제35회 최종시험 오전

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2022년 4월 23일 ; 제한시간 3시간 ; 문항당 7점

1. 예각삼각형 $ABC\,(\overline{AB} < \overline{AC})$의 꼭짓점 A, B, C에서 마주보는 변에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하자. 삼각형 ABC의 외접원의 점 B에서의 접선과 점 C에서의 접선이 점 P에서 만난다. 점 P에서 직선 EF에 내린 수선과 직선 AD의 교점을 Q, 점 A에서 직선 EF에 내린 수선의 발을 R, 삼각형 ABC의 외심을 O라 할 때, 직선 DR과 OQ가 평행함을 보여라.

2. 양의 정수 $n\,(\geq 3)$에 대하여 0개 이상의 돌이 들어 있는 상자 $A_1, A_2, \ldots, A_n$이 있다. 이 상자들의 모임 $\{A_1, \cdots, A_n\}$에 다음과 같은 시행을 하기로 하자.

> $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 중 하나를 선택하여 그 상자 안에 있는 돌을 모두 꺼낸 후, 꺼낸 돌을 n개의 상자에 추가하되, 임의의 두 상자에 추가하는 돌의 개수의 차이는 1 이하가 되도록 한다.

예를 들어, $n = 4$이고 A_1, A_2, A_3, A_4에 돌이 각각 $2, 6, 0, 4$개씩 들어있을 때, A_1에 있는 돌 2개를 모두 꺼내 A_1, A_2, A_3, A_4에 각각 $1, 0, 1, 0$개씩 추가하는 한 번의 시행을 통해 A_1, A_2, A_3, A_4에 들어있는 돌의 개수가 각각 $1, 6, 1, 4$가 되게 할 수 있다.
현재 상자 A_i에 들어있는 돌의 개수를 $a_i\,(\geq 0)$이라 하고 $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 3n$이라 하자. 위의 시행을 반복하여 모든 돌을 하나의 상자에 넣으려고 할 때 필요한 시행의 횟수의 최솟값을 $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$이라 하자. $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$이 가질 수 있는 값 중 가장 큰 값 M을 구하고, $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = M$을 만족하는 음이 아닌 정수 $a_1, a_2, \ldots, a_n$의 순서쌍 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$을 모두 구하여라.

3. 치역이 유한집합인 함수 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$이 주어져 있다. 다음 조건을 만족하는 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$을 모두 구하여라. (단, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합)

> 모든 실수 x, y에 대하여 $2f(x + g(y)) = f(2g(x) + y) + f(x + 3g(y))$

kmo
한국수학올림피아드
제 35 회 최종시험 오후
한국수학올림피아드
KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2022년 4월 23일 ; 제한시간 3시간 ; 문항당 7점

4. 이등변 삼각형이 아닌 예각삼각형 ABC의 내접원 ω가 변 AB, AC와 각각 점 D, E에서 접한다. 점 A에서 변 BC에 내린 수선과 원 ω의 두 교점 중 점 A에 가까운 점을 L이라 하자. 삼각형 ABC의 내심을 I, 삼각형 ABC의 외접원과 직선 AI와 만나는 점을 $M\,(\neq A)$, 삼각형 BDE의 외심 O가 중심이고 점 L을 지나는 원이 직선 AL과 만나는 점을 $N\,(\neq L)$이라 하자. 두 직선 LD와 MB의 교점이 삼각형 LNE의 외접원 위에 있음을 보여라.

5. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 m을 모두 구하여라.

$x^2 + 11y^2 + 2022$를 m의 배수가 되도록 하는 정수 x, y가 존재한다.

6. 다음 세 조건을 모두 만족하는 집합 X를 '좋은 집합'이라 하자.

(i) X의 원소의 개수는 2022이다.

(ii) X의 각 원소는 구간 $[0, 1]$에 포함되는 닫힌 구간이다.

(iii) 임의의 실수 $r\,(0 \leq r \leq 1)$에 대하여 X의 원소 중 r을 포함하는 것은 최대 1011개이다.

두 개의 좋은 집합 A, B에 대하여 $I \cap J \neq \emptyset$을 만족하는 $I \in A$, $J \in B$의 순서쌍 (I, J)의 개수를 $n(A, B)$라 하자. $n(A, B)$가 가질 수 있는 값 중 가장 큰 것을 구하여라.