AMC 10

제 26 회

하프 모의고사

해설

정답표 • 출처 • 단계별 풀이

10문항 모두 AMC 10 기출(2000–2025)의 13–23번 문항에서 가져와 원래 번호 순서대로 배열한 것입니다. 원문 © Mathematical Association of America.

정답표와 출처

번호	정답	출처	영역
1	**D**	2021 가을 AMC 10A 13번	경우의 수와 확률
2	**D**	2024 AMC 10A 14번	기하
3	**D**	2005 AMC 10B 16번	대수
4	**A**	2024 AMC 10B 16번	경우의 수와 확률
5	**D**	2007 AMC 10B 17번	기하
6	**B**	2025 AMC 10A 18번	대수
7	**B**	2022 AMC 10A 21번	기하
8	**D**	2011 AMC 10A 21번	경우의 수와 확률
9	**B**	2018 AMC 10B 23번	정수론
10	**B**	2023 AMC 10B 23번	대수

1 경우의 수와 확률

출처: 2021 가을 AMC 10A 13번

> 6개의 공 각각을 검은색 또는 흰색 중 하나로, 같은 확률로 무작위로 그리고 서로 독립적으로 칠한다. 모든 공이 나머지 5개의 공 중 절반보다 많은 공과 색이 다를 확률은?
>
> **(A)** $\frac{1}{64}$ **(B)** $\frac{1}{6}$ **(C)** $\frac{1}{4}$ **(D)** $\frac{5}{16}$ **(E)** $\frac{1}{2}$

핵심 아이디어. 조건을 각 색의 공이 몇 개인지에 대한 조건으로 바꾸어 봅시다. "5개의 절반보다 많다"는 것은 "적어도 3개"라는 뜻입니다.

1단계. 어떤 공과 같은 색인 공이 (자기 자신을 포함하여) 6개 중 k개라고 합시다. 그러면 이 공은 나머지 5개의 공 중 $6-k$개와 색이 다릅니다. 조건은 $6-k \geq 3$, 즉 $k \leq 3$입니다.

2단계. 이 조건은 검은 공에 대해서도, 흰 공에 대해서도 성립해야 합니다. 검은 공이 b개, 흰 공이 w개이고 $b+w=6$이라 하면 $b \leq 3$이고 $w \leq 3$이어야 하므로 $b=w=3$일 수밖에 없습니다. (모든 공이 한 가지 색이라면 모든 공이 다른 공 0개와 색이 다르므로 역시 조건을 만족하지 않습니다.) 거꾸로, 각 색이 3개씩이면 모든 공은 나머지 5개 중 정확히 3개와 색이 다릅니다.

3단계. 색칠하는 방법은 모두 $2^6=64$가지이고, 각각 일어날 가능성이 같습니다. 흰 공이 될 3개를 고르는 방법은 $\binom{6}{3}=20$가지입니다. 따라서 구하는 확률은 다음과 같습니다.

$$\frac{20}{64}=\frac{5}{16}.$$

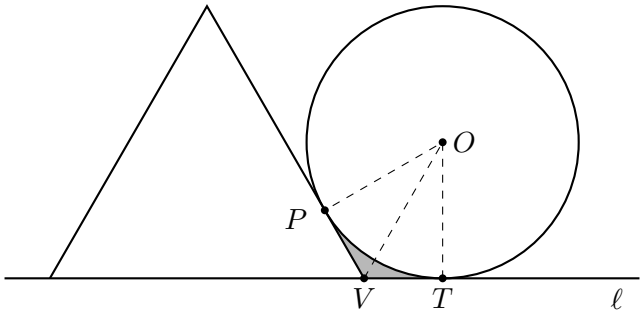
정답: (D) $\frac{5}{16}$

2 기하

출처: 2024 AMC 10A 14번

> 높이가 24인 정삼각형의 한 변이 직선 ℓ 위에 있다. 반지름이 12인 원이 ℓ에 접하고, 이 삼각형과 외접한다. 삼각형과 원의 외부에 있으면서 삼각형, 원, 직선 ℓ로 둘러싸인 영역의 넓이는 $a\sqrt{b}-c\pi$로 나타낼 수 있다. 단, a, b, c는 양의 정수이고 b는 어떤 소수의 제곱으로도 나누어떨어지지 않는다. $a+b+c$의 값은?
>
> **(A)** 72 **(B)** 73 **(C)** 74 **(D)** 75 **(E)** 76

핵심 아이디어. 이 영역은 휘어진 모서리 모양입니다. 한 점 V에서 그은 두 접선과 그 사이의 원에 의해 잘려 나온 부분입니다. 한 점에서 두 접선이 나오면 접점까지 반지름을 그어 보세요. 연(kite) 모양이 생기고, 구하는 영역은 "연에서 부채꼴을 뺀 것"이 됩니다.



1단계: V에서의 각. 원에 가까운 쪽에 있는 삼각형의 밑변 꼭짓점을 V, 원의 중심을 O, ℓ 위의 접점을 T, 삼각형의 변 위의 접점을 P라 합시다. 삼각형의 V에서의 각은 60°이므로, 바깥쪽 각, 즉 ℓ과 변 VP 사이의 각은 $180^\circ-60^\circ=120^\circ$입니다. 원은 이 120° 각 안에 놓여 있습니다.

2단계: 연. 접점으로 그은 반지름은 접선에 수직이므로 $\angle VTO=\angle VPO=90^\circ$이고, 두 접선의 길이는 같으므로 $VT=VP$입니다. 선분 VO는 120° 각을 이등분하므로, 직각삼각형 VTO에서 $\angle TVO=60^\circ$이고

$$VT=\frac{OT}{\tan 60^\circ}=\frac{12}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}.$$

연 $VTOP$는 삼각형 VTO 두 개로 이루어지므로 넓이는 $2\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3}\cdot 12=48\sqrt{3}$입니다.

3단계: 부채꼴. 연의 네 각의 합은 360°이므로 $\angle TOP=360^\circ-90^\circ-90^\circ-120^\circ=60^\circ$입니다. 연 안에 있는 부채꼴의 넓이는 $\frac{60}{360}\cdot\pi\cdot 12^2=24\pi$입니다.

4단계. 색칠한 영역은 연에서 그 부채꼴을 뺀 것이므로 넓이는 $48\sqrt{3}-24\pi$입니다. 여기서 $b=3$은 어떤 소수의 제곱으로도 나누어떨어지지 않으므로 $a=48$, $b=3$, $c=24$이고 $a+b+c=75$입니다.

(높이 24는 한 번도 쓰이지 않았다는 점에 주목하세요. 이 영역은 120° 각과 반지름에만 의존합니다. 또한 $VP=4\sqrt{3}$이므로, 접점 P는 길이가 $16\sqrt{3}$인 삼각형의 변 위에 실제로 놓입니다.)

주의. 연의 V에서의 각은 삼각형의 60°가 아니라 **바깥쪽** 각 120°입니다. 여기에 60°를 쓰면 부채꼴의 중심각이 120°, 접선의 길이가 $12\sqrt{3}$이 되어, 결과가 어떤 선택지와도 맞지 않습니다.

정답: (D) 75

---

3 대수

출처: 2005 AMC 10B 16번

> 이차방정식 $x^2+mx+n=0$의 근은 $x^2+px+m=0$의 근의 두 배이고, m, n, p 중 어느 것도 0이 아니다. $\frac{n}{p}$의 값은?
>
> **(A)** 1 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** 8 **(E)** 16

핵심 아이디어. 문제는 **근**에 대해 말하지만 묻는 것은 **계수**입니다. 둘을 잇는 다리가 근과 계수의 관계(비에트 공식)입니다. $x^2+bx+c=0$의 두 근의 합은 $-b$, 곱은 c입니다. $x^2+px+m=0$의 근에 이름을 붙이고, 두 방정식의 계수를 모두 그 근으로 나타내 봅시다.

1단계. $x^2+px+m=0$의 두 근을 r, s라 하면, 근과 계수의 관계에 의해

$$r+s=-p, \qquad rs=m.$$

2단계. $x^2+mx+n=0$의 두 근은 $2r$, $2s$입니다. 다시 근과 계수의 관계에 의해

$$2r+2s=-m, \qquad (2r)(2s)=n.$$

따라서 $m=-2(r+s)=2p$이고 $n=4rs=4m$입니다.

3단계. 두 식을 합치면 $n=4m=4\cdot 2p=8p$입니다. $p\neq 0$이므로 양변을 나눌 수 있고, $\dfrac{n}{p}=8$입니다.

검산: $p=-1$로 두면 $m=-2$, $n=-8$입니다. 그러면 $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$의 근은 $2,-1$이고, $x^2-2x-8=(x-4)(x+2)$의 근은 $4,-2$로, 정확히 두 배입니다.

주의. 두 근을 각각 두 배 하면 합은 두 배가 되지만 곱은 **네 배**가 됩니다. $n=4m$ 대신 $n=2m$으로 쓰면 $\frac{n}{p}=\frac{2m}{m/2}=4$, 즉 (C)가 됩니다.

다른 풀이. $f(x)=x^2+px+m$의 근이 r,s이면, $f(x/2)$는 $x=2r,2s$에서 값이 0이 됩니다. 최고차항의 계수가 1이 되도록 4를 곱하면, 두 배가 된 근을 갖는 방정식은

$$4f\left(\tfrac{x}{2}\right)=x^2+2px+4m.$$

이것을 x^2+mx+n과 비교하면 곧바로 $m=2p$, $n=4m=8p$를 얻습니다.

정답: (D) 8

4 경우의 수와 확률

출처: 2024 AMC 10B 16번

> 제리는 수를 가지고 노는 것을 좋아한다. 어느 날 그는 1부터 2024까지의 모든 정수를 화이트보드에 적었다. 그다음 화이트보드에 있는 수 네 개를 골라 지우고, 그 대신 그 네 수의 합이나 곱 중 하나를 적는 일을 반복했다. (예를 들어 제리의 첫 단계는 1, 2, 3, 5를 지우고, 그 합인 11이나 그 곱인 30을 화이트보드에 적는 것일 수 있다.) 이 조작을 반복한 후, 제리는 화이트보드에 남은 수가 모두 홀수임을 알아차렸다. 그때 화이트보드에 있는 정수의 개수의 최댓값은?
>
> **(A)** 1010 **(B)** 1011 **(C)** 1012 **(D)** 1013 **(E)** 1014

핵심 아이디어. 조작을 한 번 할 때마다 화이트보드의 수는 정확히 3개씩 줄어듭니다(넷을 지우고 하나를 적으므로). 그러므로 수를 많이 남기려면 조작을 **적게** 해야 합니다. 문제가 홀짝에 관한 것이므로, 한 번의 조작으로 짝수를 몇 개나 없앨 수 있는지 셉니다.

1단계: 한 번에 3개씩 감소. m번 조작한 후에는 $2024 - 3m$개의 수가 남습니다. 따라서 m을 가능한 한 작게 해야 합니다.

2단계: 한 번에 없앨 수 있는 짝수는 많아야 3개. 처음에는 짝수 1012개, 홀수 1012개가 있습니다. 어떤 조작이 짝수 e개를 지운다고 합시다. 홀수를 적으면 짝수의 개수는 e만큼 줄고, 짝수를 적으면 $e-1$만큼 줄어듭니다. 짝수 네 개의 합과 곱은 언제나 짝수이므로, $e = 4$일 때는 3만큼만 줄어듭니다. 어떤 경우든 줄어드는 양은 많아야 3입니다.

3단계: 조작 횟수의 하한. 1012개의 짝수가 모두 사라져야 하므로 $3m \geq 1012$이고, $3 \cdot 337 = 1011$이므로 $m \geq 338$입니다. 따라서 남는 수는 많아야 $2024 - 3 \cdot 338 = 1010$개입니다.

4단계: 1010개는 실제로 가능. $1012 = 3 \cdot 337 + 1$이므로, 짝수 세 개와 홀수 한 개를 골라 그 **합**을 적는 조작을 337번 합니다. 이 합은 홀수입니다. 이제 짝수가 하나 남는데, 이것을 홀수 세 개와 함께 골라 합을 적으면 역시 홀수가 됩니다. 이렇게 하면 조작은 338번이고, 남은 1010개의 수는 모두 홀수입니다.

주의. 1012, 즉 (C)라고 답하는 것은 짝수들이 그냥 사라지고 홀수 1012개는 모두 살아남는다고 상상한 것입니다. 하지만 짝수만 따로 지우는 조작은 없습니다. 매번 네 수를 지우고 하나를 적으므로 화이트보드의 수는 매번 3개씩 줄어들고, 조작은 적어도 338번 필요합니다.

정답: (A) 1010

5 기하

출처: 2007 AMC 10B 17번

> 점 P는 정삼각형 $\triangle ABC$의 내부에 있다. 점 Q, R, S는 각각 P에서 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$에 내린 수선의 발이다. $PQ=1$, $PR=2$, $PS=3$일 때, AB의 값은?
>
> **(A)** 4 **(B)** $3\sqrt{3}$ **(C)** 6 **(D)** $4\sqrt{3}$ **(E)** 9

핵심 아이디어. 내부의 한 점에서 세 변에 내린 세 수선을 보면, P를 꼭짓점으로 하는 세 삼각형으로 $\triangle ABC$를 나누고 싶어집니다. 각 수선은 높이가 되고, 세 삼각형의 넓이의 합은 전체 넓이와 같아야 합니다.

1단계. 한 변의 길이를 s라 합시다. P를 A, B, C와 이으면 삼각형이 $\triangle APB$, $\triangle BPC$, $\triangle CPA$로 나뉘고, 각각 밑변이 s이고 높이가 1, 2, 3입니다. 세 넓이를 더하면 다음과 같습니다.

$$\tfrac{1}{2}s\cdot 1+\tfrac{1}{2}s\cdot 2+\tfrac{1}{2}s\cdot 3=\tfrac{1}{2}s(1+2+3)=3s.$$

2단계. 한 변의 길이가 s인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}s^2$입니다. 따라서

$$\frac{\sqrt{3}}{4}s^2=3s \quad\Longrightarrow\quad s=\frac{12}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}.$$

이로부터 멋진 사실도 알 수 있습니다. 세 거리의 합은 항상 삼각형의 높이와 같습니다. 여기서 높이는 $1+2+3=6$이고, 높이가 6인 정삼각형의 한 변의 길이는 $6\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$입니다.

주의. 합 $1+2+3=6$은 변의 길이가 아니라 **높이**입니다. 여기서 멈추면 선택지 (C)를 고르게 됩니다.

정답: (D) $4\sqrt{3}$

6 대수

출처: 2025 AMC 10A 18번

수들의 모임의 조화평균은 그 모임에 있는 수들의 역수의 산술평균의 역수이다. 예를 들어, $4, 4,$ 그리고 5의 조화평균은 다음과 같다.

$$\frac{1}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)} = \frac{30}{7}.$$

다음 4050차 다항식의 모든 실근의 조화평균은 얼마인가?

$$\prod_{k=1}^{2025}\left(kx^2-4x-3\right) = \left(x^2-4x-3\right)\cdot\left(2x^2-4x-3\right) \cdot\left(3x^2-4x-3\right)\cdots \cdot\left(2025x^2-4x-3\right)?$$

(A) $-\frac{5}{3}$ **(B)** $-\frac{3}{2}$ **(C)** $-\frac{6}{5}$ **(D)** $-\frac{5}{6}$ **(E)** $-\frac{2}{3}$

핵심 아이디어. 조화평균에 필요한 것은 근들의 **역수의 합**과 근의 **개수**뿐입니다. 이차식에서는 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$ 이고, 이 값은 근과 계수의 관계(비에트 정리)를 쓰면 방정식을 풀지 않고도 바로 얻을 수 있습니다.

1단계: 근의 개수 세기. 인수 kx^2-4x-3의 판별식은 $16+12k>0$이므로, 이 인수는 서로 다른 두 실근을 가집니다. 서로 다른 두 인수 $j\neq k$가 공통근을 가진다면 $jx^2-4x-3 = kx^2-4x-3$이므로 $(j-k)x^2=0$, 즉 $x=0$입니다. 그러나 $x=0$을 대입하면 $-3\neq 0$입니다. 따라서 $2\cdot 2025 = 4050$개의 실근은 모두 서로 다릅니다.

2단계: 한 인수에서 나오는 역수. kx^2-4x-3에 대해 근과 계수의 관계에 의해 $x_1+x_2=\frac{4}{k}$, $x_1x_2=-\frac{3}{k}$입니다. 따라서

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1x_2} = \frac{4/k}{-3/k} = -\frac{4}{3},$$

즉 이 값은 모든 k에 대해 같습니다.

3단계: 모두 더하기. 4050개의 역수를 모두 더하면 $2025\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) = -2700$입니다. 이들의 산술평균은 $\frac{-2700}{4050} = -\frac{2}{3}$이고, 조화평균은 그 역수이므로 다음과 같습니다.

$$\frac{4050}{-2700} = -\frac{3}{2}.$$

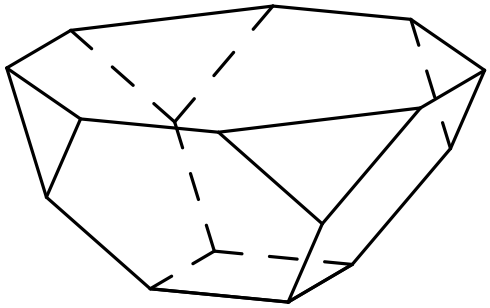
주의. 역수들의 평균 $-\frac{2}{3}$에서 멈추면 (E)를 고르게 됩니다. 정의에서 묻는 것은 그 평균의 **역수**입니다.

정답: (B) $-\frac{3}{2}$

7 기하

출처: 2022 AMC 10A 21번

한 변의 길이가 1인 정육각형 네 개를 한 변의 길이가 1인 정사각형에 붙여 그릇을 만든다. 그림과 같이 이웃한 정육각형의 변은 서로 일치한다. 그릇의 가장자리에 있는, 네 정육각형의 위쪽 꼭짓점 여덟 개를 이어 얻은 팔각형의 넓이는?



(A) 6 **(B)** 7 **(C)** $5+2\sqrt{2}$ **(D)** 8 **(E)** 9

핵심 아이디어. 대칭성에 의해 가장자리의 여덟 꼭짓점은 모두 같은 높이에 있으므로, 팔각형은 수평이고 그 넓이는 바로 위에서 내려다본 그림자의 넓이와 같습니다. 남은 미지수는 정육각형이 얼마나 기울어져 있느냐뿐인데, 이웃한 정육각형이 한 변을 공유한다는 조건이 이것을 정해 줍니다.

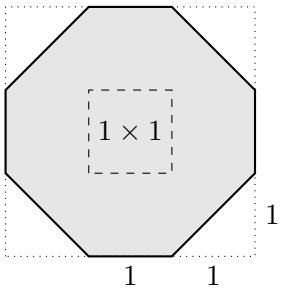
1단계: 좌표. 정사각형을 바닥에 놓고 꼭짓점을 $\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2},0\right)$으로 잡습니다. 변 $y=-\frac{1}{2}$에 붙은 앞쪽 정육각형을 봅시다. 그 정육각형의 평면 안에서 붙은 변에 수직이고 정사각형에서 멀어지는 방향의 단위벡터를 $\vec{w}$라 하고, $a^2+b^2=1$인 $\vec{w}=(0,-a,b)$로 씁니다. 여기서 a는 수평(바깥쪽) 성분입니다.

한 변의 길이가 1인 정육각형에서 꼭짓점 $P=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$을 출발하는 변은 붙은 변의 방향으로 $\frac{1}{2}$, $\vec{w}$ 방향으로 $\frac{\sqrt{3}}{2}$만큼 나아갑니다. 따라서 그 끝점은 다음과 같습니다.

$$P+\left(\tfrac{1}{2},\,-\tfrac{\sqrt{3}}{2}a,\,\tfrac{\sqrt{3}}{2}b\right).$$

2단계: 공유하는 변이 기울기를 정한다. 오른쪽 정육각형은 같은 그림을 90° 돌린 것이므로, P에서 출발하는 그 변의 끝점은 $P+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a,\,-\frac{1}{2},\,\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)$입니다. 두 변이 일치하므로 $\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{1}{2}$이고, $a=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $b=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$입니다.

3단계: 가장자리. 앞쪽 정육각형의 위쪽 변은 붙은 변에서 $\vec{w}$ 방향으로 $\sqrt{3}$만큼 떨어져 있습니다. 따라서 정사각형의 변보다 수평으로 $\sqrt{3}\cdot a=1$만큼 더 바깥에, 높이 $\sqrt{3}\,b=\sqrt{2}$인 곳에 있습니다. 그 양 끝점을 바닥에 정사영하면 $\left(\pm\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$입니다. 대칭성에 의해 가장자리의 여덟 꼭짓점은 $\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{3}{2}\right)$과 $\left(\pm\frac{3}{2},\pm\frac{1}{2}\right)$이고, 모두 높이가 $\sqrt{2}$입니다.



4단계: 넓이. 위에서 보면 팔각형은 3×3 정사각형의 네 귀퉁이에서 등변의 길이가 1인 직각이등변삼각형을 잘라 낸 모양입니다.

$$3^2 - 4 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 1^2 = 9 - 2 = 7.$$

팔각형은 수평이므로 이것이 실제 넓이입니다.

> **주의.** 이 팔각형은 정팔각형이 아닙니다. 변의 길이가 1(정육각형의 위쪽 변)과 $\sqrt{2}$(이웃한 정육각형 사이의 틈)로 번갈아 나타납니다. 한 변의 길이가 1인 정팔각형으로 착각하면 $2 + 2\sqrt{2} \approx 4.83$이 나오는데, 이는 어느 선택지와도 맞지 않습니다.

정답: (B) 7

---

8 경우의 수와 확률

출처: 2011 AMC 10A 21번

> 무게가 같은 위조 동전 두 개가 똑같은 진짜 동전 8개와 섞여 있다. 각 위조 동전의 무게는 각 진짜 동전의 무게와 다르다. 10개의 동전에서 비복원으로 동전 한 쌍을 임의로 고른다. 남은 8개의 동전에서 비복원으로 두 번째 쌍을 임의로 고른다. 첫 번째 쌍의 무게의 합은 두 번째 쌍의 무게의 합과 같다. 고른 동전 4개가 모두 진짜일 확률은?
>
> **(A)** $\frac{7}{11}$ **(B)** $\frac{9}{13}$ **(C)** $\frac{11}{15}$ **(D)** $\frac{15}{19}$ **(E)** $\frac{15}{16}$

> **핵심 아이디어.** 이것은 조건부확률 문제입니다. 두 쌍의 무게가 같다는 사실이 **주어져** 있습니다. 그러니 무게가 같아지는 경우를 모두 나열하고, 각 경우의 수를 센 다음, 그중 "모두 진짜"인 경우가 차지하는 비율을 구합시다.

1단계: 언제 무게가 같아질까? 진짜 동전 하나의 무게를 g, 위조 동전 하나의 무게를 $c \neq g$라 합시다. 한 쌍의 무게는 $2g$, $g + c$, $2c$ 중 하나이고, 이 세 값은 모두 다릅니다. 두 위조 동전이 한 쌍에 함께 들어갈 수는 없습니다. 그러면 다른 쌍의 무게가 $2g \neq 2c$가 되기 때문입니다. 네 동전 중 위조 동전이 정확히 하나만 있을 수도 없습니다. 그 동전이 든 쌍은 $g + c$, 다른 쌍은 $2g$가 되기 때문입니다. 따라서 무게가 같아지는 경우는 정확히 두 가지입니다.

- 두 쌍이 모두 진짜인 경우($2g$와 $2g$), 또는
- 각 쌍에 위조 동전 하나와 진짜 동전 하나가 들어 있는 경우($g + c$와 $g + c$).

2단계: 순서를 고려하여 세기. (첫 번째 쌍, 두 번째 쌍)의 각 선택은 모두 같은 확률로 일어나므로, 그 개수를 셉니다.

모두 진짜인 경우: 첫 번째 쌍은 진짜 동전 8개 중 2개이므로 $\binom{8}{2} = 28$가지, 두 번째 쌍은 남은 6개 중 2개이므로 $\binom{6}{2} = 15$가지입니다. 모두 $28 \cdot 15 = 420$가지입니다.

각 쌍에 위조 동전이 하나씩인 경우: 첫 번째 쌍은 위조 동전 2개 중 하나와 진짜 동전 8개 중 하나를 고르므로 $2 \cdot 8 = 16$가지입니다. 두 번째 쌍은 나머지 위조 동전과 남은 진짜 동전 7개 중 하나를 골라야 하므로 7가지입니다. 모두 $16 \cdot 7 = 112$가지입니다.

3단계: 확률. 무게가 같다는 조건 아래에서

$$P = \frac{420}{420 + 112} = \frac{420}{532} = \frac{15}{19}.$$

(순서를 무시하고 두 쌍의 묶음으로 세면 두 경우의 수가 모두 절반인 210과 56이 되고, 같은 비율이 나옵니다.)

> **주의.** 섞인 경우에서 위조 동전이 진짜 동전 짝과 묶이는 방법이 두 가지라는 점을 잊기 쉽습니다. 이 경우를 420에 대해 56으로 (또는 210에 대해 28로) 세면 $\frac{15}{17}$가 나오는데, 이것은 선택지에 없습니다. 어떻게 세든 두 경우를 같은 방식(순서를 고려하든 무시하든)으로 세어야 합니다.

정답: (D) $\frac{15}{19}$

---

9 정수론

출처: 2018 AMC 10B 23번

> 양의 정수의 순서쌍 (a, b) 중에서 다음 등식을 만족시키는 것은 몇 개인가?
>
> $$a \cdot b + 63 = 20 \cdot \mathrm{lcm}(a, b) + 12 \cdot \gcd(a, b),$$
>
> 단, $\gcd(a, b)$는 a와 b의 최대공약수이고, $\mathrm{lcm}(a, b)$는 두 수의 최소공배수이다.
>
> **(A)** 0 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** 6 **(E)** 8

핵심 아이디어. ab, $\mathrm{lcm}(a, b)$, $\gcd(a, b)$가 섞인 등식을 보면 항등식 $ab = \gcd(a, b) \cdot \mathrm{lcm}(a, b)$를 떠올려야 합니다. 이것으로 모든 것을 두 미지수로 나타낼 수 있습니다. 그 결과는 "곱 = 일차항 + 상수" 꼴이 되어, 사이먼의 인수분해 기법(Simon's Favorite Factoring Trick)으로 인수분해됩니다.

1단계: 새로운 두 미지수. $g = \gcd(a, b)$, $\ell = \mathrm{lcm}(a, b)$라 합시다. $ab = g\ell$이므로 등식은 다음과 같이 됩니다.

$$g\ell + 63 = 20\ell + 12g.$$

2단계: 인수분해. 항을 옮기면 $g\ell - 20\ell - 12g = -63$이고, 양변에 $20 \cdot 12 = 240$을 더하면 다음과 같습니다.

$$g\ell - 20\ell - 12g + 240 = 177 \quad \Longrightarrow \quad (\ell - 12)(g - 20) = 177 = 3 \cdot 59.$$

3단계: 가능한 경우 나열하기. g와 ℓ은 모두 양수이므로 $g-20 \geq -19$, $\ell - 12 \geq -11$입니다. 두 인수가 모두 음수라면 그중 하나는 -59 또는 -177이어야 하는데, 이는 불가능합니다. 따라서 두 인수는 모두 양수입니다.

$$(\ell - 12,\ g - 20) \in \{(1, 177), (3, 59), (59, 3), (177, 1)\},$$

이로부터 $(\ell, g) = (13, 197),\ (15, 79),\ (71, 23),\ (189, 21)$을 얻습니다.

4단계: 최대공약수는 최소공배수의 약수입니다. 처음 두 경우는 $g > \ell$이므로 불가능합니다. 세 번째 경우는 23이 71의 약수가 아닙니다. $(\ell, g) = (189, 21)$만 남고, 실제로 $189 = 9 \cdot 21$입니다.

5단계: a와 b 구하기. $a = 21u$, $b = 21v$로 놓습니다. 이때 $\gcd(u, v) = 1$입니다. 그러면 $\operatorname{lcm}(a, b) = 21uv = 189$이므로 $uv = 9$입니다. 곱이 9인 서로소인 순서쌍은 $(1, 9)$와 $(9, 1)$이므로 $(a, b) = (21, 189)$와 $(189, 21)$을 얻습니다.

확인: $21 \cdot 189 + 63 = 3969 + 63 = 4032$이고 $20 \cdot 189 + 12 \cdot 21 = 3780 + 252 = 4032$입니다.

> **주의.** 순서쌍 $(u, v) = (3, 3)$도 곱이 9이지만 서로소가 아닙니다. $a = b = 63$이면 $\gcd = \operatorname{lcm} = 63$이 되어 21과 189가 아닙니다. 이것까지 포함하면 3개가 되는데, 이는 선택지에 없습니다.

정답: (B) 2

---

10 대수

출처: 2023 AMC 10B 23번

> 양의 정수로 이루어진 등차수열이 $n > 3$개의 항을 가지고, 첫째항은 a, 공차는 $d > 1$이다. 칼은 이 수열의 모든 항을 받아 적었는데, 한 항만 1만큼 틀리게 적고 나머지 항은 모두 바르게 적었다. 그가 적은 항들의 합은 222였다. $a + d + n$의 값은?
>
> **(A)** 24 **(B)** 20 **(C)** 22 **(D)** 28 **(E)** 26

> **핵심 아이디어.** 한 항이 1만큼 틀렸으므로 실제 합은 221 또는 223입니다. 합의 공식 $2S = n\big(2a + (n-1)d\big)$에 따르면 n은 $2S$의 약수이고, 조건 $a \geq 1$, $d \geq 2$ 때문에 n이 작아야 하므로 확인할 약수는 몇 개뿐입니다.

1단계: 실제 합. 한 항을 1만큼 바꾸면 합도 1만큼 바뀌므로, 실제 합 S는 $S = 222 \pm 1$, 즉 $S = 221$ 또는 $S = 223$입니다.

2단계: 핵심 식. 항이 $a, a + d, \ldots, a + (n-1)d$이므로 다음이 성립합니다.

$$2S = n\big(2a + (n-1)d\big).$$

괄호 안은 정수이므로 n은 $2S$, 즉 442 또는 446의 약수입니다.

3단계: n은 작다. $a \geq 1$이고 $d \geq 2$이므로 괄호 안의 값은 적어도 $2 + 2(n-1) = 2n$입니다. 따라서 $2S \geq 2n^2$, 즉 $n^2 \leq S \leq 223$이므로 $n \leq 14$입니다. $n > 3$과 합치면 $4 \leq n \leq 14$입니다.

4단계: 약수 확인하기.

- $446 = 2 \cdot 223$이고 223은 소수이므로 약수는 $1, 2, 223, 446$뿐이며, 4와 14 사이에 있는 것은 없습니다.
- $442 = 2 \cdot 13 \cdot 17$의 약수는 $1, 2, 13, 17, 26, 34, 221, 442$이고, 4와 14 사이에 있는 것은 13뿐입니다.

따라서 $S = 221$이고 $n = 13$입니다.

5단계: a와 d 구하기. 이제 $442 = 13(2a + 12d)$이므로 $2a + 12d = 34$, 즉 $a + 6d = 17$입니다. $d \geq 2$에서 $d = 2$이면 $a = 5$이고, $d \geq 3$이면 $a \leq -1$이 됩니다. 따라서 $a = 5$, $d = 2$이고, 수열 $5, 7, \ldots, 29$의 합은 $13 \cdot \frac{5+29}{2} = 221$입니다. ✓

따라서 $a + d + n = 5 + 2 + 13 = 20$입니다.

> **주의.** $d > 1$이라는 조건을 잊는 실수. 그러면 $d = 1$, $a = 11$도 $a + 6d = 17$을 만족하여 $a + d + n = 25$가 되는데, 이것은 선택지에 없습니다. 조건 하나를 빠뜨렸다는 신호입니다.

정답: (B) 20