제 36 회 고등부 2차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

고등부

2022년 10월 29일 (오전), 제한시간 3시간, 문항당 7점

1. 세 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$이 다음 두 조건을 모두 만족한다.

- $a_1 = 2$, $b_1 = 4$, $c_1 = 5$
- 모든 양의 정수 n에 대하여 $a_{n+1} = b_n + \dfrac{1}{c_n}$, $b_{n+1} = c_n + \dfrac{1}{a_n}$, $c_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{b_n}$ 이다.

모든 양의 정수 n에 대하여, a_n, b_n, c_n 중 $\sqrt{2n+13}$ 보다 큰 것이 존재함을 증명하여라.

2. 이등변삼각형이 아닌 예각삼각형 ABC에서 각 A의 이등분선과 변 BC의 교점을 D라 하고, 삼각형 ABD와 ADC의 외심을 각각 E, F라 하자. 삼각형 BDE의 외접원과 삼각형 DCF의 외접원의 교점 중 D가 아닌 점을 P, 삼각형 ABC, BDE, DCF의 외심을 각각 O, X, Y라 할 때, 직선 OP와 직선 XY가 평행함을 보여라.

3. 모든 항이 양의 정수인 수열 $\{a_n\}$은 다음 두 조건을 모두 만족한다.

- $i \geq 2022$인 정수 i에 대하여 a_i는 $x + \displaystyle\sum_{k=i-2021}^{i-1} a_k$ 가 완전제곱수가 되는 양의 정수 x 중 가장 작은 것이다.
- $a_n = 4 \times 2022 - 3$ 을 만족하는 양의 정수 n은 무한히 많다.

다음 조건을 만족하는 양의 정수 N이 존재함을 보여라.

(조건) N 이상인 모든 정수 n에 대하여 $\displaystyle\sum_{k=n}^{n+2021} a_k$ 의 값은 항상 일정하다.

그리고 $\displaystyle\sum_{k=N}^{N+2021} a_k$ 의 값을 구하여라.

4. 양의 정수 $m, n\,(m > n)$에 대하여 $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_m$은 다음을 만족하는 음이 아닌 정수이다.

$$2 > \frac{a_{n+1}}{n+1} \geq \frac{a_{n+2}}{n+2} \geq \cdots \geq \frac{a_m}{m}$$

이러한 순서쌍 $(a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_m)$의 개수를 구하여라.

제 36 회 고등부 2차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

고등부

2022년 10월 29일 (오후), 제한시간 3시간, 문항당 7점

5. 이등변삼각형이 아닌 예각삼각형 ABC의 내접원이 점 D, E, F에서 각각 변 BC, CA, AB에 접한다. 삼각형 ABC의 내심을 I, 직선 AI와 DF의 교점을 P, 직선 BI와 EF의 교점을 Q라 하자. 두 선분 PQ와 CD의 길이가 같음을 보여라.

6. 다음 세 조건을 모두 만족하도록 $n\,(\geq 4)$개의 섬이 다리로 연결되어있다.

- 각 다리는 오직 두 섬만을 연결하며, 다른 섬을 거치지 않는다.
- 임의의 서로 다른 두 섬을 연결하는 다리는 하나 이하이다.
- 다음을 만족하는 서로 다른 섬의 나열 $A_1, A_2, \ldots, A_{2k}\,(k \geq 2)$는 없다.

  각각의 $i = 1, 2, \ldots, 2k$마다 A_i와 A_{i+1}이 다리로 연결되어있다.
  (단, $A_{2k+1} = A_1$)

다리의 총 개수는 $\frac{3(n-1)}{2}$ 이하임을 보여라.

7. 모든 항이 양의 실수인 무한수열 $\{a_n\}$이 다음 두 조건을 모두 만족한다.

- $i < j$를 만족하는 양의 정수 i, j에 대하여 $a_i \leq a_j$이다.
- 모든 양의 정수 $k(\geq 3)$에 대하여 다음 부등식이 성립한다.

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdots (a_{k-1} + a_k)(a_k + a_1) \leq (2^k + 2022)a_1 a_2 \cdots a_k$$

이때 모든 a_n은 같은 수임을 보여라.

8. 양의 정수 p는 8로 나눈 나머지가 3인 소수이다. 다음 등식을 만족하는 유리수 x, y의 순서쌍 (x, y)를 모두 구하여라.

$$p^2x^4 - 6px^2 + 1 = y^2$$