AMC 10

제 28 회

하프 모의고사

해설

정답표 • 출처 • 단계별 풀이

10문항 모두 AMC 10 기출(2000–2025)의 13–23번 문항에서 가져와 원래 번호 순서대로 배열한 것입니다. 원문 © Mathematical Association of America.

정답표와 출처

번호	정답	출처	영역
1	**B**	2024 AMC 10B 13번	대수
2	**D**	2020 AMC 10B 14번	기하
3	**D**	2021 가을 AMC 10B 16번	경우의 수와 확률
4	**A**	2012 AMC 10B 16번	기하
5	**E**	2020 AMC 10A 17번	대수
6	**E**	2023 AMC 10A 19번	기하
7	**D**	2021 AMC 10A 20번	경우의 수와 확률
8	**C**	2018 AMC 10B 21번	정수론
9	**D**	2024 AMC 10A 23번	대수
10	**C**	2017 AMC 10B 23번	정수론

1 대수

출처: 2024 AMC 10B 13번

> 양의 정수 x, y가 등식 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1183}$을 만족시킨다. $x+y$의 최솟값은?
>
> **(A)** 585 **(B)** 595 **(C)** 623 **(D)** 700 **(E)** 791

핵심 아이디어. 먼저 우변을 간단히 합시다. $1183 = 7 \cdot 13^2$이므로 $\sqrt{1183} = 13\sqrt{7}$입니다. 그렇다면 $\sqrt{x}$와 $\sqrt{y}$는 둘 다 $\sqrt{7}$의 정수배이고, 13을 두 부분으로 나누는 것이라고 짐작할 수 있습니다.

1단계. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1183}$의 양변을 제곱하면 $x+y+2\sqrt{xy}=1183$이므로 $\sqrt{xy}$는 유리수입니다. 그런데 xy는 정수이므로 $\sqrt{xy}$는 정수입니다.

2단계. 그러면 $\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{y}) = x+\sqrt{xy}$는 정수이므로, $\sqrt{x} = \dfrac{x+\sqrt{xy}}{13\sqrt{7}}$는 $\sqrt{7}$의 유리수배입니다. $\sqrt{x} = r\sqrt{7}$이라 쓰면 $x = 7r^2$입니다. $7r^2$이 정수이고 7은 제곱인 인수를 갖지 않으므로 r의 분모는 1이어야 합니다. 즉 r은 양의 정수 a입니다. 마찬가지로 $\sqrt{y} = b\sqrt{7}$, $y = 7b^2$입니다.

3단계. 이제 $a\sqrt{7}+b\sqrt{7}=13\sqrt{7}$에서 $a+b=13$이고, 다음과 같습니다.

$$x+y = 7(a^2+b^2).$$

합 $a+b$가 고정되어 있으면 $a^2+b^2 = \frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{2}$이므로, a^2+b^2은 a와 b가 가능한 한 가까울 때 가장 작습니다. 13은 홀수이므로 두 수가 같을 수는 없습니다. 따라서 $a=6$, $b=7$로 잡으면

$$x+y = 7(36+49) = 7\cdot 85 = 595.$$

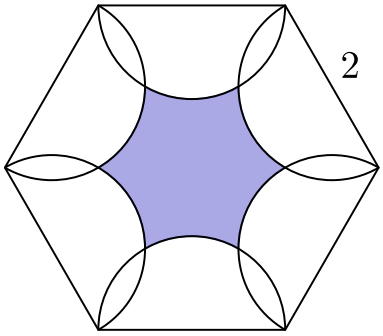
실제로 $x=252$, $y=343$이면 $\sqrt{252}+\sqrt{343} = 6\sqrt{7}+7\sqrt{7} = 13\sqrt{7}$입니다. 비교해 보면, $1+12$, $2+11$, $3+10$, $4+9$, $5+8$, $6+7$로 나눌 때 각각 1015, 875, 763, 679, 623, 595가 되어, 두 수가 고르게 나뉠수록 꾸준히 작아집니다.

정답: (B) 595

2 기하

출처: 2020 AMC 10B 14번

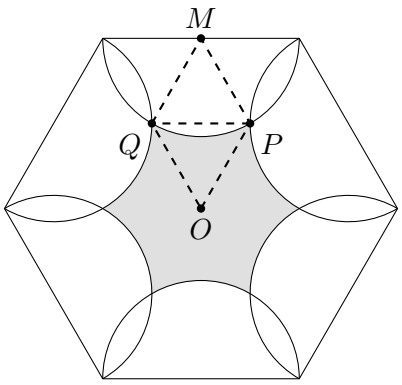
아래 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정육각형의 내부에 반원 여섯 개가 있고, 각 반원의 지름은 정육각형의 변과 일치한다. 정육각형의 내부에 있으면서 모든 반원의 외부에 있는 색칠한 영역의 넓이는?



(A) $6\sqrt{3}-3\pi$ **(B)** $\frac{9\sqrt{3}}{2}-2\pi$ **(C)** $\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}$ **(D)** $3\sqrt{3}-\pi$ **(E)** $\frac{9\sqrt{3}}{2}-\pi$

핵심 아이디어. 정육각형에서 반원 여섯 개를 빼면 반원끼리 겹치는 부분을 두 번 빼게 되므로, 색칠한 영역을 직접 구합시다. 이 영역은 여섯 방향으로 대칭이므로, 중심을 지나는 선으로 합동인 여섯 조각으로 잘라 한 조각만 구하면 됩니다.

1단계: 색칠한 영역의 꼭짓점. 중심을 O라 합시다. 이웃한 두 반원(반지름 1)의 중심은 두 변의 중점입니다. 두 반원은 모두 두 변이 공유하는 정육각형의 꼭짓점을 지나고, 또 다른 한 점에서 다시 만납니다. 그 점은 두 중점을 잇는 직선에 대하여 그 꼭짓점을 대칭이동한 점입니다. 꼭짓점은 O에서 2만큼 떨어져 있고 그 직선은 O에서 $\sqrt{3}\cos 30^\circ = \frac{3}{2}$만큼 떨어져 있으므로, 대칭이동한 점은 O에서 $2\cdot\frac{3}{2}-2=1$만큼 떨어져 있습니다. 따라서 여섯 개의 "별의 끝점" P, Q, ...는 O를 둘러싸는 한 변의 길이가 1인 정육각형을 이룹니다.



2단계: 한 조각. 위쪽 변을 택하고 그 중점을 M이라 합시다. 그러면 $OP=OQ=PQ=1$(작은 정육각형의 변)이고 $MP=MQ=1$(반지름)입니다. 따라서 $OPMQ$는 한 변의 길이가 1인 정삼각형 두 개로 이루어진 마름모이고, 넓이는 $2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$입니다.

이 마름모에서 색칠한 부분은 마름모 안에 있는 반원 부분을 빼고 남은 부분입니다. 빼는 부분은 중심이 M이고 중심각이 $\angle PMQ = 60^\circ$, 반지름이 1인 부채꼴이며, 그 넓이는 $\frac{60}{360} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{6}$입니다.

3단계: 전체. 한 조각의 넓이가 $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$이므로, 색칠한 영역의 넓이는 다음과 같습니다.

$$6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3} - \pi.$$

주의. 정육각형의 넓이는 $6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 = 6\sqrt{3}$이고 반원 여섯 개의 넓이의 합은 $6 \cdot \frac{\pi}{2} = 3\pi$이므로, "정육각형 빼기 반원"을 계산하면 $6\sqrt{3} - 3\pi$, 즉 선택지 (A)가 나옵니다. 하지만 이웃한 반원들은 각 꼭짓점 근처의 렌즈 모양 부분에서 겹치고, 그 렌즈들이 두 번 빠집니다.

정답: (D) $3\sqrt{3} - \pi$

---

3 경우의 수와 확률

출처: 2021 가을 AMC 10B 16번

> 원 둘레에 공 다섯 개가 놓여 있다. 크리스가 이웃한 두 공을 무작위로 골라 서로 자리를 바꾼다. 이어서 실바도 같은 일을 하는데, 실바가 자리를 바꿀 이웃한 두 공을 고르는 것은 크리스의 선택과 독립이다. 이렇게 두 번 연달아 자리를 바꾼 뒤, 처음 위치에 있는 공의 개수의 기댓값은?
>
> **(A)** 1.6 **(B)** 1.8 **(C)** 2.0 **(D)** 2.2 **(E)** 2.4

핵심 아이디어. 대칭성 때문에 크리스가 어느 쌍을 고르는지는 중요하지 않습니다. 크리스의 쌍을 고정하고, 실바가 같은 확률로 고르는 5개의 쌍을 크리스의 쌍과 겹치는 정도에 따라 나누어 봅시다.

1단계. 원 위의 위치에 $1, \ldots, 5$로 번호를 붙이고, 크리스가 위치 1과 2의 공을 바꾼다고 합시다. 실바가 고를 수 있는 쌍은 $\{1,2\}$, $\{2,3\}$, $\{5,1\}$, $\{3,4\}$, $\{4,5\}$의 5가지이고, 각각의 확률은 $\frac{1}{5}$입니다.

2단계. **같은 쌍** $\{1,2\}$: 실바가 두 공을 다시 바꾸므로 5개의 공이 모두 제자리로 돌아옵니다. 확률은 $\frac{1}{5}$입니다.

공 하나를 공유하는 쌍 ($\{2,3\}$ 또는 $\{5,1\}$): 세 공이 돌아가며 자리를 옮기고 나머지 2개는 그대로입니다. 예를 들어 $\{1,2\}$ 다음에 $\{2,3\}$을 바꾸면, 처음에 위치 $1,2,3$에 있던 공은 각각 $3,1,2$로 가고, 공 4와 5는 전혀 움직이지 않습니다. 확률은 $\frac{2}{5}$입니다.

겹치지 않는 쌍 ($\{3,4\}$ 또는 $\{4,5\}$): 네 공이 제자리를 벗어나고 1개만 제자리에 남습니다. 확률은 $\frac{2}{5}$입니다.

3단계. 기댓값은 다음과 같습니다.

$$5 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{2}{5} + 1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{5+4+2}{5} = \frac{11}{5} = 2.2.$$

다른 풀이. 기댓값의 선형성을 이용해 봅시다. 어떤 공이 제자리에 있게 되는 것은 두 번의 교환 모두 그 공을 건드리지 않는 경우(확률 $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$)이거나, 두 사람이 그 공을 포함하는 같은 쌍을 고르는 경우(확률

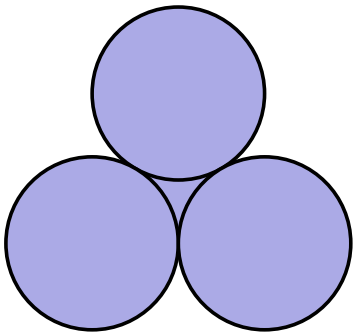
$2 \cdot \frac{1}{25} = \frac{2}{25}$)입니다. (한 번의 교환만 그 공을 움직이거나 서로 다른 두 교환이 움직이면, 그 공은 다른 자리에 놓입니다.) 따라서 각 공이 제자리에 있을 확률은 $\frac{11}{25}$이고, 기댓값은 $5 \cdot \frac{11}{25} = 2.2$입니다.

정답: (D) 2.2

---

4 기하

출처: 2012 AMC 10B 16번

> 반지름이 2인 세 원이 서로 접한다. 그림과 같이 세 원과 이 원들로 둘러싸인 영역의 넓이의 합은?
>
> 
>
> **(A)** $10\pi + 4\sqrt{3}$ **(B)** $13\pi - \sqrt{3}$ **(C)** $12\pi + \sqrt{3}$ **(D)** $10\pi + 9$ **(E)** 13π

핵심 아이디어. 구하는 영역은 하나로 이어진 도형으로, 세 원판에 그 사이의 굽은 틈을 더한 것입니다. 세 중심을 이으면 삼각형이 생기고, 이 도형은 정확히 그 삼각형에 삼각형 밖으로 튀어나온 원판 부분들을 더한 것입니다.

1단계. 반지름이 2인 두 원이 접하면 중심 사이의 거리는 $2 + 2 = 4$이므로, 세 중심은 한 변의 길이가 4인 정삼각형을 이룹니다. 각 접점은 이 삼각형의 변 위에 있으므로 삼각형은 틈 전체를 포함합니다. 삼각형의 넓이는 다음과 같습니다.

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4^2 = 4\sqrt{3}.$$

2단계. 각 원판은 삼각형에 의해 둘로 나뉩니다. 안쪽 부분은 60° 부채꼴(정삼각형의 한 각)이고, 바깥쪽 부분은 $360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$ 부채꼴이며, 그 넓이는 다음과 같습니다.

$$\frac{300}{360} \cdot \pi \cdot 2^2 = \frac{5}{6} \cdot 4\pi = \frac{10\pi}{3}.$$

3단계. 이 도형은 삼각형에 300° 부채꼴 세 개를 더한 것입니다.

$$4\sqrt{3} + 3 \cdot \frac{10\pi}{3} = 10\pi + 4\sqrt{3}.$$

다른 방법으로 확인해 봅시다. 세 원판 전체의 넓이는 12π이고, 틈은 삼각형에서 60° 부채꼴 세 개를 뺀 것이므로 $4\sqrt{3} - 3 \cdot \frac{4\pi}{6} = 4\sqrt{3} - 2\pi$입니다. 둘을 더하면 $12\pi + 4\sqrt{3} - 2\pi = 10\pi + 4\sqrt{3}$입니다.

주의. 삼각형 전체를 세 개의 **온전한** 원판에 더하면 60° 부채꼴 세 개를 두 번 세게 되어 $12\pi + 4\sqrt{3}$이 나오는데, 이것은 선택지에 없습니다.

정답: (A) $10\pi + 4\sqrt{3}$

---

5 대수

출처: 2020 AMC 10A 17번

다음과 같이 정의한다.

$$P(x) = (x - 1^2)(x - 2^2)\cdots(x - 100^2).$$

$P(n) \le 0$을 만족시키는 정수 n은 몇 개인가?

(A) 4900 **(B)** 4950 **(C)** 5000 **(D)** 5050 **(E)** 5100

핵심 아이디어. 여러 인수의 곱은 음수인 인수가 홀수 개일 때, 그리고 그때에만 음수입니다. n이 근 $1^2, 2^2, \ldots, 100^2$을 하나씩 지나갈 때 음수인 인수 $(n - k^2)$의 개수가 어떻게 바뀌는지 따라가 봅시다.

1단계: 부호. $n < 1$이면 100개의 인수가 모두 음수입니다. 100은 짝수이므로 $P(n) > 0$입니다. $n > 100^2$이면 모든 인수가 양수이므로 $P(n) > 0$입니다.

1부터 99까지의 어떤 k에 대하여 $k^2 < n < (k+1)^2$이면, 인수 $n - 1^2, \ldots, n - k^2$은 양수이고 나머지 $100 - k$개는 음수입니다. 따라서 $P(n) < 0$일 필요충분조건은 $100 - k$가 홀수, 즉 k가 홀수인 것입니다. 근에서는 $P(n) = 0$입니다.

2단계: 해당하는 정수. 따라서 $P(n) \le 0$을 만족시키는 정수는 정확히 다음 구간들에 속하는 정수입니다.

$$[1^2, 2^2],\ [3^2, 4^2],\ \ldots,\ [99^2, 100^2].$$

모든 근 k^2은 이 구간들 중 하나의 끝점이고, $(2^2, 3^2)$과 같은 틈의 내부에 있는 정수에서는 $P(n) > 0$입니다.

3단계: 세기. k가 홀수일 때 구간 $[k^2, (k+1)^2]$에는 정수가 $(k+1)^2 - k^2 + 1 = 2k + 2$개 있습니다. 이 구간들은 서로 겹치지 않습니다. $k = 1, 3, \ldots, 99$(50개의 값)에 대하여 더하면 다음과 같습니다.

$$\sum (2k + 2) = 2(1 + 3 + \cdots + 99) + 2 \cdot 50 = 2 \cdot 2500 + 100 = 5100.$$

주의. a부터 b까지의 정수의 개수는 $b - a$가 아니라 $b - a + 1$입니다. $+1$을 빠뜨리면 구간마다 $2k + 1$개로 세게 되어 $2 \cdot 2500 + 50 = 5050$, 즉 선택지 (D)가 나옵니다.

정답: (E) 5100

6 기하

출처: 2023 AMC 10A 19번

> $A(1,2)$와 $B(3,3)$을 잇는 선분을 점 $P(r,s)$를 중심으로 회전시키면 $A'(3,1)$과 $B'(4,3)$을 잇는 선분이 된다. $|r-s|$의 값은?
>
> **(A)** $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{3}{4}$ **(D)** $\frac{2}{3}$ **(E)** 1

핵심 아이디어. 회전하면 모든 점이 중심 둘레의 원을 따라 움직이므로, 중심에서 한 점까지의 거리와 그 점이 옮겨진 점까지의 거리는 같습니다. 따라서 P는 $\overline{AA'}$의 수직이등분선 위에도 있고 $\overline{BB'}$의 수직이등분선 위에도 있습니다.

1단계. $B(3,3)$과 $B'(4,3)$은 같은 수평선 위에 있으므로, $\overline{BB'}$의 수직이등분선은 중점을 지나는 수직선 $x=\frac{7}{2}$입니다.

2단계. $\overline{AA'}$에 대해서는 $PA^2=PA'^2$으로 놓습니다.

$$(x-1)^2+(y-2)^2=(x-3)^2+(y-1)^2.$$

전개하여 x^2과 y^2을 소거하면 $-2x+1-4y+4=-6x+9-2y+1$이므로 $4x-2y=5$입니다.

3단계. $x=\frac{7}{2}$를 대입하면 $14-2y=5$이므로 $y=\frac{9}{2}$입니다. 따라서 $P=\left(\frac{7}{2},\frac{9}{2}\right)$입니다.

확인. $PA^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{2}=PA'^2$이고 $PB^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{2}=PB'^2$입니다. 또 $A\to A'$와 $B\to B'$ 모두 P를 중심으로 같은 각(탄젠트가 $\frac{3}{4}$인 각, 시계 반대 방향)만큼 돌아가므로, 실제로 하나의 회전입니다.

따라서 $|r-s|=\left|\frac{7}{2}-\frac{9}{2}\right|=1$입니다.

정답: (E) 1

7 경우의 수와 확률

출처: 2021 AMC 10A 20번

> 수열 $1, 2, 3, 4, 5$를 재배열할 때, 연속한 세 항이 증가하는 경우가 없고 연속한 세 항이 감소하는 경우도 없도록 하는 방법의 수는?
>
> **(A)** 10 **(B)** 18 **(C)** 24 **(D)** 32 **(E)** 44

핵심 아이디어. "세 항이 연달아 같은 방향으로 가지 않는다"는 것은 이웃한 항 사이의 네 단계가 번갈아 나타나야 한다는 뜻입니다. 즉 올라감, 내려감, 올라감, 내려감이거나 내려감, 올라감, 내려감, 올라감입니다. 그다음 가장 큰 수 5를 놓습니다. 5는 봉우리에만 올 수 있습니다.

1단계: 패턴. 배열을 a, b, c, d, e라 합시다. 연속한 두 단계가 같은 방향이면 그 세 항은 증가하거나 감소합니다. 따라서 단계는 번갈아 나타나야 하고, $a < b > c < d > e$ 또는 $a > b < c > d < e$입니다.

2단계: $a < b > c < d > e$ 세기. a, c, e는 각각 이웃한 어떤 항보다 작으므로, 5는 b 또는 d여야 합니다.

$b = 5$라 하고 $d = r$이라 합시다. 남은 조건은 $c < r$과 $e < r$입니다 ($a < 5$와 $c < 5$는 저절로 성립합니다). 따라서 c와 e는 r보다 작은 $r - 1$개의 수 중 서로 다른 두 수를 순서대로 고른 것이므로 $(r-1)(r-2)$가지이고, 남은 한 수가 a입니다. $r = 1, 2, 3, 4$에 대해 이 값은 $0 + 0 + 2 + 6 = 8$입니다.

대칭(배열을 거꾸로 뒤집기)에 의해 $d = 5$인 것도 8개입니다. 따라서 이 패턴의 배열은 16개입니다.

3단계: 다른 패턴. 각 항 x를 $6 - x$로 바꾸면 $a < b > c < d > e$ 배열이 $a > b < c > d < e$ 배열로 바뀌고 그 반대도 성립하므로, 이런 배열도 16개입니다.

합계. $16 + 16 = 32$.

주의. 두 패턴 중 하나만 세면 16이 되는데, 이것은 선택지에 없습니다. 패턴 하나를 빠뜨렸다는 신호입니다.

정답: (D) 32

8 정수론

출처: 2018 AMC 10B 21번

> 메리는 짝수인 4자리 수 n을 하나 골랐다. 메리는 n의 모든 약수를 왼쪽에서 오른쪽으로 증가하는 순서대로 적었다: $1, 2, \ldots, \frac{n}{2}, n$. 어느 순간 메리는 n의 약수로 323을 적었다. 323의 바로 오른쪽에 적힌 다음 약수로 가능한 가장 작은 값은?
>
> **(A)** 324 **(B)** 330 **(C)** 340 **(D)** 361 **(E)** 646

핵심 아이디어. 핵심은 크기 제한 $n \le 9999$입니다. 323^2은 이미 9999보다 훨씬 크므로, 다음 약수 d는 $323 = 17 \cdot 19$와 서로소일 수 없습니다. 323과 공약수를 가지려면 d는 323보다 적어도 17만큼 커야 합니다.

1단계: 소인수분해. $323 = 17 \cdot 19$이고, $323^2 = 104{,}329$입니다.

2단계: d는 323과 공약수를 가진다. $d > 323$을 다음 약수라 합시다. $\gcd(d, 323) = 1$이면 323과 d가 모두 n의 약수이고 공약수가 없으므로 $323d$도 n의 약수입니다. 그런데 $323d > 323 \cdot 323 = 104{,}329 > 9999$이므로 4자리 수 n에서는 불가능합니다. 따라서 $g = \gcd(d, 323)$의 값은 17, 19, 323 중 하나입니다.

3단계: 하한. g는 d와 323을 모두 나누므로 $d - 323$도 나눕니다. $d - 323 > 0$이므로 $d - 323 \ge g \ge 17$이고, 따라서 $d \ge 340$입니다.

4단계: 340은 실제로 가능하다. n은 $323 = 17 \cdot 19$와 $340 = 2^2 \cdot 5 \cdot 17$로 모두 나누어떨어져야 하므로 $\text{lcm} = 2^2 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19 = 6460$으로 나누어떨어져야 합니다. $n = 6460$으로 잡으면 이는 짝수인 4자리 수이고, 323과 340이 모두 약수이며, 3단계에 의해 그 사이에는 약수가 없습니다. (그 근처의 약수는 $\ldots, 190, 323, 340, 380, \ldots$입니다.)

주의. n이 짝수이므로 $2 \cdot 323 = 646$은 항상 n의 약수이고, 조건을 만족하는 대부분의 n(1292나 3230 등)에서는 실제로 이것이 다음 약수입니다. 여기서 멈추면 646, 즉 E가 됩니다. 하지만 문제는 **가능한 가장 작은** 값을 묻습니다.

주의. 324가 가장 작아 보이지만 $\gcd(324, 323) = 1$이므로 2단계에 의해 불가능합니다. 이것이 A입니다.

정답: (C) 340

9 대수

출처: 2024 AMC 10A 23번

> 정수 a, b, c가 다음을 만족한다.
>
> $$ab + c = 100,$$
> $$bc + a = 87,$$
> $$ca + b = 60.$$
>
> $ab + bc + ca$의 값은?
>
> **(A)** 212 **(B)** 247 **(C)** 258 **(D)** 276 **(E)** 284

핵심 아이디어. 세 식이 거의 대칭이므로 두 식을 빼 봅시다. 그 차는 인수분해됩니다. 우변의 차가 소수 13이고 변수가 정수이므로, 인수분해된 식에서 가능한 경우는 몇 개뿐입니다.

1단계: 빼고 인수분해하기. 첫째 식에서 둘째 식을 빼면

$$ab + c - bc - a = 13 \implies b(a - c) - (a - c) = 13 \implies (a - c)(b - 1) = 13.$$

2단계: 네 가지 경우. 13은 소수이므로 $(a - c,\ b - 1)$은 $(1, 13)$, $(13, 1)$, $(-1, -13)$, $(-13, -1)$ 중 하나입니다. 각 경우에 b와 (c로 나타낸) a를 $bc + a = 87$에 대입합니다.

- $b = 14$, $a = c + 1$: $14c + c + 1 = 87$에서 $15c = 86$이므로 정수가 아닙니다.
- $b = 2$, $a = c + 13$: $2c + c + 13 = 87$에서 $3c = 74$이므로 정수가 아닙니다.
- $b = -12$, $a = c - 1$: $-12c + c - 1 = 87$에서 $-11c = 88$이므로 $c = -8$, $a = -9$입니다.
- $b = 0$, $a = c - 13$: $0 + c - 13 = 87$에서 $c = 100$, $a = 87$입니다. 그러나 이때 $ca + b = 8700 \neq 60$이므로 성립하지 않습니다.

3단계: 확인하고 마무리하기. $(a, b, c) = (-9, -12, -8)$일 때 $ab + c = 108 - 8 = 100$, $bc + a = 96 - 9 = 87$, $ca + b = 72 - 12 = 60$으로 세 식이 모두 성립합니다. 따라서

$$ab + bc + ca = 108 + 96 + 72 = 276.$$

다른 풀이. 세 식을 모두 더하면 $ab + bc + ca + (a + b + c) = 247$입니다. $a + b + c = -29$이므로 $ab + bc + ca = 247 + 29 = 276$입니다.

주의. 세 식을 더한 뒤 247, 즉 (B)에서 멈추면 좌변에 $a + b + c$도 들어 있다는 것을 잊은 것입니다.

정답: (D) 276

10 정수론

출처: 2017 AMC 10B 23번

> 1부터 44까지의 정수를 차례대로 이어 써서 만든 79자리 수를
>
> $$N = 123456789101112\ldots4344$$
>
> 라 하자. N을 45로 나눈 나머지는?
>
> **(A)** 1 **(B)** 4 **(C)** 9 **(D)** 18 **(E)** 44

핵심 아이디어. $45 = 5 \times 9$이고, 5와 9에는 모두 빠른 판정법이 있습니다. 5는 일의 자리 숫자로, 9는 각 자리 숫자의 합으로 판정합니다. 그러니 N을 5와 9로 각각 나눈 나머지를 구한 뒤 합칩시다.

1단계. 5로 나눈 나머지. 어떤 수를 5로 나눈 나머지는 일의 자리 숫자에만 달려 있습니다. N은 4로 끝나므로, N을 5로 나눈 나머지는 4입니다.

2단계. 9로 나눈 나머지. 어떤 수와 그 수의 각 자리 숫자의 합은 9로 나눈 나머지가 같습니다. N의 숫자들은 바로 $1, 2, \ldots, 44$의 숫자들이므로, N의 각 자리 숫자의 합은 $1, 2, \ldots, 44$ 각각의 자리 숫자의 합을 모두 더한 것입니다. 이 수들도 각각 9로 나눈 나머지가 자기 자리 숫자의 합과 같으므로 다음이 성립합니다.

$$N \equiv 1 + 2 + \cdots + 44 = \frac{44 \cdot 45}{2} = 990 \pmod 9.$$

$990 = 9 \cdot 110$이므로 N은 9의 배수입니다.

3단계. 합치기. $0 \le R \le 44$인 나머지 R 중에서 9의 배수이면서 5로 나눈 나머지가 4인 것을 찾아야 합니다. 이 범위의 9의 배수는 $0, 9, 18, 27, 36$이고, 이들을 5로 나눈 나머지는 각각 $0, 4, 3, 2, 1$입니다. 조건을 만족하는 것은 $R = 9$뿐입니다. (5와 9는 서로소이므로, 45보다 작은 그런 나머지는 정확히 하나입니다.)

주의. 1단계의 나머지 4는 45가 아니라 5로 나눈 나머지입니다. 거기서 멈추면 (B)를 고르게 됩니다.

정답: (C) 9