AMC 10

제 30 회

하프 모의고사

해설

정답표 • 출처 • 단계별 풀이

10문항 모두 AMC 10 기출(2000–2025)의 13–23번 문항에서 가져와 원래 번호 순서대로 배열한 것입니다. 원문 © Mathematical Association of America.

정답표와 출처

번호	정답	출처	영역
1	**B**	2008 AMC 10B 13번	대수
2	**A**	2016 AMC 10A 15번	기하
3	**E**	2006 AMC 10B 16번	정수론
4	**D**	2022 AMC 10A 16번	대수
5	**D**	2021 AMC 10A 17번	기하
6	**B**	2023 AMC 10B 19번	경우의 수와 확률
7	**E**	2022 AMC 10B 21번	대수
8	**C**	2025 AMC 10B 21번	경우의 수와 확률
9	**B**	2013 AMC 10A 22번	기하
10	**C**	2011 AMC 10A 23번	경우의 수와 확률

1 대수

출처: 2008 AMC 10B 13번

> 각 양의 정수 n에 대하여 어떤 수열의 처음 n개의 항의 평균이 n이다. 이 수열의 2008번째 항은?
>
> **(A)** 2008 **(B)** 4015 **(C)** 4016 **(D)** 4,030,056 **(E)** 4,032,064

핵심 아이디어. 평균은 합을 개수로 나눈 것이므로, 평균에 대한 정보를 합에 대한 정보로 바꾸어 봅시다. 그러면 한 항은 이웃한 두 합의 차입니다.

1단계. 처음 n개의 항의 평균이 n이므로 그 합은 $n \cdot n = n^2$입니다. $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2$이라 합시다.

2단계. n번째 항은 S_{n-1}에서 S_n으로 넘어갈 때 더해지는 수입니다.

$$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1.$$

(이 수열은 $1, 3, 5, 7, \ldots$ 이고, 예를 들어 처음 세 항의 평균은 $\frac{1+3+5}{3} = 3$입니다.)

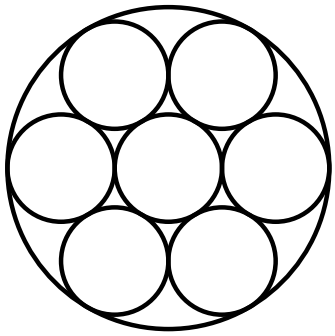
3단계. 따라서 $a_{2008} = 2 \cdot 2008 - 1 = 4015$입니다.

주의. $2008^2 = 4{,}032{,}064$는 처음 2008개의 항의 **합**이지 2008번째 항이 아닙니다. 이것이 선택지 (E)입니다. 또 n번째 항이 n이라고 생각하면 (A)가 되는데, 이는 항과 평균을 혼동한 것입니다.

정답: (B) 4015

2 기하

출처: 2016 AMC 10A 15번

> 그림과 같이 원 모양의 쿠키 반죽에서 반지름이 1인치인 쿠키 일곱 개를 잘라 낸다. 이웃한 쿠키끼리는 서로 접하고, 가운데 쿠키를 제외한 모든 쿠키는 반죽의 가장자리에 접한다. 남은 자투리 반죽을 다시 뭉쳐 같은 두께의 쿠키 하나를 더 만든다. 이 자투리 쿠키의 반지름은 몇 인치인가?
>
> 
>
> **(A)** $\sqrt{2}$ **(B)** 1.5 **(C)** $\sqrt{\pi}$ **(D)** $\sqrt{2\pi}$ **(E)** π

핵심 아이디어. 두께가 같으므로 부피는 넓이에 비례합니다. 따라서 자투리 쿠키의 넓이는 반죽의 넓이에서 쿠키 일곱 개의 넓이를 뺀 것입니다. 먼저 그림에서 반죽의 반지름을 읽어 냅시다.

1단계. 반죽의 중심에서 바깥쪽 쿠키 하나를 지나 곧장 나아가 봅시다. 가운데 쿠키의 반지름(1)을 지나고, 이어서 바깥쪽 쿠키 전체(2)를 지나면 가장자리에 닿습니다. 따라서 반죽의 반지름은 $1+2=3$입니다.

2단계. 반죽의 넓이는 $\pi \cdot 3^2 = 9\pi$이고, 쿠키 일곱 개의 넓이는 $7 \cdot \pi \cdot 1^2 = 7\pi$입니다. 자투리의 넓이는 $9\pi - 7\pi = 2\pi$입니다.

3단계. 자투리 쿠키의 반지름을 r이라 하면 $\pi r^2 = 2\pi$이므로 $r^2 = 2$, $r = \sqrt{2}$입니다.

주의. π로 나누는 것을 잊고 r^2을 자투리의 넓이 2π와 같게 놓으면 $\sqrt{2\pi}$, 즉 D가 됩니다.

정답: (A) $\sqrt{2}$

---

3 정수론

출처: 2006 AMC 10B 16번

> 윤일인 2004년 2월 29일은 일요일이었다. 윤일인 2020년 2월 29일은 무슨 요일인가?
>
> **(A)** 화요일 **(B)** 수요일 **(C)** 목요일 **(D)** 금요일 **(E)** 토요일

핵심 아이디어. 요일을 정할 때는 날수를 7로 나눈 나머지만 중요합니다. 365일인 해는 요일을 1만큼 앞으로 옮기고, 2월 29일을 하나 지날 때마다 하나씩 더 옮깁니다.

1단계. 2004년 2월 29일부터 2020년 2월 29일까지는 16년입니다. 날수를 세면 365일짜리 16년에, 그 사이에 도달하는 2월 29일마다 하루씩을 더해야 합니다. 그날들은 2008, 2012, 2016, 2020년의 것으로 모두 4일입니다.

$$16 \cdot 365 + 4 = 5844\text{일}.$$

2단계. $365 = 52 \cdot 7 + 1$이므로 평년 한 해는 7로 나눈 나머지로 따져 1일씩 기여합니다. 따라서 요일은 $16+4=20$일만큼 앞으로 이동하고, $20 = 2 \cdot 7 + 6$이므로 실질적으로는 6일 앞으로 이동합니다.

3단계. 일요일에서 6일 뒤는 토요일입니다(일요일의 하루 전이라고 생각해도 같습니다).

주의. 2020년 2월 29일 자체도 지나가는 윤일 중 하나라는 것을 잊으면 $16+3 = 19 \equiv 5 \pmod 7$이 되어 금요일, 즉 선택지 (D)가 됩니다. 윤일을 아예 무시하면 $16 \equiv 2 \pmod 7$이 되어 화요일, 즉 선택지 (A)가 됩니다.

정답: (E) 토요일

4 대수

출처: 2022 AMC 10A 16번

> 다항식 $10x^3 - 39x^2 + 29x - 6$의 세 근이 상자(직육면체)의 높이, 세로, 가로의 길이이다. 원래 상자의 각 모서리를 2만큼씩 늘여 새 상자를 만든다. 새 상자의 부피는?
>
> **(A)** $\frac{24}{5}$ **(B)** $\frac{42}{5}$ **(C)** $\frac{81}{5}$ **(D)** 30 **(E)** 48

핵심 아이디어. 새 부피는 $(h+2)(l+2)(w+2)$로, 세 근 각각에 대한 "근 $+2$"를 모두 곱한 것입니다. 문제는 근을 다항식을 통해서만 알려 주는데, 모든 근에 대한 $(c - \text{근})$의 곱은 인수분해된 다항식에 $x = c$를 넣은 값(에 최고차항의 계수를 곱한 것)과 정확히 같습니다. 여기서는 $c = -2$입니다.

1단계. 세 근을 h, l, w라 합시다. 최고차항의 계수가 10이므로 다항식은 다음과 같이 인수분해됩니다.

$$P(x) = 10x^3 - 39x^2 + 29x - 6 = 10(x-h)(x-l)(x-w).$$

2단계. $x = -2$를 넣으면

$$P(-2) = 10(-2-h)(-2-l)(-2-w) = -10\,(h+2)(l+2)(w+2),$$

입니다. 세 인수의 부호가 모두 바뀌고 $(-1)^3 = -1$이기 때문입니다.

3단계. $P(-2)$를 직접 계산하면 $10(-8) - 39(4) + 29(-2) - 6 = -80 - 156 - 58 - 6 = -300$입니다.

4단계. 따라서 $-10\,(h+2)(l+2)(w+2) = -300$이고, 새 부피는 $(h+2)(l+2)(w+2) = 30$입니다.

다른 풀이. 근과 계수의 관계(최고차항의 계수 10으로 나누어 줍니다)를 쓰면 $hlw = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, $hl+lw+wh = \frac{29}{10}$, $h+l+w = \frac{39}{10}$입니다. 전개하면

$$(h+2)(l+2)(w+2) = hlw + 2(hl+lw+wh) + 4(h+l+w) + 8 = \tfrac{3}{5} + \tfrac{29}{5} + \tfrac{78}{5} + 8 = \tfrac{110}{5} + 8 = 30.$$

상자 자체를 구할 수도 있습니다. $x = 3$이 근이고$(270 - 351 + 87 - 6 = 0)$, $P(x) = (x-3)(2x-1)(5x-2)$이므로 상자는 $3 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{5}$이고 새 상자는 $5 \times \frac{5}{2} \times \frac{12}{5} = 30$입니다.

주의. ax^3+bx^2+cx+d에 대한 근과 계수의 관계는 $-\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $-\frac{d}{a}$입니다. $a = 10$으로 나누는 것을 잊으면 $6 + 58 + 156 + 8 = 228$이 나오는데, 이는 선택지에 없습니다. 무언가 잘못되었다는 신호입니다.

정답: (D) 30

5 기하

출처: 2021 AMC 10A 17번

> 사다리꼴 $ABCD$에서 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}, BC = CD = 43$이고 $\overline{AD} \perp \overline{BD}$이다. 대각선 $\overline{AC}$와 $\overline{BD}$의 교점을 O, $\overline{BD}$의 중점을 P라 하자.
>
> $OP = 11$일 때, AD의 길이는 $m\sqrt{n}$ 꼴로 나타낼 수 있다. 여기서 m과 n은 양의 정수이고, n은 어떤 소수의 제곱으로도 나누어떨어지지 않는다. $m+n$의 값은?
>
> **(A)** 65 **(B)** 132 **(C)** 157 **(D)** 194 **(E)** 215

핵심 아이디어. 문제의 두 가지 특징이 길을 알려 줍니다. $BC = CD$이고 P가 $\overline{BD}$의 중점이므로 $\overline{CP}$는 $\overline{BD}$에 수직입니다. 이것은 $\overline{AD} \perp \overline{BD}$와 나란히 놓을 수 있는 두 번째 직각입니다. 또 평행한 변 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$가 있으면 대각선의 교점에서 항상 닮은 삼각형이 생깁니다.

1단계. 이등변삼각형 $\triangle BCD$(꼭지각 C)에서 밑변에 그은 중선 $\overline{CP}$는 높이이기도 하므로 $\angle BPC = 90^\circ$입니다.

2단계. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$이므로 엇각에 의해 $\angle ABD = \angle BDC$입니다. $\triangle BCD$의 두 밑각은 같으므로 $\angle BDC = \angle DBC$입니다. 따라서 $\angle ABD = \angle PBC$입니다.

직각삼각형 BPC(P에서 직각)와 BDA(D에서 직각)는 B에서의 이 예각을 공유하므로 $\triangle BPC \sim \triangle BDA$입니다. 빗변끼리, 대응하는 변끼리 비를 맞추면 다음과 같습니다.

$$\frac{BA}{BC} = \frac{BD}{BP} = 2, \qquad \text{따라서} \qquad AB = 2 \cdot 43 = 86.$$

3단계. 또 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$이므로 $\triangle ABO \sim \triangle CDO$이고, 따라서 $\dfrac{BO}{OD} = \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{86}{43} = 2$입니다. 그러므로 O는 B보다 D에 더 가깝습니다. 즉, O는 P와 D 사이에 있습니다.

$BP = PD = t$라 합시다. 그러면 $BO = t + 11$, $OD = t - 11$이므로 다음을 얻습니다.

$$t + 11 = 2(t - 11) \quad \Longrightarrow \quad t = 33, \qquad BD = 66.$$

(확인: $BO = 44$, $OD = 22$.)

4단계. 직각삼각형 ABD에서 피타고라스 정리를 쓰면 다음과 같습니다.

$$AD = \sqrt{86^2 - 66^2} = \sqrt{7396 - 4356} = \sqrt{3040} = \sqrt{16 \cdot 190} = 4\sqrt{190}.$$

$190 = 2 \cdot 5 \cdot 19$는 제곱인 인수가 없으므로 $m = 4$, $n = 190$이고 $m + n = 194$입니다.

주의. O를 B와 P 사이에 두면($BO = t - 11$, $OD = t + 11$) $BO = 2 \cdot OD$와 모순입니다. 또 끝까지 간단히 해야 합니다. $\sqrt{3040} = 2\sqrt{760}$은 요구된 꼴이 아닌데, 760이 2^2으로 나누어떨어지기 때문입니다.

정답: (D) 194

6 경우의 수와 확률

출처: 2023 AMC 10B 19번

> 개구리 소냐는 좌표평면 위의 정사각형 $[0,6]\times[0,6]$ 안에 있는 점 하나를 균일하게 임의로 골라 그 점으로 뛰어간다. 그다음 $[0,1]$에서 거리 하나를 균일하게 임의로 고르고, $\{$북, 남, 동, 서$\}$에서 방향 하나를 균일하게 임의로 고른다. 그녀의 선택은 모두 서로 독립이다. 이제 그녀는 고른 방향으로 고른 거리만큼 뛴다. 그녀가 정사각형 밖에 착지할 확률은?
>
> **(A)** $\frac{1}{6}$ **(B)** $\frac{1}{12}$ **(C)** $\frac{1}{4}$ **(D)** $\frac{1}{10}$ **(E)** $\frac{1}{9}$

핵심 아이디어. 무작위 선택이 세 가지이니 하나씩 다루어 봅시다. 대칭성에 의해 방향은 상관이 없습니다. 그다음 뛰는 거리 d를 **고정**하여 그 d에 대해 밖으로 나갈 확률을 구하고, 마지막으로 d에 대해 평균을 냅니다.

1단계. 방향 고르기. 정사각형은 네 방향 어느 쪽에서 보아도 똑같으므로, 각 방향에 대해 밖으로 나갈 확률은 같습니다. 따라서 답은 **동쪽**으로 뛸 때 밖으로 나갈 확률과 같습니다. 이때는 x좌표만 중요하고, 그 값은 $[0,6]$에서 균일하게 분포합니다.

2단계. 거리 d 고정하기. x에서 동쪽으로 d만큼 뛰면 $x+d$에 착지하고, 이것은 $x+d>6$, 즉 $x>6-d$일 때 정확히 정사각형 밖이 됩니다. 구간 $(6-d,\,6]$의 길이는 전체 길이 6 중 d이므로

$$P(\text{탈출}\mid d)=\frac{d}{6}.$$

3단계. d에 대해 평균 내기. 거리 d는 $[0,1]$에서 균일하게 분포하므로 평균값은 $\frac{1}{2}$입니다. 밖으로 나갈 확률 $\frac{d}{6}$는 d에 상수 $\frac{1}{6}$을 곱한 것이므로, 그 평균은

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}.$$

(그림으로 보면, 넓이가 6인 (x,d)-직사각형 $[0,6]\times[0,1]$에서 밖으로 나가는 영역 $x>6-d$는 직각을 낀 두 변의 길이가 1과 1인 직각삼각형이고 넓이는 $\frac{1}{2}$입니다. 비는 $\frac{1/2}{6}=\frac{1}{12}$입니다.)

주의. 뛰는 거리는 항상 1이 아니라 무작위입니다. 모든 점프에 $d=1$을 쓰면 $\frac{1}{6}$, 즉 선택지 (A)가 나오는데, 이것은 평균적인 점프가 아니라 가능한 **가장 긴** 점프에 대한 확률입니다.

정답: (B) $\frac{1}{12}$

7 대수

출처: 2022 AMC 10B 21번

> $P(x)$는 유리수 계수를 갖는 다항식으로, $P(x)$를 다항식 x^2+x+1로 나눈 나머지는 $x+2$이고, $P(x)$를 다항식 x^2+1로 나눈 나머지는 $2x+1$이다. 이 두 성질을 갖는 차수가 가장 낮은 다항식은 오직 하나 존재한다. 그 다항식의 계수들의 제곱의 합은?
>
> **(A)** 10 **(B)** 13 **(C)** 19 **(D)** 20 **(E)** 23

핵심 아이디어. 첫째 조건을 이용해 $P(x)=(x^2+x+1)Q(x)+x+2$로 쓰고, 둘째 조건을 Q에 적용합니다. 둘째 단계를 쉽게 만드는 요령은 이것입니다. x^2+1로 나눌 때는 x^2을 -1로 바꿔도 되고, 그러면 x^2+x+1은 그냥 x가 됩니다.

1단계. 첫째 조건은 다음을 뜻합니다.

$$P(x) = (x^2+x+1)\,Q(x) + x + 2$$

여기서 $Q(x)$는 유리수 계수를 갖는 어떤 다항식이고, $Q \neq 0$이면 $\deg P = 2 + \deg Q$입니다.

2단계. x^2+1로 나눈 나머지를 구합시다. $x^2+x+1 = (x^2+1)+x$이므로 다음과 같이 쓸 수 있습니다.

$$P(x) = (x^2+1)\,Q(x) + x\,Q(x) + x + 2,$$

따라서 $P(x)$와 $x\,Q(x)+x+2$는 x^2+1로 나눈 나머지가 같습니다. 이 나머지가 $2x+1$이어야 합니다.

3단계. 작은 Q를 제외합시다. $Q=0$이면 $P(x)=x+2$인데, 이것을 x^2+1로 나눈 나머지는 $2x+1$이 아니라 $x+2$입니다. $Q(x)=c$가 0이 아닌 상수이면 $xQ(x)+x+2=(c+1)x+2$는 이미 차수가 2보다 낮으므로 이것이 곧 나머지인데, 상수항이 1이 아니라 2입니다. 따라서 Q의 차수는 1 이상이고, P의 차수는 3 이상입니다.

4단계. $Q(x)=ax+b$로 놓으면 다음과 같습니다.

$$xQ(x)+x+2 = ax^2+(b+1)x+2 = a(x^2+1)+(b+1)x+(2-a),$$

따라서 나머지는 $(b+1)x+(2-a)$입니다. 이것을 $2x+1$과 비교하면 $b=1$, $a=1$이어야 하고, 이 값들만 가능합니다. 그러므로 3차 다항식은 오직 하나입니다.

5단계. $Q(x)=x+1$을 대입하여 전개합니다.

$$P(x) = (x+1)(x^2+x+1)+x+2 = (x^3+2x^2+2x+1)+x+2 = x^3+2x^2+3x+3.$$

계수들의 제곱의 합은 $1^2+2^2+3^2+3^2 = 1+4+9+9 = 23$입니다.

검산: $x^3+2x^2+3x+3 = (x^2+x+1)(x+1)+(x+2)$이고 $x^3+2x^2+3x+3 = (x^2+1)(x+2)+(2x+1)$입니다.

정답: (E) 23

8 경우의 수와 확률

출처: 2025 AMC 10B 21번

> 3×3 격자의 9개의 칸을 각각 빨간색, 파란색, 노란색 중 하나로 칠하려고 한다. 이때 각 빨간 칸은 적어도 하나의 파란 칸과 변을 공유하고, 각 파란 칸은 적어도 하나의 노란 칸과 변을 공유하며, 각 노란 칸은 적어도 하나의 빨간 칸과 변을 공유해야 한다. 회전이나 뒤집기, 또는 이 둘을 함께 써서 서로 얻을 수 있는 색칠은 같은 것으로 본다. 가능한 서로 다른 색칠의 수는?
>
> **(A)** 3 **(B)** 9 **(C)** 12 **(D)** 18 **(E)** 27

핵심 아이디어. 조건은 순환 구조입니다. 빨강은 파란 이웃이, 파랑은 노란 이웃이, 노랑은 빨간 이웃이 필요합니다. 가운데 칸은 어떤 회전이나 뒤집기에도 움직이지 않으므로 가운데 칸의 색으로 경우를 나눕니다. 그러면 그 주위의 변 칸들은 "누가 누구를 필요로 하는가"를 따라가다 보면 거의 완전히 결정됩니다.

색을 R(빨강), B(파랑), Y(노랑)로 쓰고, 칸의 이름을 다음과 같이 정합시다(N, S, E, W는 각각 위, 아래, 오른쪽, 왼쪽).

NW	N	NE
W	C	E
SW	S	SE

변 칸(N, E, S, W)은 C와 구석 칸 두 개에 닿고, 구석 칸은 변 칸 두 개에만 닿습니다.

1단계. 회전과 뒤집기는 C를 움직이지 않으므로, 가운데 색이 다른 색칠끼리는 결코 같은 것이 되지 않습니다. 모든 칸의 색을 R→B, B→Y, Y→R로 바꾸어도 조건은 그대로 성립하고, 이 바꾸기는 격자를 돌리는 것과 서로 간섭하지 않으므로 가운데 색마다 색칠의 수가 같습니다. $\mathrm{C}=\mathrm{R}$인 경우를 세고 마지막에 3을 곱합시다.

2단계. C는 파란 이웃이 필요하므로 어떤 변 칸은 B입니다. 그 칸이 위로 오도록 돌려서 $\mathrm{N}=\mathrm{B}$로 둡니다.

3단계. 다른 변 칸은 파랑이 아니다. $\mathrm{E}=\mathrm{B}$라고 가정합시다. 그러면 구석 칸 NE는 파란 칸에만 닿으므로 R입니다. N은 노란 이웃이 필요하므로 $\mathrm{NW}=\mathrm{Y}$이고, NW는 빨간 이웃이 필요하므로 $\mathrm{W}=\mathrm{R}$입니다. 같은 방식으로 E 때문에 $\mathrm{SE}=\mathrm{Y}$가 되고, 이어서 $\mathrm{S}=\mathrm{R}$이 됩니다. 이제 W는 파란 이웃이 필요하므로 $\mathrm{SW}=\mathrm{B}$인데, SW는 W와 S에만 닿고 둘 다 빨강이므로 노란 이웃이 없습니다. 모순입니다($\mathrm{W}=\mathrm{B}$인 경우는 이것의 거울상입니다).

이번에는 $\mathrm{S}=\mathrm{B}$라고 가정합시다. N은 노란 구석 칸 이웃이 필요한데, 좌우 대칭에 의해 $\mathrm{NW}=\mathrm{Y}$라 해도 됩니다. 그러면 NW 때문에 $\mathrm{W}=\mathrm{R}$, W 때문에 $\mathrm{SW}=\mathrm{B}$가 되고, SW는 W(빨강)와 S(파랑)에만 닿으므로 노란 이웃이 없습니다. 모순입니다.

4단계. S는 노랑이다. $\mathrm{S}=\mathrm{R}$이면 S는 파란 구석 칸 이웃이 필요하므로, 좌우 대칭에 의해 $\mathrm{SE}=\mathrm{B}$라 합시다. SE는 노란 이웃이 필요하므로 $\mathrm{E}=\mathrm{Y}$입니다. 이제 NE는 N(파랑)과 E(노랑)에 닿으므로 $\mathrm{NE}\neq\mathrm{Y}$이고, 따라서 N의 노란 구석 칸 이웃은 NW여야 합니다. 앞에서와 같이 NW 때문에 $\mathrm{W}=\mathrm{R}$, W 때문에 $\mathrm{SW}=\mathrm{B}$가 되고, SW는 빨간 칸 두 개에만 닿습니다. 모순입니다.

5단계. 마무리. 이제 $\mathrm{E},\mathrm{W}\in\{\mathrm{R},\mathrm{Y}\}$입니다.

- $\mathrm{E} = \mathrm{W} = \mathrm{Y}$: NE와 NW는 각각 B와 Y에만 닿으므로 어느 것도 Y일 수 없고, N은 노란 이웃을 가질 수 없습니다. 불가능합니다.
- $\mathrm{E} = \mathrm{W} = \mathrm{R}$: NE는 B일 수 없으므로(노란 이웃이 없음) E의 파란 이웃은 $\mathrm{SE} = \mathrm{B}$입니다. 마찬가지로 $\mathrm{SW} = \mathrm{B}$입니다. NE와 NW는 각각 R 또는 Y이고, 둘 다 R일 수는 없습니다(N에 노란 이웃이 필요). 가능한 경우는 3가지이고, 그중 $(\mathrm{NE}, \mathrm{NW}) = (\mathrm{Y}, \mathrm{R})$과 (R, Y)는 서로 거울상입니다. **색칠 2가지.**
- $\mathrm{E} = \mathrm{R}$, $\mathrm{W} = \mathrm{Y}$ ($\mathrm{E} = \mathrm{Y}$, $\mathrm{W} = \mathrm{R}$인 경우는 이것의 거울상): 이번에도 $\mathrm{SE} = \mathrm{B}$입니다. SW는 노란 칸 두 개에 닿으므로 $\mathrm{SW} = \mathrm{B}$입니다. NW는 B와 Y에 닿으므로 $\mathrm{NW} \neq \mathrm{Y}$이고, N 때문에 $\mathrm{NE} = \mathrm{Y}$입니다. NW는 R 또는 B일 수 있습니다. **색칠 2가지.**

이 4개의 격자는 모두 모든 조건을 만족시킵니다(각 칸을 확인해 봅시다). 또 하나뿐인 파란 변 칸 N을 제자리에 두는 대칭은 항등변환 외에는 좌우 뒤집기뿐이고, 이는 이미 고려했습니다. 따라서 $\mathrm{C} = \mathrm{R}$일 때 색칠은 4가지이고, 전체는 $3 \cdot 4 = 12$가지입니다.

주의. 고정된 격자에서 센 개수를 8로 나누면 안 됩니다. 고정된 격자에서 조건을 만족시키는 색칠은 84가지인데, $84/8$은 정수조차 아닙니다. 어떤 색칠(예를 들어 좌우 대칭인 것)은 뒤집기를 해도 변하지 않으므로, 그런 색칠이 속한 묶음에는 8개보다 적은 색칠이 들어 있습니다.

정답: (C) 12

---

9 기하

출처: 2013 AMC 10A 22번

> 반지름이 1인 구 여섯 개가, 그 중심이 한 변의 길이가 2인 정육각형의 꼭짓점에 오도록 놓여 있다. 이 여섯 개의 구는 정육각형의 중심을 중심으로 하는 더 큰 구에 내접한다. 여덟 번째 구는 여섯 개의 작은 구에 외접하고 큰 구에 내접한다. 이 여덟 번째 구의 반지름은?
>
> **(A)** $\sqrt{2}$ **(B)** $\frac{3}{2}$ **(C)** $\frac{5}{3}$ **(D)** $\sqrt{3}$ **(E)** 2

핵심 아이디어. 접한다는 조건을 중심 사이의 거리로 바꿉시다. 외접하면 두 중심 사이의 거리는 $r_1 + r_2$이고, 내접하면 $|r_1 - r_2|$입니다. 여덟 번째 구의 중심은 여섯 개의 작은 구의 중심에서 모두 같은 거리에 있으므로, 정육각형의 중심을 지나고 정육각형의 평면에 수직인 직선 위에 있습니다. 그리고 이 직선이 직각삼각형을 만들어 줍니다.

1단계: 큰 구. 한 변의 길이가 2인 정육각형은 한 변의 길이가 2인 정삼각형 여섯 개로 이루어지므로, 각 꼭짓점은 중심에서 2만큼 떨어져 있습니다. 이 중심을 O라 합시다. 각 작은 구는 반지름이 1이고 큰 구에 내접하므로, 큰 구의 반지름은 $2 + 1 = 3$입니다.

2단계: 여덟 번째 구의 중심의 위치. 여덟 번째 구의 반지름을 r, 중심을 P라 합시다. 이 구는 여섯 개의 작은 구 모두에 외접하므로, P는 여섯 개의 작은 구의 중심으로부터 모두 거리 $r + 1$만큼 떨어져 있습니다. 정육각형의 꼭짓점들로부터 같은 거리에 있는 점들은 O를 지나고 정육각형의 평면에 수직인 직선 위에 있습니다. 따라서 P는 그 직선 위에 있습니다.

3단계: 두 가지 접하는 조건. 큰 구에 내접하므로 $OP = 3 - r$ 입니다. 작은 구의 중심 하나를 Q라 하면 $OQ = 2$, $PQ = r + 1$이고, O에서의 각은 직각입니다. 피타고라스 정리에 의해 다음이 성립합니다.

$$(r+1)^2 = 2^2 + (3-r)^2.$$

전개하면 $r^2 + 2r + 1 = 4 + 9 - 6r + r^2$이므로 $8r = 12$이고 $r = \frac{3}{2}$입니다.

확인. $r = \frac{3}{2}$이면 $OP = \frac{3}{2}$이고, $PQ^2 = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}$이므로 $PQ = \frac{5}{2} = r + 1$입니다. ✓

주의. 큰 구의 반지름으로 $2 + 1 = 3$ 대신 2(정육각형의 외접원의 반지름)를 쓰는 실수. 그러면 $(r+1)^2 = 4 + (2-r)^2$이 되어 $r = \frac{7}{6}$인데, 이것은 선택지에 없습니다.

정답: (B) $\frac{3}{2}$

---

10 경우의 수와 확률

출처: 2011 AMC 10A 23번

일곱 명의 학생이 다음과 같이 1부터 1000까지 센다.

- 앨리스는 모든 수를 말하되, 연속한 세 수로 이루어진 각 묶음에서 가운데 수는 건너뛴다. 즉, 앨리스가 말하는 수는 다음과 같다: $1, 3, 4, 6, 7, 9, \ldots, 997, 999, 1000$.
- 바버라는 앨리스가 말하지 않는 수를 모두 말하되, 그녀 역시 연속한 세 수로 이루어진 각 묶음에서 가운데 수는 건너뛴다.
- 캔디스는 앨리스도 바버라도 말하지 않는 수를 모두 말하되, 그녀 역시 연속한 세 수로 이루어진 각 묶음에서 가운데 수는 건너뛴다.
- 데비, 엘리자, 파티마는 이름의 첫 글자가 알파벳 순서로 자신보다 앞서는 학생들 중 누구도 말하지 않는 수를 모두 말하되, 각자 역시 자신의 수를 연속한 세 개씩 묶은 각 묶음에서 가운데 수는 건너뛴다.
- 마지막으로 조지는 다른 누구도 말하지 않은 단 하나의 수를 말한다.

조지가 말하는 수는?

(A) 37 **(B)** 242 **(C)** 365 **(D)** 728 **(E)** 998

핵심 아이디어. **건너뛴** 수만 따라가 봅시다. 그 수들이 다음 학생이 다루는 수입니다. 앨리스가 건너뛴 수 $2, 5, 8, \ldots$는 등차수열을 이루고, 등차수열에서 세 개씩 묶은 묶음의 가운데 수를 건너뛰면 또 다른 등차수열이 생깁니다. 그러니 간단한 규칙 하나를 여섯 번 적용하면 문제가 풀립니다.

1단계 (규칙). 어떤 학생의 수 목록이 등차수열 $a, a+d, a+2d, \ldots$라고 합시다. 세 개씩 묶은 묶음은 $(a, a+d, a+2d)$, $(a+3d, a+4d, a+5d)$ 등으로 이어지므로, 그녀가 건너뛰는 수는 다음과 같습니다.

$$a+d,\ a+4d,\ a+7d,\ \ldots$$

이것은 첫째항이 $a+d$이고 공차가 $3d$인 새로운 등차수열입니다. 이 건너뛴 수들이 바로 다음 학생의 목록입니다.

2단계 (적용하기). 앨리스의 목록은 $1, 2, \ldots, 1000$으로, 첫째항이 1, 공차가 1입니다.

- 앨리스는 $2, 5, 8, \ldots, 998$을 건너뜁니다(첫째항 2, 공차 3; 333개).
- 바버라는 $5, 14, 23, \ldots, 995$를 건너뜁니다(공차 9; 111개).
- 캔디스는 $14, 41, 68, \ldots, 986$을 건너뜁니다(공차 27; 37개).
- 데비는 $41, 122, 203, \ldots, 932$를 건너뜁니다(공차 81; 12개).
- 엘리자는 $122, 365, 608, 851$을 건너뜁니다(공차 243; 4개).

각 개수는 바로 앞의 개수에서 나옵니다. n개의 수로 이루어진 목록에서 가운데 수는 $2, 5, 8, \ldots$ 번째 자리에 있고, 개수는 $1000 \to 333 \to 111 \to 37 \to 12 \to 4$로 바뀝니다. 예를 들어 데비의 목록 37개에서 가운데 수는 $2, 5, \ldots, 35$번째 자리에 있으며, 모두 12개입니다.

3단계 (마무리). 파티마의 목록은 $122, 365, 608, 851$입니다. 묶음은 $(122, 365, 608)$과 남는 (851)이므로, 그녀는 $122, 608, 851$을 말하고 365만 건너뜁니다. 이것이 아무도 말하지 않은 단 하나의 수이므로 조지는 365를 말합니다.

다른 풀이. 첫째항은 매번 이전 공차만큼 커집니다. $1 \to 2 \to 5 \to 14 \to 41 \to 122 \to 365$이고, 더해지는 수는 $1, 3, 9, 27, 81, 243$입니다. k명의 학생이 지나간 뒤 첫 번째로 건너뛴 수는 다음과 같습니다.

$$1 + (1 + 3 + \cdots + 3^{k-1}) = 1 + \frac{3^k - 1}{2} = \frac{3^k + 1}{2}.$$

건너뛰기를 하는 학생은 여섯 명이므로 조지의 수는 $\frac{3^6+1}{2} = \frac{730}{2} = 365$입니다.

정답: (C) 365