AMC 10

제 27 회

하프 모의고사

해설

정답표 • 출처 • 단계별 풀이

10문항 모두 AMC 10 기출(2000–2025)의 13–23번 문항에서 가져와 원래 번호 순서대로 배열한 것입니다. 원문 © Mathematical Association of America.

정답표와 출처

번호	정답	출처	영역
1	**D**	2017 AMC 10A 13번	대수
2	**C**	2023 AMC 10B 14번	정수론
3	**D**	2024 AMC 10A 16번	기하
4	**C**	2015 AMC 10B 16번	경우의 수와 확률
5	**A**	2006 AMC 10A 17번	기하
6	**B**	2020 AMC 10B 18번	경우의 수와 확률
7	**E**	2018 AMC 10A 21번	기하
8	**C**	2013 AMC 10B 21번	대수
9	**C**	2010 AMC 10B 22번	경우의 수와 확률
10	**A**	2016 AMC 10A 23번	대수

1 대수

출처: 2017 AMC 10A 13번

> 수열을 $F_0 = 0,\ F_1 = 1$, 그리고 $F_n = (F_{n-1} + F_{n-2}$를 나눈 나머지)로 귀납적으로 정의한다. 단, 나누는 수는 3, 적용 범위는 $n \geq 2$. 따라서 이 수열의 처음 몇 항은 다음과 같다: $0, 1, 1, 2, 0, 2, \ldots$. 다음 값은?
>
> $$F_{2017} + F_{2018} + F_{2019} + F_{2020} + F_{2021} + F_{2022} + F_{2023} + F_{2024}?$$
>
> **(A)** 6 **(B)** 7 **(C)** 8 **(D)** 9 **(E)** 10

핵심 아이디어. 앞의 두 항으로 다음 항을 만들고 값이 $0, 1, 2$뿐인 수열은, 언젠가 연속한 두 항의 쌍이 반복될 수밖에 없습니다. 한 쌍이 반복되면 수열 전체가 반복됩니다. 2017 같은 큰 번호는 그 주기를 찾으라는 강한 신호입니다.

1단계. 3으로 나눈 나머지를 계속 구해 봅시다.

$$F_0, \ldots, F_9 = 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 0,\ 2,\ 2,\ 1,\ 0,\ 1.$$

예를 들어 F_6은 $F_5 + F_4 = 2 + 0 = 2$의 나머지이므로 $F_6 = 2$이고, F_7은 $2 + 2 = 4$의 나머지이므로 $F_7 = 1$입니다. 마찬가지로 F_8은 $1 + 2 = 3$의 나머지인 0이고, F_9는 $0 + 1$의 나머지인 1입니다.

2단계. 쌍 $(F_8, F_9) = (0, 1)$은 처음 쌍 (F_0, F_1)과 같습니다. 각 항은 바로 앞의 두 항에 의해서만 정해지므로, 여기서부터 수열은 처음부터 그대로 되풀이됩니다. 즉 8항마다 반복됩니다.

3단계. 구하는 값은 F_{2017}부터 F_{2024}까지 연속한 8개 항의 합입니다. 주기가 8인 수열에서 연속한 8개 항은 순서만 다를 뿐 한 주기 전체이므로, 그 합은 한 주기의 합과 같습니다.

$$0 + 1 + 1 + 2 + 0 + 2 + 2 + 1 = 9.$$

직접 확인할 수도 있습니다. $2017 = 8 \cdot 252 + 1$이므로 $F_{2017}, \ldots, F_{2024}$는 $F_1, \ldots, F_8 = 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0$과 같고, 그 합도 9입니다.

정답: (D) 9

2 정수론

출처: 2023 AMC 10B 14번

> 다음 방정식을 만족시키는 정수의 순서쌍 (m,n)은 몇 개인가
>
> $$m^2+mn+n^2=m^2n^2?$$
>
> **(A)** 7 **(B)** 1 **(C)** 3 **(D)** 6 **(E)** 5

핵심 아이디어. 두 수가 모두 크면 우변 m^2n^2이 좌변 m^2+mn+n^2보다 훨씬 빠르게 커지므로, 작은 값만 가능합니다. $|m|, |n|$ 중 작은 쪽의 범위를 제한한 다음, 몇 안 되는 후보를 확인해 봅시다.

1단계: 0이 있는 경우. $m=0$이면 방정식은 $n^2=0$이 되므로 $n=0$입니다. 마찬가지로 $n=0$이면 $m=0$입니다. 이렇게 순서쌍 $(0,0)$을 얻습니다.

2단계: 둘 다 0이 아닌 경우. $|m|\le|n|$이라 합시다(반대의 경우는 두 문자의 역할을 바꾸면 똑같습니다). 그러면 $m^2\le n^2$이고 $mn\le|m||n|\le n^2$이므로

$$m^2n^2=m^2+mn+n^2\le n^2+n^2+n^2=3n^2.$$

양변을 $n^2>0$으로 나누면 $m^2\le 3$이므로 $m=1$ 또는 $m=-1$입니다.

3단계: 후보 확인. $m=1$이면 $1+n+n^2=n^2$이므로 $n=-1$입니다. $m=-1$이면 $1-n+n^2=n^2$이므로 $n=1$입니다. 역할을 바꾸어도 같은 두 순서쌍 $(1,-1)$과 $(-1,1)$이 나옵니다. 둘 다 성립합니다. 예를 들어 $1-1+1=1=1\cdot 1$입니다.

따라서 해는 $(0,0)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$의 세 쌍입니다.

다른 풀이. 양변에 mn을 더하면 $(m+n)^2=m^2n^2+mn=mn(mn+1)$입니다. 정수 $k=mn$에 대하여 $k(k+1)$이 완전제곱수가 되는 것은 $k=0$ 또는 $k=-1$일 때뿐입니다. $k\ge 1$이면 $k^2<k(k+1)<(k+1)^2$이고, $k\le -2$이면 $k(k+1)=|k|(|k|-1)$은 $(|k|-1)^2$과 $|k|^2$ 사이에 있기 때문입니다(양 끝은 제외). 따라서 $mn=0$이면 $(0,0)$, $mn=-1$이면 $(1,-1)$과 $(-1,1)$을 얻습니다.

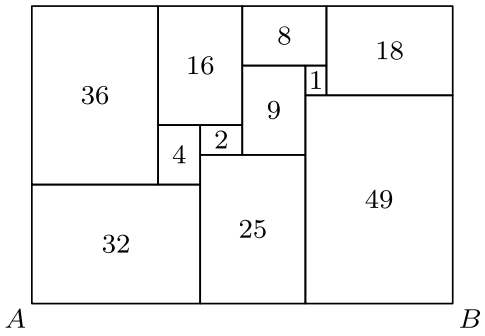
주의. 순서쌍 $(0,0)$은 놓치기 쉽습니다. 이것을 빼면 2개가 되는데, 이는 선택지에 없습니다.

정답: (C) 3

3 기하

출처: 2024 AMC 10A 16번

실제 비율대로 그려진 아래 그림에서 모든 직사각형은 전체를 둘러싸는 직사각형과 닮음이다. 각 수는 그 직사각형의 넓이를 나타낸다. AB의 길이는?



(A) $4+4\sqrt{5}$ **(B)** $10\sqrt{2}$ **(C)** $5+5\sqrt{5}$ **(D)** $10\sqrt[4]{8}$ **(E)** 20

핵심 아이디어. 닮은 직사각형끼리는 변의 길이의 비가 넓이의 **제곱근**의 비와 같습니다. 전체 넓이는 쉽게 구할 수 있으므로, 작은 직사각형의 변을 모두 큰 직사각형의 변의 몇 배로 나타낼 수 있습니다. 그러면 두 조각으로 이루어진 큰 직사각형의 한 변에서 큰 직사각형의 모양에 대한 방정식을 얻습니다.

1단계. 넓이를 모두 더하면 $36+16+8+18+1+9+2+4+25+49+32=200$입니다. 둘러싸는 직사각형의 가로를 $w=AB$(긴 변), 세로를 h라 하면 $wh=200$입니다.

2단계. 넓이가 S이고 큰 직사각형과 닮은 직사각형은 큰 직사각형을 $\sqrt{S/200}$배로 줄인 것입니다. 그 긴 변은 $w\sqrt{S/200}$, 짧은 변은 $h\sqrt{S/200}$입니다. 그림에서 넓이가 36인 직사각형은 세워져 있고(긴 변이 세로), 넓이가 32인 직사각형은 눕혀져 있습니다(짧은 변이 세로).

3단계. 왼쪽 변은 36 직사각형과 32 직사각형이 위아래로 쌓여 이루어집니다.

$$h = w\sqrt{\tfrac{36}{200}} + h\sqrt{\tfrac{32}{200}} = \tfrac{3\sqrt{2}}{10}\,w + \tfrac{2}{5}\,h.$$

따라서 $\frac{3}{5}h = \frac{3\sqrt{2}}{10}w$이고, $h = \frac{\sqrt{2}}{2}w = \frac{w}{\sqrt{2}}$입니다.

4단계. $wh=200$에 대입하면 $\dfrac{w^2}{\sqrt{2}} = 200$이므로 $w^2 = 200\sqrt{2}$입니다. 따라서 다음을 얻습니다.

$$w = \sqrt{100\cdot 2\sqrt{2}} = 10\sqrt{2^{3/2}} = 10\cdot 2^{3/4} = 10\sqrt[4]{8}.$$

다른 풀이. 아래 변을 이용해도 됩니다. 32 직사각형은 눕혀져 있고 25와 49 직사각형은 세워져 있으므로 $w = \frac{2}{5}w + \frac{5}{10\sqrt{2}}h + \frac{7}{10\sqrt{2}}h$입니다. 이로부터 $\frac{3}{5}w = \frac{6}{5\sqrt{2}}h$, 즉 $w=\sqrt{2}\,h$가 되어 같은 모양을 얻습니다.

주의. 둘러싸는 직사각형을 정사각형으로 생각하면 $AB=\sqrt{200}=10\sqrt{2}$로 (B)가 됩니다. 그림은 분명히 가로가 세로보다 깁니다. 실제로 $w=\sqrt{2}\,h$입니다.

정답: (D) $10\sqrt[4]{8}$

---

4 경우의 수와 확률

출처: 2015 AMC 10B 16번

> 앨, 빌, 캘 세 사람이 각각 1 이상 10 이하의 자연수 중 하나를 무작위로 배정받는데, 어느 두 사람도 같은 수를 받지 않는다. 앨의 수가 빌의 수의 자연수 배이고 빌의 수가 캘의 수의 자연수 배일 확률은?
>
> **(A)** $\frac{9}{1000}$ **(B)** $\frac{1}{90}$ **(C)** $\frac{1}{80}$ **(D)** $\frac{1}{72}$ **(E)** $\frac{2}{121}$

핵심 아이디어. 일어날 가능성이 같은 배정은 $10\cdot 9\cdot 8$가지뿐이고, 유리한 경우는 작은 수들로 이루어진 짧은 사슬 "캘의 수가 빌의 수를 나누고, 빌의 수가 앨의 수를 나눈다" 입니다. 그러니 사슬에서 가장 작은 고리인 캘의 수를 기준으로 사슬을 나열해 봅시다.

1단계: 전체 배정의 수. 앨은 10가지, 그다음 빌은 (앨의 수를 제외한) 9가지, 캘은 8가지를 받을 수 있습니다. 따라서 일어날 가능성이 같은 배정은 $10\cdot 9\cdot 8 = 720$가지입니다.

2단계: 사슬 나열. 앨, 빌, 캘의 수를 차례로 (A, B, C)라 씁니다. 세 수가 서로 다르므로 B는 C의 배수 중 $2C$ 이상이고, A는 B의 배수 중 $2B$ 이상입니다. 따라서 $A \geq 4C$이고, 이로부터 $C \leq 2$입니다.

$C = 1$. 이때 $B \geq 2$이고 $A \geq 2B$이므로 $B \leq 5$입니다. $B = 2$: $A \in \{4, 6, 8, 10\}$; $B = 3$: $A \in \{6, 9\}$; $B = 4$: $A = 8$; $B = 5$: $A = 10$. 사슬은 모두 $4 + 2 + 1 + 1 = 8$개입니다.

$C = 2$. 이때 $B \geq 4$는 짝수이고, $A \geq 2B$에서 $B \leq 5$이므로 $B = 4$, $A = 8$입니다. 사슬은 $(8, 4, 2)$ 하나입니다.

3단계. 유리한 배정은 $8 + 1 = 9$가지이므로 확률은

$$\frac{9}{720} = \frac{1}{80}.$$

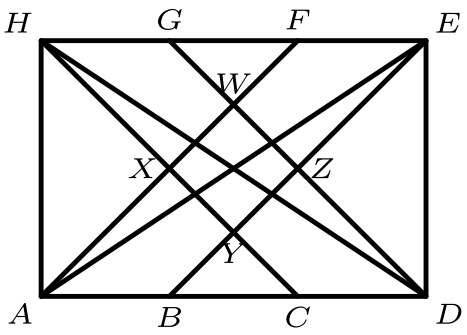
주의. 두 가지 실수가 오답으로 이어집니다. 사슬 $(8, 4, 2)$를 빠뜨리면 $\frac{8}{720} = \frac{1}{90}$, 즉 (B)가 됩니다. 중복을 허용한 것처럼 전체를 $10^3 = 1000$가지로 세면 $\frac{9}{1000}$, 즉 (A)가 됩니다. 그러나 문제에서 어느 두 사람도 같은 수를 받지 않는다고 했습니다.

정답: (C) $\frac{1}{80}$

5 기하

출처: 2006 AMC 10A 17번

직사각형 $ADEH$에서 점 B와 C는 $\overline{AD}$를 삼등분하고, 점 G와 F는 $\overline{HE}$를 삼등분한다. 또한 $AH = AC = 2$이다. 그림에 나타난 사각형 $WXYZ$의 넓이는?



(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(C)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(D)** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **(E)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

핵심 아이디어. 모든 점이 깔끔한 격자 위에 있으므로 직사각형을 좌표평면 위에 놓아 봅시다. 그러면 $WXYZ$의 각 꼭짓점은 간단한 식을 가진 두 직선의 교점이 됩니다. 그림은 복잡하지만, 실제로 $WXYZ$를 둘러싸는 선분은 네 개뿐입니다.

1단계: 좌표. B와 C가 $\overline{AD}$를 삼등분하고 $AC = 2$이므로, 한 칸의 길이는 1이고 $AD = 3$입니다. $A = (0,0)$, $D = (3,0)$, $E = (3,2)$, $H = (0,2)$로 놓으면 $B = (1,0)$, $C = (2,0)$, $G = (1,2)$, $F = (2,2)$입니다.

2단계: 네 직선. 그림에서 $WXYZ$를 둘러싸는 선분은 $\overline{AF}$, $\overline{HC}$, $\overline{BE}$, $\overline{GD}$입니다.

$$AF:\ y = x, \quad HC:\ y = 2 - x, \quad BE:\ y = x - 1, \quad GD:\ y = 3 - x.$$

3단계: 꼭짓점. W: $x = 3 - x$이므로 $W = (1.5, 1.5)$입니다. X: $x = 2 - x$이므로 $X = (1,1)$입니다. Y: $2 - x = x - 1$이므로 $Y = (1.5, 0.5)$입니다. Z: $x - 1 = 3 - x$이므로 $Z = (2,1)$입니다.

4단계: 넓이. 네 변의 기울기가 ± 1이므로 이웃한 두 변은 서로 수직이고, 각 변의 길이는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$입니다. 따라서 $WXYZ$는 정사각형입니다. 두 대각선 WY와 XZ의 길이가 모두 1이므로 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$입니다.

주의. 정사각형의 대각선의 길이가 1이지, 한 변의 길이가 1인 것이 아닙니다. 대각선의 길이를 제곱하면 넓이가 1이 되는데, 이것은 선택지에 없습니다.

정답: (A) $\frac{1}{2}$

6 경우의 수와 확률

출처: 2020 AMC 10B 18번

> 항아리 안에 빨간 공 한 개와 파란 공 한 개가 들어 있다. 근처에는 빨간 공과 파란 공이 여분으로 담긴 상자가 있다. 조지는 다음 시행을 네 번 한다. 항아리에서 공 한 개를 임의로 꺼낸 다음, 상자에서 같은 색의 공 한 개를 가져와 같은 색인 이 두 공을 항아리에 넣는다. 네 번의 시행 후 항아리에는 공이 여섯 개 들어 있다. 항아리에 각 색의 공이 세 개씩 들어 있을 확률은?
>
> **(A)** $\frac{1}{6}$ **(B)** $\frac{1}{5}$ **(C)** $\frac{1}{4}$ **(D)** $\frac{1}{3}$ **(E)** $\frac{1}{2}$

핵심 아이디어. 항아리는 색마다 공 한 개씩으로 시작하고, 한 번 꺼낼 때마다 그 색의 공이 한 개 늘어납니다. 따라서 마지막에 3개와 3개가 되려면 빨간 공을 정확히 두 번, 파란 공을 정확히 두 번 꺼내야 합니다. 그런 순서 하나의 확률을 계산한 뒤, 모든 순서의 곱이 같다는 것을 알아봅시다.

1단계. 네 번 꺼내기 직전 항아리에는 각각 $2, 3, 4, 5$개의 공이 있으므로, 어떤 순서든 분모는 $2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120$입니다.

2단계. 빨강, 빨강, 파랑, 파랑의 순서를 생각합시다. 첫 번째로 빨간 공을 꺼낼 때는 빨간 공이 1개, 두 번째에는 2개 있습니다. 이어서 첫 번째로 파란 공을 꺼낼 때는 파란 공이 1개, 두 번째에는 2개 있습니다.

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5} = \frac{1\cdot2\cdot1\cdot2}{120} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}.$$

3단계. 빨강 두 번, 파랑 두 번인 **어떤** 순서에서도 빨간 공의 분자는 차례로 $1, 2$이고 파란 공의 분자도 차례로 $1, 2$입니다. 위치만 바뀔 뿐입니다. 따라서 각 순서의 확률은 모두 $\frac{1}{30}$입니다.

4단계. 이런 순서는 $\binom{4}{2} = 6$가지이므로 구하는 확률은 $6\cdot\frac{1}{30} = \frac{1}{5}$입니다.

주의. 매번 꺼내는 것을 50–50의 동전 던지기로 생각하면 $\binom{4}{2}\cdot\frac{1}{16} = \frac{3}{8}$이 되는데, 이것은 선택지에 없습니다. 각 색이 나올 확률은 같지 않습니다. 어떤 색이 나오면 다음에는 그 색이 나올 가능성이 더 커집니다.

다른 풀이. 같은 계산으로, 4번 중 빨간 공을 k번 꺼낼 확률은 $k = 0, 1, 2, 3, 4$ 모두에 대해 $\binom{4}{k}\cdot\frac{k!\,(4-k)!}{120} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$임을 알 수 있습니다. 다섯 가지 결과가 모두 같은 확률로 일어나므로 답은 $\frac{1}{5}$입니다.

정답: (B) $\frac{1}{5}$

7 기하

출처: 2018 AMC 10A 21번

> 다음 중 실수 xy평면에서 두 곡선 $x^2+y^2=a^2$과 $y=x^2-a$가 정확히 3개의 점에서 만나도록 하는 a의 값의 집합을 나타낸 것은?
>
> **(A)** $a=\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{4}<a<\frac{1}{2}$ **(C)** $a>\frac{1}{4}$ **(D)** $a=\frac{1}{2}$ **(E)** $a>\frac{1}{2}$

핵심 아이디어. 교점은 연립방정식의 해이므로 포물선의 식을 원의 식에 대입합니다. 포물선은 y를 x의 함수로 주므로, 실수 해 x 하나마다 점이 정확히 하나씩 생깁니다. 따라서 서로 다른 실수 x의 값의 개수만 세면 됩니다. 대입해서 나오는 방정식에는 x의 짝수 차수만 있어서 개수를 세기 쉽습니다.

1단계: 대입하기. 한 점이 두 곡선 위에 모두 있을 필요충분조건은 $y=x^2-a$이고 $x^2+(x^2-a)^2=a^2$인 것입니다. 두 번째 식을 전개하면 다음과 같습니다.

$$x^2+x^4-2ax^2+a^2=a^2 \quad\Longrightarrow\quad x^4-(2a-1)x^2=0 \quad\Longrightarrow\quad x^2\big(x^2-(2a-1)\big)=0.$$

2단계: x의 값 세기. 인수 $x^2=0$은 항상 $x=0$, 즉 점 $(0,-a)$를 줍니다. (이 점은 원 위에 있습니다. $0^2+(-a)^2=a^2$입니다.) 두 번째 인수에서는 $x^2=2a-1$을 얻습니다.

- $2a-1>0$, 즉 $a>\frac{1}{2}$이면 $x=\pm\sqrt{2a-1}$은 서로 다르고 $x=0$과도 다른 두 값을 더 줍니다. 합계: 점 3개.
- $2a-1=0$이면 다시 $x^2=0$이 되어 새로운 점이 없습니다. 합계: 점 1개.
- $2a-1<0$이면 $x^2=2a-1$은 실수 해가 없습니다. 합계: 점 1개.

y는 x에 의해 정해지므로 서로 다른 x의 값은 서로 다른 점을 주고, 두 점이 같은 x의 값을 가질 수는 없습니다.

3단계. 교점이 정확히 3개인 것은 $a>\frac{1}{2}$일 때이고, 그때뿐입니다.

예를 들어 $a=1$이면 교점은 $(0,-1)$과 $(\pm1,0)$입니다. 각 점은 $x^2+y^2=1$과 $y=x^2-1$을 만족합니다.

주의. 경계값 $a=\frac{1}{2}$에서는 두 추가 점이 $(0,-\frac{1}{2})$로 합쳐집니다. 이때 $x\neq0$인 모든 실수에 대하여 $x^2+y^2-a^2=x^4>0$이므로, 포물선은 꼭짓점에서만 원에 접하고 나머지 부분은 원의 바깥에 있습니다. 따라서 교점은 1개뿐입니다. (D)를 고르는 것은 이 접하는 경우를 세 점의 경우로 착각한 것입니다.

정답: (E) $a>\frac{1}{2}$

8 대수

출처: 2013 AMC 10B 21번

> 음이 아닌 정수로 이루어진 감소하지 않는 두 수열의 첫째항이 서로 다르다. 각 수열은 셋째 항부터 각 항이 바로 앞의 두 항의 합이라는 성질을 가지며, 각 수열의 일곱째 항은 N이다. N의 값으로 가능한 가장 작은 값은?
>
> **(A)** 55 **(B)** 89 **(C)** 104 **(D)** 144 **(E)** 273

핵심 아이디어. 피보나치형 수열은 처음 두 항만 정하면 모든 항이 정해지므로, 일곱째 항을 처음 두 항에 대한 식으로 써 봅시다. 일곱째 항이 같은 두 수열에서 정수에 관한 방정식 하나가 나오고, 나머지는 나누어떨어짐(약수와 배수)이 해결해 줍니다.

1단계: 일곱째 항. u, v로 시작하면 항은 다음과 같습니다.

$$u,\ v,\ u+v,\ u+2v,\ 2u+3v,\ 3u+5v,\ 5u+8v.$$

따라서 $N = 5u + 8v$이고, "감소하지 않는다"는 조건은 $u \le v$를 뜻합니다.

2단계: 두 수열 비교하기. 두 수열이 각각 a_1, a_2와 b_1, b_2로 시작하고 $a_1 < b_1$이라 합시다. $5a_1 + 8a_2 = 5b_1 + 8b_2$에서 다음을 얻습니다.

$$5(b_1 - a_1) = 8(a_2 - b_2).$$

좌변은 8의 배수이고 5와 8은 서로소이므로, 8은 $b_1 - a_1$의 약수입니다. $b_1 - a_1 > 0$이므로 $b_1 - a_1 \ge 8$이고, 따라서 $b_1 \ge 8$입니다.

3단계: 하한. 두 번째 수열은 감소하지 않으므로 $b_2 \ge b_1 \ge 8$입니다. 따라서 다음이 성립합니다.

$$N = 5b_1 + 8b_2 \ge 5 \cdot 8 + 8 \cdot 8 = 104.$$

4단계: 실제로 가능함. $b_1 = b_2 = 8$, $a_1 = 0$, $a_2 = 13$으로 잡으면 두 수열은 다음과 같습니다.

$$0,\ 13,\ 13,\ 26,\ 39,\ 65,\ 104 \qquad \text{그리고} \qquad 8,\ 8,\ 16,\ 24,\ 40,\ 64,\ 104.$$

두 수열 모두 감소하지 않고, 첫째항이 서로 다르며, 일곱째 항이 모두 104입니다. 따라서 가장 작은 N은 104입니다.

주의. "감소하지 않는다"는 조건을 무시하는 실수. 그러면 $(8, 0)$과 $(0, 5)$가 모두 $N = 40$을 주는데, 이것은 선택지에조차 없습니다. $b_2 \ge b_1$이라는 조건이 답을 104까지 끌어올립니다.

정답: (C) 104

9 경우의 수와 확률

출처: 2010 AMC 10B 22번

> 서로 다른 사탕 일곱 개를 세 개의 봉지에 나누어 담으려고 한다. 빨간 봉지와 파란 봉지에는 각각 적어도 한 개의 사탕이 들어가야 하고, 흰 봉지는 비어 있어도 된다. 가능한 방법의 수는?
>
> **(A)** 1930 **(B)** 1931 **(C)** 1932 **(D)** 1933 **(E)** 1934

핵심 아이디어. "적어도 하나" 조건은 **금지된** 경우를 세어 빼는 것이 가장 쉽습니다. 두 조건이 동시에 깨질 수 있으므로 포함–배제의 원리를 씁니다.

1단계. 전체 경우. 서로 다른 7개의 사탕은 각각 독립적으로 3개의 봉지 중 하나에 들어가므로, 전체 경우는 $3^7 = 2187$가지입니다.

2단계. 빨간 봉지가 빈 경우. 이때 각 사탕이 들어갈 곳은 2가지(파란 봉지 또는 흰 봉지)뿐이므로 $2^7 = 128$가지입니다. 마찬가지로 파란 봉지가 비는 경우도 128가지입니다.

3단계. 둘 다 빈 경우. 이때 모든 사탕은 흰 봉지에 들어가므로 1가지입니다. 이 경우는 2단계의 두 경우에 모두 세어졌으므로, 조건을 어기는 경우의 수는 다음과 같습니다.

$$128 + 128 - 1 = 255.$$

4단계. 허용되는 방법의 수는 다음과 같습니다.

$$2187 - 255 = 1932.$$

주의. $128 + 128$만 빼고 두 봉지가 모두 빈 한 가지 경우를 다시 더하지 않으면, 그 경우를 두 번 빼게 되어 $2187 - 256 = 1931$, 즉 (B)가 됩니다.

정답: (C) 1932

10 대수

출처: 2016 AMC 10A 23번

> 이항연산 $\diamondsuit$는 0이 아닌 모든 실수 a, b, c에 대하여
>
> $$a \diamondsuit (b \diamondsuit c) = (a \diamondsuit b) \cdot c$$
>
> 와 $a \diamondsuit a = 1$을 만족한다. (여기서 $\cdot$은 곱셈을 나타낸다.) 방정식
>
> $$2016 \diamondsuit (6 \diamondsuit x) = 100$$
>
> 의 해를 $\frac{p}{q}$로 나타낼 수 있다. 여기서 p와 q는 서로소인 양의 정수이다. $p+q$의 값은?
>
> **(A)** 109 **(B)** 201 **(C)** 301 **(D)** 3049 **(E)** 33,601

핵심 아이디어. 규칙 $a \diamondsuit a = 1$은 첫째 항등식 안에서 쓰라고 있는 것입니다. 어떤 $\diamondsuit$가 1로 줄어들도록 변수를 고릅시다. 이것을 두 번 하면 $a \diamondsuit b$의 식이 정해집니다.

1단계. $a \diamondsuit (b \diamondsuit c) = (a \diamondsuit b) \cdot c$에 $c = b$를 대입합니다. $b \diamondsuit b = 1$이므로

$$a \diamondsuit 1 = (a \diamondsuit b) \cdot b. \qquad (*)$$

2단계. 이제 $(*)$에 $b = a$를 대입하면 $a \diamondsuit 1 = (a \diamondsuit a) \cdot a = 1 \cdot a = a$입니다. 이것을 다시 $(*)$에 넣으면 $a = (a \diamondsuit b) \cdot b$이므로

$$a \diamondsuit b = \frac{a}{b}.$$

검산: $a \diamondsuit (b \diamondsuit c) = \dfrac{a}{b/c} = \dfrac{ac}{b} = \dfrac{a}{b} \cdot c$이고, $\frac{a}{a} = 1$입니다. ✓

3단계. 그러면 $6 \diamondsuit x = \frac{6}{x}$이고

$$2016 \diamondsuit \frac{6}{x} = \frac{2016}{6/x} = \frac{2016x}{6} = 336x.$$

$336x = 100$으로 놓으면 $x = \frac{100}{336} = \frac{25}{84}$입니다 (분자와 분모를 4로 나눕니다. $25 = 5^2$과 $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$은 공약수가 없습니다).

따라서 $p + q = 25 + 84 = 109$입니다.

주의. $\frac{100}{336}$에서 약분하지 않고 멈추면 436이 되는데, 이것은 선택지에 없습니다. 문제는 p와 q가 서로소여야 한다고 못 박고 있습니다.

정답: (A) 109