 = 321$로 쓰면 선택지 (D)가 됩니다. 망원합에서 빼는 것은 1이 아니라 $L_2 = 3$입니다.

정답: (B) 319

10 기하

출처: 2019 AMC 10B 23번

> 점 $A=(6,13)$과 $B=(12,11)$은 평면 위의 원 ω 위에 있다. A와 B에서 ω에 접하는 두 직선이 x축 위의 한 점에서 만난다고 하자. ω의 넓이는?
>
> **(A)** $\frac{83\pi}{8}$ **(B)** $\frac{21\pi}{2}$ **(C)** $\frac{85\pi}{8}$ **(D)** $\frac{43\pi}{4}$ **(E)** $\frac{87\pi}{8}$

핵심 아이디어. 한 점 P에서 그은 두 접선의 길이는 같으므로, P는 $\overline{AB}$의 수직이등분선 위에 있습니다. 원의 중심도 마찬가지입니다. "x축 위의 한 점에서 만난다"는 조건이 P를 정해 주고, 그다음 "반지름 $\perp$ 접선"으로 중심을 찾습니다.

1단계: P 구하기. 두 접선이 만나는 점을 P라 합시다. 한 점에서 그은 접선의 길이는 같으므로 $PA=PB$이고, P는 $\overline{AB}$의 수직이등분선 위에 있습니다.

$\overline{AB}$의 중점은 $M=(9,12)$입니다. $\overline{AB}$의 기울기는 $\frac{11-13}{12-6}=-\frac{1}{3}$이므로 수직이등분선의 기울기는 3입니다.

$$y-12=3(x-9), \quad \text{즉} \quad y=3x-15.$$

$y=0$으로 놓으면 $P=(5,0)$입니다.

2단계: 중심 O 구하기. 중심은 A와 B에서 같은 거리에 있으므로 O도 $y=3x-15$ 위에 있습니다. 접선 PA의 기울기는 $\frac{13-0}{6-5}=13$이고, 반지름 OA는 이 접선에 수직이므로 OA의 기울기는 $-\frac{1}{13}$입니다.

$$y-13=-\tfrac{1}{13}(x-6).$$

$y=3x-15$를 대입하면 $3x-28=-\frac{x-6}{13}$이므로 $39x-364=-x+6$, $40x=370$, $x=\frac{37}{4}$이고 $y=\frac{111}{4}-\frac{60}{4}=\frac{51}{4}$입니다. 따라서 $O=\left(\frac{37}{4},\frac{51}{4}\right)$입니다.

3단계: 반지름.

$$r^2=OA^2=\left(\tfrac{37}{4}-6\right)^2+\left(\tfrac{51}{4}-13\right)^2=\left(\tfrac{13}{4}\right)^2+\left(-\tfrac{1}{4}\right)^2=\frac{170}{16}=\frac{85}{8}.$$

(OB^2을 계산해도 같은 값이 나옵니다. $\left(-\frac{11}{4}\right)^2+\left(\frac{7}{4}\right)^2=\frac{170}{16}$입니다.) 넓이는 $\pi r^2=\frac{85\pi}{8}$입니다.

다른 풀이. 삼각형 PAO는 A에서 직각이고, $\overline{AM}$은 빗변 $\overline{PO}$에 대한 높이입니다($\overline{AB}\perp\overline{PO}$이므로). 삼각형 OAP와 AMP는 닮음이므로 $\frac{OA}{PA}=\frac{AM}{PM}$입니다. $PA^2=1+169=170$, $AM^2=9+1=10$, $PM^2=16+144=160$이므로

$$r^2=PA^2\cdot\frac{AM^2}{PM^2}=170\cdot\frac{10}{160}=\frac{85}{8}.$$

주의. $\overline{AB}$의 중점 M은 중심이 **아닙니다**. $\overline{AB}$는 현일 뿐 지름이 아닙니다. M을 중심으로 쓰면 $r^2=AM^2=10$, 넓이는 10π가 되는데, 이것은 선택지에 없습니다.

정답: (C) $\frac{85\pi}{8}$