제 34 회 최종시험 오전

# 한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

**2021년 5월 8일 ; 제한시간 3시간 ; 문항당 7점**

**1.** 예각 삼각형 $ABC$의 내심 $I$를 지나고 직선 $AI$에 수직인 직선이 $AB$, $AC$와 만나는 점을 각각 $D, E$라 하자. 점 $D$를 지나고 $BI$와 평행한 직선과 $E$를 지나고 $CI$와 평행한 직선의 교점을 $F$라 하자. 직선 $FI$와 삼각형 $DEF$의 외접원의 교점을 $P(\neq F)$라 할 때, 삼각형 $DEF$의 외접원의 중심, 삼각형 $ABC$의 외접원의 중심, 점 $P$가 일직선 위에 있음을 보여라.

**2.** 양의 정수 $k(\geq 8)$에 대하여 다음 조건을 만족하는 양의 정수 $x$, $y$가 존재하면 그런 양의 정수의 순서쌍 $(x, y)$가 무한히 많음을 보여라.

(1) $\frac{x^2-2}{y}$ 와 $\frac{y^2-3}{x}$ 은 양의 정수이다.

(2) $\gcd\left(3x + \frac{2(y^2-3)}{x},\ 2y + \frac{3(x^2-2)}{y}\right) = k$

**3.** 사람들의 모임 $P$가 있다. $P$에 속하는 서로 다른 두 사람 $A$, $B$에 대하여 $A$가 $B$를 알면 $B$도 $A$를 안다고 한다. $P$에 속하는 각 사람은 모임 $P$에 있는 사람 중 자기 자신을 제외하고 알고있는 사람의 수가 2 이하이다. $P$의 부분집합 중 $k$명으로 이루어진 집합 $S$에 대하여, $S$에 속하는 어떤 두 사람도 서로 모르면 $S$를 $P$의 '$k$-독립적인 집합'이라 하자. $P$의 부분집합 $X_1, X_2, \ldots, X_{4041}$은 2021-독립적인 집합으로 서로 다를 필요는 없다. 다음 조건을 만족하는 $P$의 2021-독립적인 집합 $\{v_1, v_2, \ldots, v_{2021}\}$이 존재함을 보여라.

어떤 정수 $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{2021} \leq 4041$에 대하여
$v_1 \in X_{i_1},\ v_2 \in X_{i_2},\ \ldots,\ v_{2021} \in X_{i_{2021}}$이다.

제 34회 최종시험 오후

# 한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

**2021년 5월 8일; 제한시간 3시간; 문항당 7점**

**4.** 대한 고등학교에는 $n(\geq 2)$개의 동아리 $A_1, A_2, \ldots, A_n$이 있다. 이때 다음 조건을 만족하는 $n-1$개의 모임 $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$이 존재함을 보여라.

(1) $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_{n-1}$이다.

(2) $1 \leq i < j \leq n-1$에 대하여 $B_i \cap B_j = \emptyset$이고 $-1 \leq |B_i| - |B_j| \leq 1$이다. (단, $|X|$는 집합 $X$의 원소의 개수)

(3) $1 \leq i \leq n-1$에 대하여 $B_i \subseteq A_k \cup A_l$인 $1 \leq k \leq l \leq n$이 존재한다.

**5.** 이등변 삼각형이 아닌 예각 삼각형 $ABC$의 내심은 $I$이고, 꼭지점 $A$에 대한 방접원 $\Omega$의 중심은 $O$이다. 점 $A$, $I$에서 변 $BC$에 내린 수선의 발을 각각 $D$, $E$라 하자. 직선 $OE$와 $AD$의 교점을 $X$, 삼각형 $BCX$의 외심을 $P$라 하자. 점 $X$가 삼각형 $ABC$의 내접원 위에 있으면 삼각형 $BCP$의 외접원이 원 $\Omega$에 접함을 보여라.

**6.** 다음 조건을 만족하는 함수 $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$을 모두 구하여라. (단, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합)

$$\text{모든 실수 } x,\ y\text{에 대하여, } f\left(x^2 - g(y)\right) = g(x)^2 - y$$