AMC 10

제 29 회

하프 모의고사

해설

정답표 • 출처 • 단계별 풀이

10문항 모두 AMC 10 기출(2000–2025)의 13–23번 문항에서 가져와 원래 번호 순서대로 배열한 것입니다. 원문 © Mathematical Association of America.

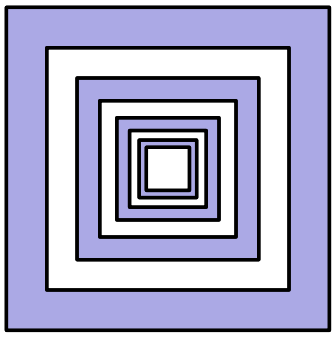
정답표와 출처

번호	정답	출처	영역
1	**D**	2025 AMC 10A 13번	대수
2	**C**	2021 가을 AMC 10B 14번	경우의 수와 확률
3	**A**	2019 AMC 10A 16번	기하
4	**C**	2021 AMC 10A 16번	대수
5	**A**	2022 AMC 10A 18번	기하
6	**A**	2020 AMC 10B 19번	정수론
7	**B**	2014 AMC 10B 21번	기하
8	**A**	2025 AMC 10B 22번	경우의 수와 확률
9	**B**	2023 AMC 10B 22번	대수
10	**D**	2010 AMC 10B 23번	경우의 수와 확률

1 대수

출처: 2025 AMC 10A 13번

아래 그림에서 바깥 정사각형 안에는 무수히 많은 정사각형이 있으며, 각 정사각형은 바깥 정사각형과 중심이 같고 변이 바깥 정사각형의 변과 평행하다. 한 정사각형의 한 변의 길이와 바로 안쪽 정사각형의 한 변의 길이의 비는 k이고, $0 < k < 1$이다. 정사각형들 사이의 공간은 그림과 같이 하나씩 걸러 색칠되어 있다(그림이 반드시 정확한 축척으로 그려진 것은 아니다).



색칠된 부분의 넓이는 처음 정사각형의 넓이의 64%이다. k의 값은?

(A) $\frac{3}{5}$ **(B)** $\frac{16}{25}$ **(C)** $\frac{2}{3}$ **(D)** $\frac{3}{4}$ **(E)** $\frac{4}{5}$

핵심 아이디어. "무수히 많은" 도형이 매번 같은 비율로 줄어든다면 **등비급수**를 떠올려야 합니다. 색칠된 띠 하나하나를 두 정사각형 넓이의 차로 쓰고, 모두 더한 다음, 그 합을 64%로 놓아 봅시다.

1단계. 크기 정하기. $0 < k < 1$이므로 각 정사각형은 그것을 둘러싼 정사각형보다 k배로 **작아집니다**. 바깥 정사각형의 한 변을 1이라 합시다. 그러면 바깥에서 안쪽으로 한 변의 길이는 $1, k, k^2, k^3, \ldots$ 이고, 넓이는 $1, k^2, k^4, k^6, \ldots$ 입니다. 넓이는 k가 아니라 k^2배씩 줄어듭니다.

2단계. 색칠된 띠 더하기. 그림에서 가장 바깥 띠는 색칠되어 있고, 그다음 띠는 흰색이며, 이런 식으로 반복됩니다. 첫 번째 색칠된 띠의 넓이는 $1 - k^2$, 다음 색칠된 띠의 넓이는 $k^4 - k^6$, 이런 식이므로

$$\text{색칠된 넓이} = (1 - k^2) + (k^4 - k^6) + \cdots = 1 - k^2 + k^4 - k^6 + \cdots .$$

이것은 첫째항이 1이고 공비가 $-k^2$인 등비급수이며, $0 < k^2 < 1$이므로 그 합은

$$\frac{1}{1 - (-k^2)} = \frac{1}{1 + k^2}.$$

3단계. 풀기. 처음 정사각형의 넓이가 1이므로 $\frac{1}{1 + k^2} = 64\% = \frac{16}{25}$이어야 합니다. 양변의 역수를 취하면 $1 + k^2 = \frac{25}{16}$이므로 $k^2 = \frac{9}{16}$이고, $k > 0$이므로 $k = \frac{3}{4}$입니다.

확인. $k = \frac{3}{4}$이면 $k^2 = \frac{9}{16}$이고 $\frac{1}{1+9/16} = \frac{16}{25} = 0.64$입니다. ✓

주의. 한 변의 길이는 k배씩 줄지만, 넓이는 k^2배씩 줄어듭니다. 공비로 $-k^2$ 대신 $-k$를 쓰면 $\frac{1}{1+k} = \frac{16}{25}$에서 $k = \frac{9}{16}$가 나오는데, 이것은 선택지에 없습니다. 제곱을 빠뜨렸다는 신호입니다.

정답: (D) $\frac{3}{4}$

---

2 경우의 수와 확률

출처: 2021 가을 AMC 10B 14번

> 우나는 표준 6면 주사위 6개를 동시에 굴려서 나온 6개의 수의 곱을 계산한다. 이 곱이 4로 나누어떨어질 확률은?
>
> **(A)** $\frac{3}{4}$ **(B)** $\frac{57}{64}$ **(C)** $\frac{59}{64}$ **(D)** $\frac{187}{192}$ **(E)** $\frac{63}{64}$

핵심 아이디어. "4로 나누어떨어진다"는 것은 곱에 인수 2가 적어도 두 개 있다는 뜻입니다. 실패하는 경우, 즉 인수 2가 많아야 하나인 경우가 훨씬 드물고 설명하기도 쉬우므로 여사건을 세어 봅시다.

1단계. 각 눈을 그 안에 든 인수 2의 개수로 분류합니다. $1, 3, 5$에는 하나도 없고, 2와 6에는 정확히 하나, 4에는 두 개가 있습니다. 주사위 하나가 홀수일 확률은 $\frac{1}{2}$, 2 또는 6이 나올 확률은 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, 4가 나올 확률은 $\frac{1}{6}$입니다.

2단계. 곱이 4로 나누어떨어지지 **않는** 경우는 정확히 다음 두 가지입니다.

- 인수 2가 없는 경우: 여섯 개의 주사위가 모두 홀수입니다. 확률은 $\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$입니다.
- 인수 2가 정확히 하나인 경우: 주사위 하나가 2 또는 6이고 나머지 다섯 개는 홀수입니다. 어느 주사위인지 고르는 방법이 6가지이므로 확률은 $6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{6}{96} = \frac{4}{64}$입니다.

그 밖의 모든 경우에는 4가 나온 주사위가 있거나, 2 또는 6이 나온 주사위가 적어도 두 개 있으므로 인수 2가 적어도 두 개 있습니다.

3단계. 여사건의 확률은 $\frac{1}{64} + \frac{4}{64} = \frac{5}{64}$이므로, 구하는 확률은 다음과 같습니다.

$$1 - \frac{5}{64} = \frac{59}{64}.$$

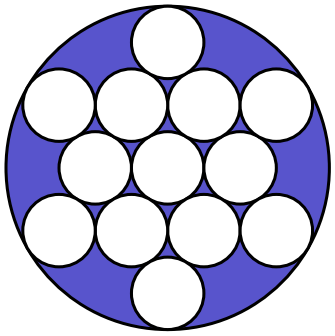
주의. "인수 2가 정확히 하나인" 경우를 빠뜨리고 모두 홀수인 경우만 빼면 $1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$, 즉 선택지 (E)가 됩니다. "짝수가 나온 주사위가 정확히 하나"인 경우를 실패로 보아 그 주사위가 4인 경우까지 포함하면 $1 - \frac{1+6}{64} = \frac{57}{64}$, 즉 선택지 (B)가 됩니다. 4가 하나만 나와도 곱은 4로 나누어떨어집니다.

정답: (C) $\frac{59}{64}$

3 기하

출처: 2019 AMC 10A 16번

아래 그림은 큰 원 안에 반지름이 1인 원 13개가 있는 모습이다. 원들이 만나는 점은 모두 접점이다. 그림에서 색칠된 영역, 즉 큰 원의 내부이면서 반지름이 1인 모든 원의 외부인 영역의 넓이는?



(A) $4\pi\sqrt{3}$ **(B)** 7π **(C)** $\pi\left(3\sqrt{3}+2\right)$ **(D)** $10\pi\left(\sqrt{3}-1\right)$ **(E)** $\pi\left(\sqrt{3}+6\right)$

핵심 아이디어. 색칠된 넓이 = 큰 원 − 작은 원 13개이므로, 모든 것은 큰 원의 반지름에 달려 있습니다. 서로 접하는 단위원들의 중심은 정확히 2만큼 떨어져 있으므로, 중심들은 한 변이 2인 정삼각형들의 격자를 이룹니다. 이런 격자에서의 거리는 높이 $\sqrt{3}$에서 나옵니다.

1단계. 중심들. 가운데 작은 원의 중심을 O라 하면, 대칭성에 의해 이 점은 큰 원의 중심이기도 합니다. 두 작은 원이 접할 때마다 두 중심 사이의 거리는 $1+1=2$입니다. 따라서 맨 위 원의 중심 T와 그 바로 아래 두 원의 중심은 한 변이 2인 정삼각형을 이루고, 그 두 중심과 O도 같은 밑변을 공유하는 한 변이 2인 또 하나의 정삼각형을 이룹니다.

2단계. 거리 OT. 한 변이 2인 정삼각형의 높이는 $\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$입니다. 두 삼각형은 공통 밑변의 서로 반대쪽에 놓여 있으므로

$$OT=\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}.$$

맨 위 원은 T의 바로 위에 있는 점에서 큰 원에 접하므로, 큰 원의 반지름은

$$R=OT+1=2\sqrt{3}+1.$$

(네 귀퉁이의 원들도 O로부터 거리가 $2\sqrt{3}$이므로 역시 큰 원에 접합니다.)

3단계. 넓이. 주의 깊게 전개하면

$$R^2=(2\sqrt{3}+1)^2=12+4\sqrt{3}+1=13+4\sqrt{3}.$$

큰 원의 넓이는 $(13+4\sqrt{3})\pi$이고, 단위원 13개의 넓이의 합은 13π이므로

$$\text{색칠된 넓이}=(13+4\sqrt{3})\pi-13\pi=4\pi\sqrt{3}.$$

주의. 제곱할 때 가운데 항을 빠뜨리지 마십시오. $(2\sqrt{3}+1)^2\neq 12+1$입니다. $4\sqrt{3}$이 없으면 색칠된 넓이가 0이 되는데, 이는 분명히 불가능합니다.

정답: (A) $4\pi\sqrt{3}$

---

4 대수

출처: 2021 AMC 10A 16번

> 다음 수의 목록에서 $1 \le n \le 200$인 각 정수 n은 목록에 n번 나타난다.
>
> $$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \ldots, 200, 200, \ldots, 200$$
>
> 이 목록에 있는 수들의 중앙값은?
>
> **(A)** 100.5 **(B)** 134 **(C)** 142 **(D)** 150.5 **(E)** 167

핵심 아이디어. 중앙값은 **위치**에 관한 것이므로, 각 값 앞에 항이 몇 개 있는지 세어 봅시다. n이 n번 나타나므로, n의 마지막 항은 $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$번째 자리, 즉 삼각수 번째 자리에 있습니다.

1단계. 목록에는 $1 + 2 + \cdots + 200 = \frac{200 \cdot 201}{2} = 20100$개의 항이 있습니다. 이는 짝수이므로, 중앙값은 10050번째 항과 10051번째 항의 평균입니다.

2단계. $\frac{n(n+1)}{2}$이 10050에 가까운 n을 찾아봅시다. 그러면 $n^2 \approx 20100$이고, $141^2 = 19881$, $142^2 = 20164$이므로 n을 141이나 142 근처에서 시도해 봅니다.

$$\frac{141 \cdot 142}{2} = 10011, \qquad \frac{142 \cdot 143}{2} = 10153.$$

3단계. 마지막 141은 10011번째 자리에, 마지막 142는 10153번째 자리에 있으므로 10012번째부터 10153번째까지는 모두 142입니다. 10050과 10051은 모두 이 범위에 있으므로 가운데 두 항은 모두 142이고, 중앙값은 142입니다.

주의. 100.5는 **서로 다른** 값 $1, 2, \ldots, 200$의 중앙값입니다. 큰 수일수록 훨씬 여러 번 나타나므로, 중앙값은 가운데 값보다 훨씬 위로 끌려 올라갑니다. 선택지 (A)는 이 반복을 무시한 것입니다.

정답: (C) 142

5 기하

출처: 2022 AMC 10A 18번

> 좌표평면을 먼저 원점을 중심으로 시계 반대 방향으로 k도 회전시킨 다음 y축에 대하여 대칭이동시키는 변환을 T_k라 하자. 변환 $T_1, T_2, T_3, \cdots, T_n$을 차례로 시행하면 점 $(1,0)$이 다시 자기 자신으로 돌아오는 가장 작은 양의 정수 n의 값은?
>
> **(A)** 359 **(B)** 360 **(C)** 719 **(D)** 720 **(E)** 721

핵심 아이디어. 원점에 대한 회전과 대칭이동은 원점으로부터의 거리를 바꾸지 않으므로, 점의 **각**만 따라가면 됩니다. 연속한 두 변환을 한꺼번에 하면 아주 간단해집니다.

1단계: 변환 하나. 점의 극각을 θ(도 단위)라 합시다. 시계 반대 방향으로 k° 회전하면 각은 $\theta + k$가 됩니다. y축에 대한 대칭이동은 각 α를 $180 - \alpha$로 보냅니다. 따라서

$$T_k : \theta \longmapsto 180 - \theta - k.$$

2단계: 두 번 연속. T_k를 적용한 다음 T_{k+1}을 적용하면

$$\theta \mapsto 180 - \theta - k \mapsto 180 - (180 - \theta - k) - (k+1) = \theta - 1.$$

즉 연속한 두 변환을 한 쌍으로 묶을 때마다 점은 시계 방향으로 1°씩 회전할 뿐입니다.

3단계: 각 0에서 출발하는 $(1,0)$ 따라가기. 짝수 번, 즉 $2m$번 시행한 뒤의 각은 $-m$입니다. 이것이 처음으로 $0 \pmod{360}$이 되는 것은 $m = 360$일 때, 즉 720번 시행한 뒤입니다.

홀수 번, 즉 $2m+1$번 시행한 뒤에는 각 $-m$에 T_{2m+1}을 적용하므로 각이 $180 - (-m) - (2m+1) = 179 - m$이 됩니다. 이것이 처음으로 $0 \pmod{360}$이 되는 것은 $m = 179$일 때, 즉 $2 \cdot 179 + 1 = 359$번 시행한 뒤입니다.

4단계. 둘 중 작은 값은 359입니다. (확인: 358번 시행한 뒤의 각은 -179이고, T_{359}는 이를 $180 + 179 - 359 = 0$으로 보냅니다.)

주의. 한 **쌍**마다 1°씩 회전한다는 것을 보고 360쌍이 필요하다고 결론 내려 720, 즉 (D)를 답하는 학생이 많습니다. 이것은 짝수 번 시행한 경우만 확인한 것입니다. 홀수 번 시행한 뒤에 점이 더 일찍 $(1,0)$으로 돌아올 수 있습니다.

정답: (A) 359

6 정수론

출처: 2020 AMC 10B 19번

> 어떤 카드 게임에서 플레이어는 서로 다른 52장의 카드로 이루어진 덱에서 10장의 카드를 한 패로 받는다. 플레이어가 받을 수 있는 서로 다른 (순서를 고려하지 않은) 패의 가짓수는 $158A00A4AA0$으로 쓸 수 있다. 숫자 A는?
>
> **(A)** 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 6 **(E)** 7

핵심 아이디어. 이 수는 $\binom{52}{10}$입니다. 정확히 계산하려면 오래 걸리지만, $158A00A4AA0$에서 마지막 0 바로 앞의 숫자가 A입니다. 그러니 일의 자리 숫자 하나만 알면 되고, 일의 자리 숫자는 인수를 하나씩 곱해 가며 추적할 수 있습니다.

1단계. 다음과 같이 씁니다.

$$\binom{52}{10} = \frac{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44\cdot 43}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}.$$

약분하면 $\frac{52}{4}=13$, $\frac{51}{3}=17$, $\frac{50}{10}=5$, $\frac{49}{7}=7$, $\frac{48}{8\cdot 6}=1$, $\frac{45}{9\cdot 5}=1$, $\frac{44}{2}=22$입니다. 남는 것은 다음과 같습니다.

$$\binom{52}{10} = 13\cdot 17\cdot 5\cdot 7\cdot 47\cdot 46\cdot 22\cdot 43 = 10\cdot\big(13\cdot 17\cdot 7\cdot 47\cdot 46\cdot 11\cdot 43\big),$$

여기서 $5\cdot 22 = 110 = 10\cdot 11$을 이용했습니다.

2단계. $158A00A4AA0$을 10으로 나누면 $158A00A4AA$가 되고, 그 일의 자리 숫자는 A입니다. 따라서 A는 $13\cdot 17\cdot 7\cdot 47\cdot 46\cdot 11\cdot 43$의 일의 자리 숫자입니다.

3단계. 곱해 나가면서 일의 자리 숫자만 남겨 봅시다. $3\cdot 7 = 21 \to 1$, $1\cdot 7 = 7$, $7\cdot 7 = 49 \to 9$, $9\cdot 6 = 54 \to 4$, $4\cdot 1 = 4$, $4\cdot 3 = 12 \to 2$. 따라서 $A = 2$입니다.

(실제로 $\binom{52}{10} = 15{,}820{,}024{,}220$입니다.)

주의. 곱 전체의 일의 자리 숫자를 구하면 안 됩니다. 인수 10 때문에 0으로 끝나는데, 0은 선택지에 없습니다. 숫자 A는 그 10을 **제거한 뒤**의 일의 자리 숫자입니다.

정답: (A) 2

7 기하

출처: 2014 AMC 10B 21번

> 사다리꼴 $ABCD$의 평행한 두 변 $\overline{AB}$와 $\overline{CD}$의 길이는 각각 33과 21이다. 나머지 두 변의 길이는 10과 14이다. 각 A와 B는 예각이다. $ABCD$의 두 대각선 중 짧은 것의 길이는?
>
> **(A)** $10\sqrt{6}$ **(B)** 25 **(C)** $8\sqrt{10}$ **(D)** $18\sqrt{2}$ **(E)** 26

핵심 아이디어. D와 C에서 $\overline{AB}$에 수선을 내립시다. 그러면 사다리꼴이 직사각형 하나와, 미지의 높이를 공유하는 직각삼각형 두 개로 나뉘므로, 피타고라스 정리로 세운 두 식이 모든 것을 결정합니다.

1단계: 설정. $AD = 10$, $BC = 14$라 합시다(두 옆변을 바꾸면 사다리꼴이 좌우로 뒤집힐 뿐이므로 두 대각선은 그대로입니다). D와 C에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 각각 E와 F라 합시다. 각 A와 B가 예각이므로 E와 F는 선분 $\overline{AB}$ 위에 있고, $EF = CD = 21$입니다.

$AE = x$, 높이를 h라 합시다. 그러면 $FB = 33 - 21 - x = 12 - x$입니다.

2단계: 두 직각삼각형.

$$x^2 + h^2 = 10^2 = 100, \qquad (12 - x)^2 + h^2 = 14^2 = 196.$$

둘째 식에서 첫째 식을 빼면 $(12 - x)^2 - x^2 = 96$, 즉 $144 - 24x = 96$이므로 $x = 2$입니다. 그러면 $h^2 = 100 - 4 = 96$입니다. ($AE = 2$와 $FB = 10$이 모두 양수이므로 예각이라는 조건과 맞습니다.)

3단계: 대각선. 대각선 AC는 A에서 F까지 수평으로 $AE + EF = 2 + 21 = 23$만큼 가고 높이 h만큼 올라가므로

$$AC = \sqrt{23^2 + 96} = \sqrt{529 + 96} = \sqrt{625} = 25.$$

대각선 BD는 B에서 E까지 수평으로 $33 - 2 = 31$만큼 가므로

$$BD = \sqrt{31^2 + 96} = \sqrt{1057} \approx 32.5.$$

더 짧은 대각선은 $AC = 25$입니다.

정답: (B) 25

8 경우의 수와 확률

출처: 2025 AMC 10B 22번

> 일곱 자리 양의 정수 하나를 무작위로 고른다. 각 자리 숫자의 합이 61일 때, 이 수가 11로 나누어떨어질 확률은?
>
> **(A)** $\frac{3}{14}$ **(B)** $\frac{3}{11}$ **(C)** $\frac{2}{7}$ **(D)** $\frac{4}{11}$ **(E)** $\frac{3}{7}$

핵심 아이디어. 각 자리 숫자의 합 61은 최댓값 $7\cdot 9 = 63$보다 2만 작으므로, 거의 모든 자리가 9입니다. "모자란 2"가 어디에 있는지에 따라 수를 세고, 11의 배수 판정법(자리 숫자의 교대합)을 사용합시다.

1단계: 수 나열하기. $63 - 61 = 2$이므로, 모든 자리가 9인 상태에서 합해서 2만큼 모자랍니다. 한 자리가 7이거나(그 자리는 7곳 중 어디든 가능), 두 자리가 8입니다(자리를 고르는 방법 $\binom{7}{2} = 21$가지). 따라서 모두 $7 + 21 = 28$개의 수가 있고, 모두 같은 확률로 나옵니다. 맨 앞자리가 0인 수는 없으므로 모두 진짜 일곱 자리 수입니다.

2단계: 11의 배수 판정. 어떤 수가 11로 나누어떨어질 필요충분조건은 (홀수 번째 자리 숫자의 합) − (짝수 번째 자리 숫자의 합)이 11의 배수인 것입니다. 홀수 번째 자리는 1, 3, 5, 7번째(네 자리)이고, 짝수 번째 자리는 2, 4, 6번째(세 자리)입니다.

홀수 번째 자리들과 짝수 번째 자리들이 9보다 모자란 양을 각각 d_O, d_E라 하면 $d_O + d_E = 2$입니다. 그러면

$$(36 - d_O) - (27 - d_E) = 9 - d_O + d_E = 9 - d_O + (2 - d_O) = 11 - 2d_O.$$

$d_O = 0, 1, 2$일 때 이 값은 11, 9, 7이므로, 11의 배수가 되는 것은 $d_O = 0$일 때뿐입니다.

3단계: 세기. 따라서 모자란 2 전체가 세 짝수 번째 자리에 있어야 합니다. 그중 한 자리가 7이거나(3가지) 두 자리가 8이므로($\binom{3}{2} = 3$가지), 이런 수는 6개입니다. 예를 들어 $9799999 = 11 \cdot 890909$입니다.

확률은 $\frac{6}{28} = \frac{3}{14}$입니다.

주의. 한 자리가 7인 경우도 모자란 양을 채운다는 것을 잊고 "두 자리가 8"인 경우만 세면 $\frac{3}{21} = \frac{1}{7}$이 나오는데, 이것은 선택지에 없습니다. 다시 세어 보라는 신호입니다.

정답: (A) $\frac{3}{14}$

9 대수

출처: 2023 AMC 10B 22번

> 다음 방정식을 만족하는 서로 다른 x의 값은 몇 개인가?
>
> $$\lfloor x \rfloor^2 - 3x + 2 = 0,$$
>
> 단, $\lfloor x \rfloor$는 x보다 작거나 같은 최대의 정수이다.
>
> **(A)** 무수히 많다 **(B)** 4 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 0

핵심 아이디어. 방정식에 x와 $\lfloor x \rfloor$가 섞여 있습니다. 정수 $n = \lfloor x \rfloor$에 이름을 붙이면, 방정식이 x를 n으로 정확히 알려 줍니다. 남은 일은 $\lfloor x \rfloor$가 정말 n과 같은지 확인하는 것뿐입니다.

1단계. 정수 $n = \lfloor x \rfloor$라 합시다. 방정식에서 $3x = n^2 + 2$이므로 $x = \dfrac{n^2+2}{3}$입니다.

2단계. 이 x가 해가 되는 것은 $\lfloor x \rfloor = n$일 때, 즉 다음이 성립할 때와 같습니다.

$$n \le \frac{n^2+2}{3} < n+1.$$

3을 곱합시다. 왼쪽 부등식은 $n^2 - 3n + 2 \ge 0$, 즉 $(n-1)(n-2) \ge 0$입니다. 1과 2 사이에는 정수가 없으므로, 이 부등식은 모든 정수 n에 대해 성립합니다.

3단계. 오른쪽 부등식은 $n^2 - 3n - 1 < 0$입니다. $n^2 - 3n - 1$의 근은 $\frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \approx -0.30$과 3.30이므로, 조건을 만족하는 정수는 $n = 0, 1, 2, 3$입니다.

4단계. 이로부터 $x = \frac{2}{3},\ 1,\ 2,\ \frac{11}{3}$을 얻습니다. 하나를 검산해 봅시다. $\lfloor \frac{11}{3} \rfloor = 3$이고 $9 - 11 + 2 = 0$입니다. ✓ 서로 다른 n은 서로 다른 x를 주므로, 값은 4개입니다.

주의. 바닥 함수를 무시하고 $x^2 - 3x + 2 = 0$을 풀면 $x = 1, 2$만 얻어 C가 됩니다. 해 $\frac{2}{3}$과 $\frac{11}{3}$은 정수가 아니므로 그 방법으로는 결코 찾을 수 없습니다.

정답: (B) 4

10 경우의 수와 확률

출처: 2010 AMC 10B 23번

> 3×3 배열의 칸에 1부터 9까지의 숫자가 모두 들어 있고, 모든 행과 열의 수는 증가하는 순서로 배열되어 있다. 이러한 배열은 몇 개인가?
>
> **(A)** 18 **(B)** 24 **(C)** 36 **(D)** 42 **(E)** 60

핵심 아이디어. 가운데 칸이 가장 제약이 많습니다. 세 칸보다 크고 다른 세 칸보다 작아야 하기 때문입니다. 가운데 수를 정하면 나머지는 몇 가지 선택만으로 결정됩니다.

i행 j열의 수를 a_{ij}라 합시다.

1단계. 수 1은 반드시 a_{11}입니다. 다른 곳에 있으면 그 왼쪽이나 위에 더 작은 수가 있게 되기 때문입니다. 마찬가지로 9는 반드시 a_{33}입니다. 가운데 수는 a_{11}, a_{12}, a_{21}보다 크고 a_{23}, a_{32}, a_{33}보다 작으므로 $4 \le a_{22} \le 6$입니다.

2단계. 가운데가 4인 경우. 세 수 a_{11}, a_{12}, a_{21}은 모두 4보다 작으므로 $1, 2, 3$이고, $a_{11} = 1$이며 $\{a_{12}, a_{21}\} = \{2, 3\}$은 어느 순서든 되므로 2가지입니다. 수 $5, 6, 7, 8$은 두 쌍 $a_{13} < a_{23}$과 $a_{31} < a_{32}$를 채웁니다. 이 수들은 4보다 크고 9보다 작으므로 나머지 비교는 자동으로 성립합니다. 이 중 어느 두 수를 오른쪽 위 쌍에 넣을지 고르는 방법은 $\binom{4}{2} = 6$가지이고, 각 쌍의 증가하는 순서는 하나뿐입니다. 합하면 $2 \cdot 6 = 12$가지입니다.

3단계. 가운데가 6인 경우. 모든 수 k를 $10 - k$로 바꾸고 배열을 180° 회전합니다. 수를 바꾸면 모든 부등호가 뒤집히고, 회전하면 행과 열의 방향이 다시 뒤집히므로, 조건을 만족시키는 배열은 조건을 만족시키는 배열로 옮겨지고 가운데 4는 가운데 6이 됩니다. 이 대응은 양방향으로 성립하므로 이 경우도 12가지입니다.

4단계. 가운데가 5인 경우. $\{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$에서 세 수를 골라 $a_{12} < a_{13} < a_{23}$에 넣으면, 나머지 세 수는 증가하는 순서로 $a_{21} < a_{31} < a_{32}$를 채웁니다. 남은 조건은 $a_{12} < 5 < a_{23}$과 $a_{21} < 5 < a_{32}$뿐입니다. 즉 고른 세 수와 나머지 세 수가 각각 5보다 작은 수와 5보다 큰 수를 하나 이상씩 포함해야 합니다. 이를 어기는 것은 정확히 $\{2, 3, 4\}$와 $\{6, 7, 8\}$이므로 $\binom{6}{3} - 2 = 20 - 2 = 18$가지입니다.

5단계. 합은 $12 + 18 + 12 = 42$입니다.

다른 풀이. 표준 영 타블로에 대한 **후크 길이 공식**을 아는 학생은 이렇게 확인할 수 있습니다. 3×3 격자의 후크 길이는 $5, 4, 3;\ 4, 3, 2;\ 3, 2, 1$이고 그 곱은 8640이므로 $\frac{9!}{8640} = \frac{362880}{8640} = 42$입니다.

정답: (D) 42